Université de Strasbourg **L3 Mathématiques**

2024-2025

Topologie, feuille 2 : bases, topologie euclidienne, topologie produit

Exercice 1. Soit $\mathcal{B}$ une base d'une topologie $\mathcal{T}$ sur un ensemble non vide X, et soit $\mathcal{B}_1$ un ensemble de parties de X tel que $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_1 \subset \mathcal{T}$.

1. Montrer que $\mathcal{B}_1$ est une base pour $\mathcal{T}$.
2. En déduire qu'il existe une infinité non dénombrable de bases distinctes pour la topologie euclidienne sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. Soit $\mathcal{B} = \{]a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$.

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est la base d'une topologie $\mathcal{T}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Est-ce que $\mathcal{T}$ est la topologie euclidienne ?
3. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Montrer que $]a, b[$ est un ouvert de $\mathcal{T}$.

Exercice 3. Soient X et Y deux ensembles, $\mathcal{B}_1$ une base d'une topologie sur X et $\mathcal{B}_2$ une base d'une topologie sur Y. Montrer que

$$\mathcal{B} = \{B_1 \times B_2 \mid B_1 \in \mathcal{B}_1, B_2 \in \mathcal{B}_2\}.$$

est la base d'une topologie sur $X \times Y$. Cette topologie est la *topologie produit* sur $X \times Y$.

Exercice 4. Montrer que la réunion d'un nombre infini de fermés de $\mathbb{R}$ n'est pas nécessairement un fermé de $\mathbb{R}$.

Exercice 5. Montrer les assertions suivantes.

1. $\mathbb{Z}$ n'est pas ouvert dans $\mathbb{R}$.
2. L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels n'est ni ouvert ni fermé dans $\mathbb{R}$.

Exercice 6. Montrer que l'ensemble $S = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$. Qu'en est-il de l'ensemble $S \setminus \{0\}$?

Exercice 7. On va montrer que le disque défini par $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 < 1\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ muni de la topologie produit. (En oubliant qu'il s'agit d'une boule ouverte pour la distance euclidienne.)

1. Soit (a, b) un point de D. On pose $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Soit $R_{(a,b)}$ le rectangle ouvert dont les sommets sont $(a - \frac{1-r}{8}, b - \frac{1-r}{8})$, $(a + \frac{1-r}{8}, b - \frac{1-r}{8})$, $(a - \frac{1-r}{8}, b + \frac{1-r}{8})$ et $(a + \frac{1-r}{8}, b + \frac{1-r}{8})$. Vérifier qu'il est contenu dans D.
2. En utilisant la question précédente, montrer que

$$D = \bigcup_{(a,b) \in D} R_{(a,b)}.$$

3. Déduire de la question précédente que D est ouvert dans $\mathbb{R}^2$.
4. Montrer à présent que tout disque $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x-a)^2 + (y-b)^2 < c^2, a,\, b,\, c \in \mathbb{R}\}$ est ouvert dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 8. Dire si chacun des ensembles suivants est une base pour la topologie euclidienne de $\mathbb{R}^2$.

1. L'ensemble des carrés ouverts dont les cotés sont parallèles aux axes.
2. L'ensemble des disques ouverts.
3. L'ensemble de tous les carrés ouverts.
4. L'ensemble de tous les rectangles ouverts.
5. L'ensemble de tous les triangles ouverts.

Comparer les topologies engendrées par ces bases (dire si certaines sont plus fines que d'autres).

Exercice 9. Soit X un ensemble. On rappelle que la topologie discrète sur X est la topologie $\mathcal{D} = \{O \mid O \subset X\}$.

1. Montrer que $\mathcal{D}$ est bien une topologie.
2. Soit $\mathcal{T}$ une topologie sur X telle que pour tout $x \in X$, le singleton $\{x\}$ est ouvert. Montrer que $\mathcal{T} = \mathcal{D}$.
3. Montrer que $\mathcal{D}$ est la topologie la plus fine possible sur X, c'est-à-dire que pour toute topologie $\mathcal{T}$ sur X, si $A \in \mathcal{T}$ alors $A \in \mathcal{D}$.
4. Soient $(X_1, \mathcal{D}_1), \cdots, (X_n, \mathcal{D}_n)$ des espaces topologiques discrets. Montrer que le produit $(X_1, \mathcal{D}_1) \times \cdots \times (X_n, \mathcal{D}_n)$ est aussi un espace topologique discret.

   On peut également adopter un point de vue métrique. On définit une fonction $\delta : X \times X \to \mathbb{R}$ par $\delta(x,y) = 1$ si $x \neq y$ et $\delta(x,y) = 0$ si $x = y$.
5. Montrer que δ définit une distance sur X.
6. Soit $x \in X$. Décrire la boule ouverte de centre x et de rayon 1, puis la boule ouverte de centre x et de rayon $\frac{1}{2}$ pour δ.
7. Même question en substituant ouverte par fermée.
8. Montrer que la topologie associée à δ est la topologie discrète.

Exercice 10. Montrer que le produit d'un nombre fini d'espaces séparés l'est aussi.

Exercice 11. Montrer qu'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est séparé si et seulement si la diagonale $\Delta = \{(x,x) \mid x \in X\}$ est un fermé pour la topologie produit sur $X \times X$.