# Topologie, feuille 4

**Exercice 1.** Soient $(X, \mathcal{T}_X)$ et $(Y, \mathcal{T}_Y)$ deux espaces topologiques, et soit $f : X \to Y$ une application continue et surjective.

1. Montrer que si $(X, \mathcal{T}_X)$ est séparable, alors $(Y, \mathcal{T}_Y)$ l'est aussi.
2. On suppose de plus que $f$ est une application ouverte, montrer que si $(X, \mathcal{T}_X)$ est à base dénombrable (C2), alors $(Y, \mathcal{T}_Y)$ l'est aussi.

**Exercice 2.** Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et soit $\mathcal{B}$ une base pour $\mathcal{T}$. Soit $A$ une partie de $X$ et soit $x \in X$. Montrer que $x \in \bar{A}$ si et seulement si pour tout $B \in \mathcal{B}$ contenant $x$, $A \cap B \neq \emptyset$.

**Exercice 3.** Soit $\mathcal{B} = \{]a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$. On rappelle (voir feuille 2) que $\mathcal{B}$ est la base d'une topologie sur $\mathbb{R}$, et on note $\mathcal{T}$ la topologie engendrée par $\mathcal{B}$.

1. $\mathcal{T}$ est-elle séparable ?
2. $\mathcal{T}$ est-elle à base dénombrable (C2) ?

**Exercice 4.** On dit qu'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ vérife la *condition de chaîne dénombrable* si toute famille d'ouverts deux à deux disjoints est finie ou dénombrable.

1. On suppose que $(X, \mathcal{T})$ est séparable. Montrer qu'il vérifie la condition de chaîne dénombrable.
2. Soit $X$ un ensemble non-dénombrable et soit

$$\mathcal{T} = \{A \subset X \mid A = \emptyset \text{ ou } X \setminus A \text{ est fini ou dénombrable}\}.$$

   (a) Montrer que $\mathcal{T}$ est une topologie.
   (b) Montrer que $(X, \mathcal{T})$ vérifie la condition de chaîne dénombrable mais n'est pas séparable.

**Exercice 5.** Soient $(X, \mathcal{T}_X)$ et $(Y, \mathcal{T}_Y)$ deux espaces topologiques, et soit $f, g : X \to Y$ deux applications continues. Montrer que si $(Y, \mathcal{T}_Y)$ est séparé, alors $F = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ est un fermé de $X$.

**Exercice 6.** Soit $(X, d)$ un espace métrique. Montrer que $X$, muni de la topologie associée à la métrique $d$, est T4 (normal).

**Exercice 7.** Soit $(X, d)$ un espace métrique. On munit $X$ de la topologie associée à la métrique $d$. Montrer que si $X$ est séparable, alors $X$ est à base dénombrable (C2).

**Exercice 8.** Soient $X$ et $Y$ deux espaces topologiques. On munit $X \times Y$ de la topologie produit.

1. Montrer que $X \times Y$ est régulier (T3) si et seulement si $X$ et $Y$ le sont.
2. Montrer que si $X \times Y$ est normal (T4), alors $X$ et $Y$ le sont. (La réciproque n'est pas vraie en général.)

**Exercice 9.** On munit l'ensemble $X = \{a, b, c, d, e\}$ de la topologie

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}, X\}.$$

Décrire les topologies induites sur $Y = \{a, c, e\}$ et $Z = \{b, c, d, e\}$.

**Exercice 10.** Soit $G$ un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. Montrer que soit $G$ est dense dans $\mathbb{R}$, soit il existe $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tel que $G = \alpha\mathbb{Z}$.

**Exercice 11.** Soient $(X, d_X)$ et $(Y, d_Y)$ deux espaces métriques, et soit $f : X \to Y$ une isométrie, c'est-à-dire

$$\forall x_1, x_2 \in X \qquad d_Y(f(x_1), f(x_2)) = d_X(x_1, x_2).$$

On suppose que $f$ est surjective ; montrer que $f$ est un homéomorphisme.

**Connexité**

**Exercice 12.** Les lettres $X$ et $Y$ sont-elles homéomorphes ?

**Exercice 13.** Soient $X$ et $Y$ deux espaces topologiques.

1. Montrer que si $f : X \to Y$ est une application continue et que si $A \subset X$ est connexe, alors $f(A)$ est connexe dans $Y$.
2. Montrer que $X \times Y$ est connexe si et seulement si $X$ et $Y$ le sont.

**Exercice 14.** Soient $X$ un espace topologique et $A$ une partie de $X$. Montrer que $A$ est une partie connexe de $X$ si et seulement si pour tout couple $(U_1, U_2)$ d'ouverts de $X$ tel que $A \subset U_1 \cup U_2$ et $A \cap U_1 \cap U_2 = \emptyset$, alors $A \subset U_1$ ou $A \subset U_2$.

**Exercice 15.** Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ une fonction continue.

1. En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer qu'il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.
2. En utilisant la connexité de $[0, 1]$, montrer qu'il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

**Exercice 16.**
1. Les espaces métriques $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ et $\mathbb{R}^2\backslash\{(0, 0)\}$ sont-ils connexes ? En déduire que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes.
2. Montrer que $\mathbb{S}^1$ (le cercle unité dans $\mathbb{R}^2$) n'est homéomorphe à aucune partie de $\mathbb{R}$.

**Exercice 17** (Groupes Topologiques)**.** Soit $G$ un groupe commutatif dont la loi est notée $\cdot$ muni d'une topologie $\mathcal{T}$ telle que les applications [1]

$$\begin{array}{rcl} \bullet : G \times G & \to & G \\ (g_1, g_2) & \mapsto & g_1 \cdot g_2 \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} \varphi : G & \to & G \\ g & \mapsto & \varphi(g) = g^{-1} \end{array}$$

soient continues.

Soit $H$ un sous-groupe de $G$ ; on parle de sous-groupe topologique en le munissant de la topologie induite par celle de $G$. On note $e$ l'élément neutre de $G$. On munit le quotient $G/H$ de la topologie quotient.

1. Montrer que pour $h$ fixé dans $G$ l'application $\tau_h : G \to G$ qui à tout élément $g$ de $G$ associe $\tau_h(g) = g \cdot h$ est un homéomorphisme.
2. Montrer que $H$ est un ouvert de $G$ si et seulement si $e \in \mathring{H}$.
3. Montrer que si $H$ est ouvert alors il est aussi fermé.
4. Montrer que $C_{\{e\}}$, la composante connexe de $e$ dans $G$, est un sous-groupe topologique de $G$.
5. Montrer que si $G$ est connexe, alors il ne possède pas de sous-groupe strict d'intérieur non vide et non réduit à $e$.
6. Montrer que si $H$ et $G/H$ sont connexes alors $G$ est connexe.

**Exercice 18.** Soit le peigne dans $(\mathbb{R}^2, \mathrm{d}_\infty)$ donné par

$$P = (\mathbb{Q} \times [0,1]) \cup (\mathbb{R} \times \{0\}) \subset \mathbb{R}^2.$$

Montrer que $P$ est connexe (et même connexe par arcs), mais pas localement connexe.

**Exercice 19.** Soit $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 0,\ y = \sin \frac{1}{x}\} \subset (\mathbb{R}^2, d_\infty)$.

1. Montrer que $A$ est connexe, connexe par arcs, localement connexe.
2. Déterminer $\bar{A}$ et montrer que $\bar{A}$ est connexe mais qu'il n'est ni connexe par arcs, ni localement connexe.

1. $G \times G$ est muni de la topologie produit.