Cours 1

Topologie : partie de géométrie, mais utile pour autres sujets de math (Analyse, théorie des nombres, ---)

Topologie := l'étude de forme à déformation continue près.

l'étude de la notion de continuité.

Déf Un espace topologique est un ensemble X muni d'une collection $\mathcal{T}$ de sous-ensembles de X tq

(i) $\emptyset \in \mathcal{T}$, $X \in \mathcal{T}$

(ii) $\forall (U_i)_{i \in I}$ avec $U_i \in \mathcal{T}$

on a $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$

(iii) $\forall (U_i)_{i \in I}$ avec $U_i \in \mathcal{T}$ et I fini.

on a $\bigcap_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$

Terminologie : Une telle $\mathcal{T}$ est appelé une topologie sur X

- Un élément U de $\mathcal{T}$ est appelé un ouvert de X pour la topologie $\mathcal{T}$.

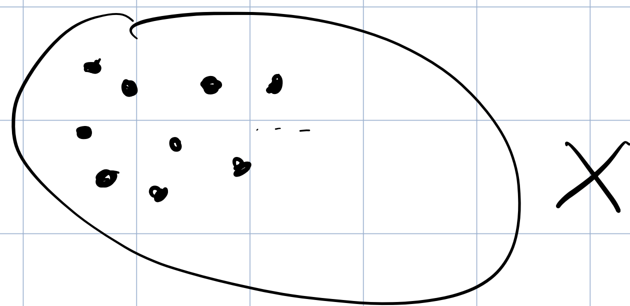
Exemples :

- Soit X un ensemble

$$\mathcal{T}_{disc} = \{ U \mid U \subset X \} = \{ \text{sous-ensembles de } X \}$$

↑ la topologie discrète sur X

Intuition,



Ex/Rq : Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est discret ssi $\forall x \in X, \ \{x\} \in \mathcal{T}$

- Soit X un ensemble.

$$\mathcal{T}_{gross} := \{ \emptyset, X \}$$

↑ la topologie grossière sur X

Intuition : on regarde l'espace sans lunette

- (Topologie cofinie)

Soit X un ensemble

$$\mathcal{T}_{cofinie} := \{ U \subset X \mid X \setminus U \text{ est fini} \} \cup \{\emptyset\}$$

- $\emptyset, X \in \mathcal{T}_{cofinie}$ ✓

- $\{U_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{T}_{cofinie} \Rightarrow |X \setminus U_i| < \infty$

$$X \setminus \left(\bigcup_{i\in I} U_i \right) = \bigcap_{i\in I} (X \setminus U_i) \text{ est fini.}$$

$$\Rightarrow \bigcup_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}_{cofinie}$$

- $\{U_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{T}_{cofinie}$ avec $|I| < \infty$

$$\Rightarrow |X \setminus U_i| < \infty \quad \forall i \in I.$$

$$X \setminus \left(\bigcap_{i\in I} U_i \right) = \bigcup_{\substack{i\in I \\ \text{fini}}} \underbrace{(X \setminus U_i)}_{\text{fini}} \text{ est fini.}$$

$$\Rightarrow \bigcap_{i\in I} U_i \in \mathcal{T}_{cofinie}. \quad \square$$

Rq si X est un ensemble fini,

$$\mathcal{T}_{\text{cofini}} = \mathcal{T}_{\text{discr.}}$$

Rq: la topologie cofinie apparaît naturellement en mathématique, e.g. en géométrie algébrique

la top. cofinie sur $\mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}$ = la top. de Zariski sur $\mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}$.

- **Topologie euclidienne**

$$X = \mathbb{R}^n \qquad (\text{ou } \mathbb{C}^n)$$

$$\mathcal{T} := \left\{ U \subset X \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall x \in U, \exists\, r > 0 \\ \text{tq } B(x,r) := \{ y \in X \mid \|y - x\| < r \} \subset U \end{array} \right\}$$

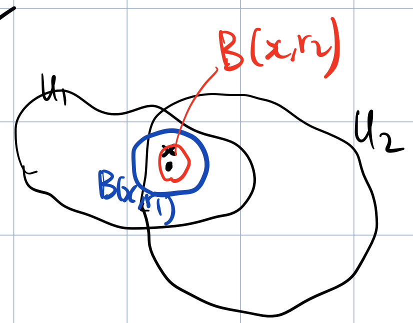
est une topologie sur $\mathbb{R}^n$, appellée <u>topologie euclidienne</u>.

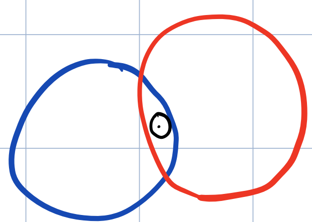
<u>Exercice</u> : vérifier que $\mathcal{T}$ est une topologie.

(i) ✓

(ii) ✓

(iii)





il faut trouver une plus petite boule $B(x, r_3)$ tq $B(x,r_3) \subset B(x,r_1) \cap B(x,r_2)$

Déf Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique
un sous-ensemble $F \subset X$ est dit <u>fermé</u>
si $X \setminus F$ est ouvert i.e. $X \setminus F \in \mathcal{T}$.

<u>Rq</u> La donnée de tous les fermés $\Leftrightarrow$ La donnée de tous les ouverts.

<u>**Déf** équivalente de topologie en termes des fermés</u>.
Une topologie sur un ensemble X est
Une collection $\mathcal{F}$ de sous-ensembles de X tq
(i) $\emptyset, X \in \mathcal{F}$
(ii) $\{F_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{i \in I} F_i \in \mathcal{F}$
(iii) $\{F_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{F}$ avec I fini $\Rightarrow \bigcup_{i \in I} F_i \in \mathcal{F}$

<u>Exercice</u> : Vérifier que c'est une définition équivalente.

Déf (Voisinage) Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique
et soit $x \in X$
Un <u>voisinage</u> de x dans X est un sous-ensemble

$x \in V \subset X$ tq $\exists$ ouvert U tq $x \in U \subset V$

<u>Rq</u> Un voisinage ouvert d'un pt $x \in X$
est simplement un ouvert U qui contient x.

<u>e.g.</u> • $(X, \mathcal{T}_{discr.})$ espace top. discret.
$\forall x \in X$, $\forall_{x \in U} U \subset X$, U est un voisinage ouvert de x

• $(X, \mathcal{T}_{gross})$ espace top. grossier, $x \in X$
le seul voisinage (ouvert) de x est X

<u>Distance</u>

<u>Déf</u> Soit X un ensemble, une <u>distance</u> sur X
est une fonction $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$
$(x, y) \longmapsto d(x, y)$

tq (i) <u>inégalité triangulaire</u> :

$\forall x, y, z \in X$

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z).$$

(ii) <u>Symétrie</u> $d(x,y) = d(y,x)$

(iii) <u>non-dégénerescence</u> :

$$d(x,y) = 0 \iff x = y$$

On appelle (X, d) un <u>espace métrique</u>.

<u>Exemples</u>

- <u>sur $\mathbb{R}$</u>, $d(x,y) := |x-y|$
- <u>sur $\mathbb{C}$</u> : $d(z_1,z_2) := |z_1 - z_2|$
- <u>sur $\mathbb{R}^n$</u> . $d_2(\underline{x}, \underline{y}) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} =: \| \underline{x} - \underline{y} \|_2$

  ↳ La <u>distance euclidienne / L_2</u>.

  - $\forall p \geq 1$

$$d_p(\underline{x}, \underline{y}) := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p} =: \| \underline{x} - \underline{y} \|_p .$$

↳ la <u>distance L_p</u>

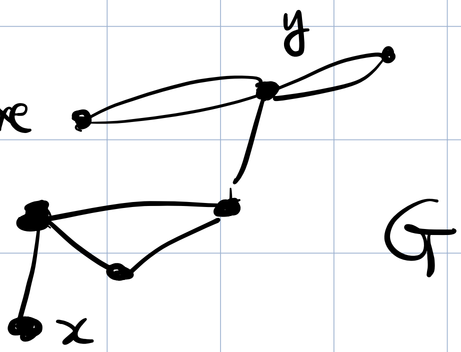
<u>e.g.</u> $d_1(\underline{x}, \underline{y}) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$

- $d_\infty(\underline{x}, \underline{y}) := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| =: \| \underline{x} - \underline{y} \|_\infty$

↳ la <u>distance L_∞</u>.

- Soit $G = (V, E)$ un <u>graph</u> connexe

$$V = \{\text{sommets}\}, \quad E = \{\text{arêtes}\}$$



On a la distance de graph sur V

$\forall x, y \in V \quad d(x,y) :=$ longueur minimal d'un chemin de x vers y

- (distance SNCF)

$X = \{$ gares en France $\}$

$\forall x, y$

$$d(x,y) := \begin{cases} d_{\text{train}}(x, \text{Paris}) + d_{\text{train}}(\text{Paris}, y), & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

<u>Prop</u> (distance ⇝ topologie)

Soit X un ensemble muni d'une distance d

Alors $\mathcal{T} := \left\{ U \subset X \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall x \in U \ \exists r > 0 \text{ tq} \\ B_d(x,r) \subset U \end{array} \right\}$

$B_d(x,r) = \{ y \in X \mid d(x,y) < r \}$

est une topologie sur X, dite <u>induite par d</u>.

Preuve

- $\emptyset \in \mathcal{T}$, $X \in \mathcal{T}$ ✓

- Soit $\{U_i\}_{i\in I}$ avec $U_i \in \mathcal{T}$

$\forall x \in U := \bigcup_{i\in I} U_i$, $\exists\ i_0 \in I$ tq $x \in U_{i_0}$

$U_{i_0} \in \mathcal{T} \Rightarrow \exists\ r>0$ tq $B_d(x,r) \subset U_{i_0} \subset U$

$\Rightarrow U \in \mathcal{T}$

- Rq : Pour vérifier que $\mathcal{T}$ est stable par $\bigcap_{\text{fini}}$ il suffit de vérifier que $\forall U, V \in \mathcal{T}$, $U \cap V \in \mathcal{T}$.

(Raison : (Par récurrence)

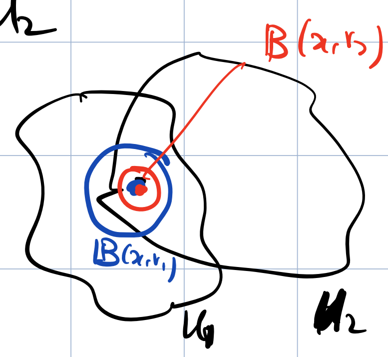
$$U_1 \cap \cdots \cap U_n = \underbrace{(U_1 \cap \cdots \cap U_{n-1})}_{\in \mathcal{T}} \cap \underbrace{U_n}_{\in \mathcal{T}} \in \mathcal{T}$$
)

Soient $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$, $\forall x \in U_1 \cap U_2$

$\Rightarrow \exists\ r_1, r_2 > 0$ tq

$B(x, r_1) \subset U_1$

$B(x, r_2) \subset U_2$



On pose $r := \min\{r_1, r_2\} > 0$

$\Longrightarrow \mathbb{B}(x,r) \subset \mathbb{B}(x,r_i) \subset U_i \quad \forall i = 1,2$.

$\Longrightarrow \mathbb{B}(x,r) \subset U_1 \cap U_2$

$\Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathcal{J}$ $\square$.

⚠ Rq: Differentes distances peuvent induire une même topologie.

Lemme. Si d_1 et d_2 sont deux distances sur X équivalentes, i.e. $\exists\, C > 0$, tq $C d_1 < d_2 < \frac{1}{C} d_1$

Alors la topologie induite par $d_1 =: \mathcal{J}_1$

$=$ la topologie induite par $d_2 =: \mathcal{J}_2$

Preuve: Il suffit de mq un ouvert pour $\mathcal{J}_1$ est aussi un ouvert pour $\mathcal{J}_2$

En effet, Soit $U \in \mathcal{J}_1$

$\forall x \in U$, $\exists\, r > 0$ tq $\mathbb{B}_{d_1}(x,r) \subset U$

Affirmation: $\mathbb{B}_{d_1}(x,r) \supset \mathbb{B}_{d_2}(x, C\cdot r)$

(Preuve: $\forall y \in \mathbb{B}_{d_2}(x, C\cdot r)$

$C\cdot r > d_2(y,x) > C\cdot d_1(y,x) \Rightarrow d_1(y,x) < r$

$\Rightarrow y \in \mathbb{B}_{d_1}(x,r)$)

$$\Longrightarrow \quad B_{d_2}(x, cr) \subset B_{d_1}(x,r) \subset U$$

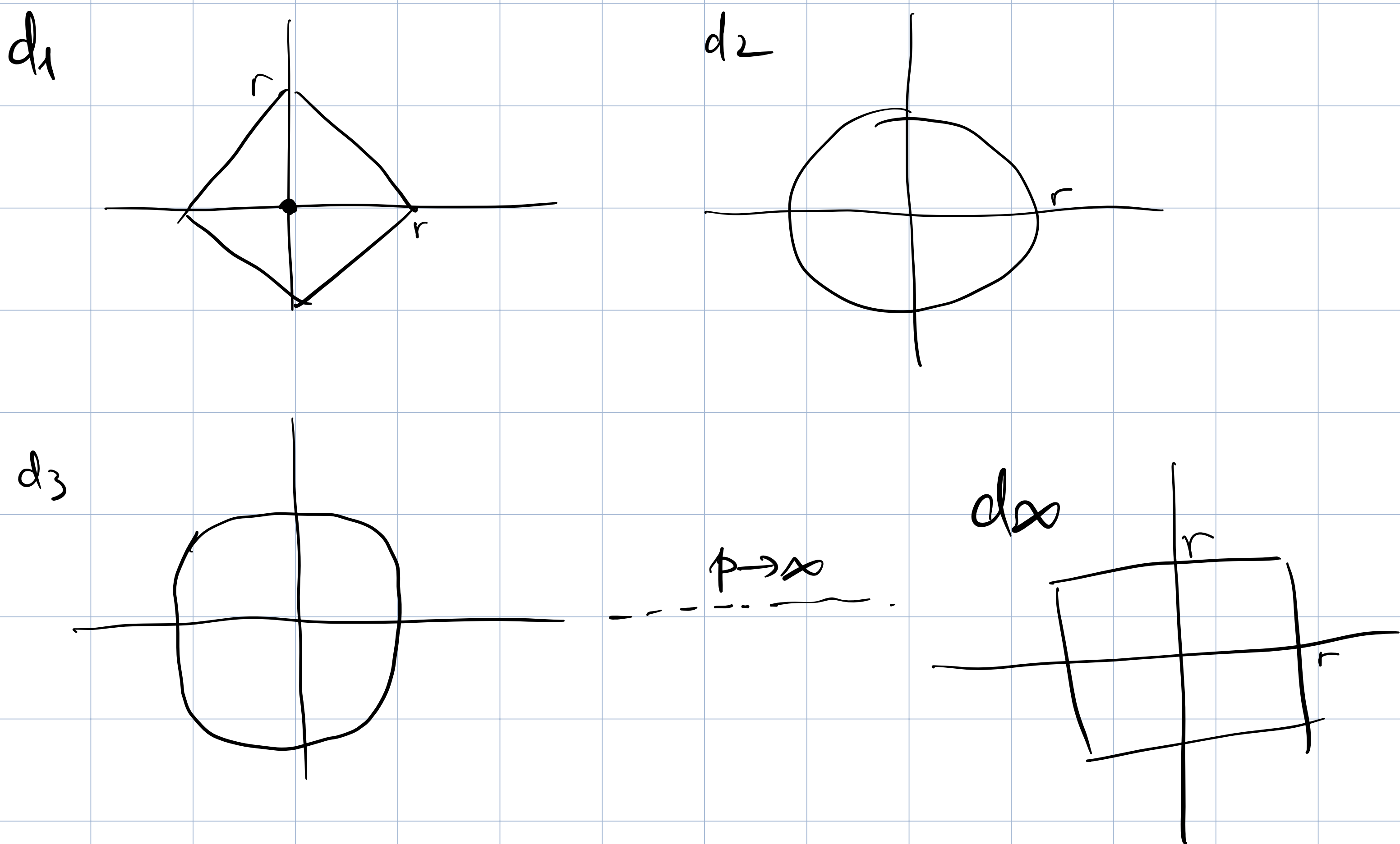
$\Longrightarrow$ U est ouvert pour $\mathcal{T}_2$. $\square$

<u>Exemples</u> $\forall\, p,q \in \mathbb{N}_{\geq 1} \cup \{\infty\}$ $\exists\, C$

$$C \cdot d_p < d_q < \frac{1}{C}\, d_p .$$

(Exercice)

<u>Boules</u> : $B(0,r)$



<u>Cor</u> Les distances $L_1, L_2, \dots, L_p, \dots, L_\infty$ induisent la même topologie sur $\mathbb{R}^n$.

<u>Terminologie</u> : la topologie euclidienne.

Comparaison de topologies

<u>Déf</u> Une topologie $\mathcal{T}$ sur X est dite <u>plus fine</u> qu'une topologie $\mathcal{T}'$ sur X

si $\mathcal{T} \supset \mathcal{T}'$

i.e. $\forall U \in \mathcal{T}', \; U \in \mathcal{T}$.

(" $\mathcal{T}$ a plus d'ouverts que $\mathcal{T}'$ ")

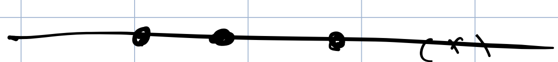
On dit aussi $\mathcal{T}'$ est <u>moins fine</u> que $\mathcal{T}$

<u>Notation</u> $\mathcal{T} > \mathcal{T}'$

<u>Exemples</u>

- $\mathcal{T}_{discr} > \forall \mathcal{T} > \mathcal{T}_{gross}$
- sur $X = \mathbb{R}^1$

$$\mathcal{T}_{disc} > \mathcal{T}_{euclid} > \mathcal{T}_{cofinie} > \mathcal{T}_{gross}$$

 $\mathbb{R}^1$