

Cours 10

Rappel:

Thm (Heine-Borel) Tout sous-espace fermé et borné de $\mathbb{R}^n$ est compact.

⚠ Ce n'est pas vrai pour un espace métrique quelconque.
ex: $|X| = \infty$ X muni de la distance $d(x, y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$

Rq: Dans $\mathbb{R}^n$, un compact est forcément borné et fermé.

Lemme. Soit $X \subset \mathbb{R}$ un sous-espace compact.
⌋ alors $\sup(X), \inf(X) \in X$

Preuve: X compact dans $\mathbb{R} \Rightarrow X$ est borné et fermé

X borné $\Rightarrow \sup(X) \neq +\infty, \inf(X) \neq -\infty$.

$\Rightarrow \begin{cases} \sup(X) \in \overline{X} \\ \inf(X) \in \overline{X} \end{cases}$ $\left(\begin{array}{l} \text{Si } \sup(X) \in X \quad \checkmark \\ \text{Sinon, } \forall \text{ voisinage ouvert de } \sup(X) \\ \text{contient un élément de } X \end{array} \right)$

$X \text{ fermé} \Rightarrow \sup(X), \inf(X) \in X = \overline{X}$

□

Applications de compacité:

1) Thm de Valeurs extrêmes

Soit X un espace topologique compact

Soit $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

Alors f atteint ses valeurs extrêmes (i.e. min, max.)

Autrement-dit, $\exists x_1, x_2 \in X$ tq $\forall x \in X$

$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$

Preuve: $\left. \begin{array}{l} X \text{ compact} \\ f \text{ continue} \end{array} \right\} \Rightarrow f(X) \text{ compact dans } \mathbb{R}$

Lemme $\Rightarrow \sup f(X), \inf f(X) \in f(X)$

i.e. f atteint min et max. $\square$

2) Thm de continuité uniforme

Déf Une fonction continue entre deux espaces métriques

$$X \xrightarrow{f} Y$$

est appelée uniformément continue si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tq } \forall x \in X, f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \varepsilon)$$

$\uparrow$
indépendant
de x .

Autrement-dit,
 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tq } \forall x, x' \in X \text{ avec } d_X(x, x') < \delta \text{ on a } d_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$

Thm (continuité uniforme) Soit $f: X \rightarrow Y$ une application

continue entre deux espaces métriques.

Si X est compact

Alors f est uniformément continue.

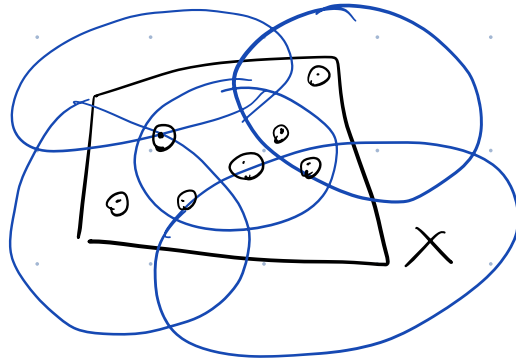
Preuve :

Lemme (nombre de Lebesgue) Soit (X, d) un espace métrique

| Soit $\{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X

Si X est compact

Alors $\exists \delta > 0$, tq $\forall x \in X$, $B(x, \delta)$ est contenu dans certains U_i



Preuve

- X compact $\Rightarrow X$ est couvert par un nb fini des U_i 's
 $\Rightarrow$ On peut supposer que I est fini.
Donc le recouvrement ouvert est $\{U_i\}_{i=1}^n$.

- Observation / Idée :
 $r > 0$, $B(x, r) \subset U_i$, $F_i = X \setminus U_i$
 $\Leftrightarrow \text{dist}(x, F_i) \geq r$

- Déf : Soit $x \in X$, Soit $F \subset X$
 $\text{dist}(x, F) := \inf \{d(x, y) \mid y \in F\} \geq 0$

- Étape 1 : $D_F : X \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ est continue.
 $x \longmapsto \text{dist}(x, F)$

$\forall \varepsilon > 0$, si $d(x', x) < \frac{\varepsilon}{2}$

Il y a : $|\text{dist}(x, F) - \text{dist}(x', F)| < \varepsilon$

$$\forall y \in F, \quad d(x, y) \leq d(x', y) + d(x, x')$$

$$\Rightarrow d(x, y) < d(x', y) + \varepsilon/2$$

$$\Rightarrow \inf_{y \in F} d(x, y) < d(x', y) + \varepsilon/2$$

$$\Rightarrow \inf_{y \in F} d(x, y) \leq \inf_{y \in F} d(x', y) + \varepsilon/2$$

$$< \inf_{y \in F} d(x', y) + \varepsilon$$

on a montré que

$$\inf \{d(x, y) \mid y \in F\} < \inf \{d(x', y) \mid y \in F\} + \varepsilon$$

De même

$$\inf \{d(x', y) \mid y \in F\} < \inf \{d(x, y) \mid y \in F\} + \varepsilon$$

$$\Rightarrow D_F \text{ est continue.} \quad \square$$

• Étape 2: on considère la fonction continue suivant φ par étape 1.

$$D: X \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$$x \longmapsto \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_{F_i}(x)$$

1) D est à valeurs dans $\mathbb{R}_{>0}$

i.e. $\forall x \in X, D(x) > 0$

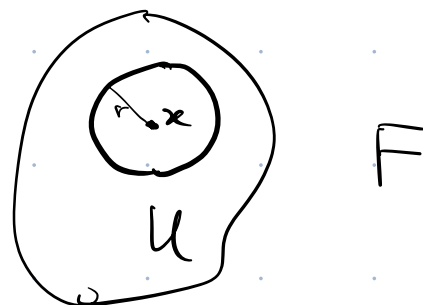
Preuve: $\forall x \in X$, comme $\bigcup_{i=1}^n U_i = X$

$\exists i$ tq $x \in U_i$

U_i ouvert $\Rightarrow \exists r > 0$, tq $B(x, r) \subset U_i$

$$\Rightarrow D_{F_i}(x) = \text{dist}(x, F_i) \geq r > 0$$

$$\Rightarrow D(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_{F_i}(x) > 0.$$



• Étape 3. Comme X est compact
et $D: X \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ continue

Thm val. ext. $\Rightarrow D$ atteint son min.

i.e. $\exists x_0 \in X$ tq $\forall x$

$$0 < D(x_0) \leq D(x).$$

!!
 δ

Donc $D(x) \geq \delta > 0 \quad \forall x \in X$,

• Etape 4 Ce δ marche :
Mq: $\forall x \in X, B(x, \delta) \subset U_i$ pour certain i

Preuve: $\forall x \in X$, comme $D(x) > \delta > 0$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \text{dist}(x, F_i)$$

$$\Rightarrow \exists i \text{ tq } \text{dist}(x, F_i) \geq \delta$$

$$\Rightarrow B(x, \delta) \subset U_i$$

Raison

$\forall y \in B(x, \delta)$ i.e. $d(x, y) < \delta$
 si $y \notin U_i$ i.e. $y \in F_i$
 alors $\text{dist}(x, F_i) \leq d(x, y) < \delta$
 contradiction



(Lemme)

Preuve du thm de continuité uniforme

Soit $X \xrightarrow{f} Y$ continue et X compact.

$$\forall \varepsilon > 0, Y = \bigcup_{y \in Y} B(y, \varepsilon/2)$$

$$\Rightarrow X = \bigcup_{y \in Y} \underbrace{f^{-1}(B(y, \varepsilon/2))}_{\substack{\uparrow \\ \text{ouvert dans } X}} \quad (\text{les } U_i \text{ dans Lemme})$$

$\star$ $\xRightarrow[\text{Nb de Leb.}]{\text{Lemme}}$ $\exists \delta > 0$ tq $\forall x \in X, \exists y \in Y, \text{ tq } \underbrace{B(x, \delta) \subset f^{-1}(B(y, \varepsilon/2))}_{\substack{\downarrow \\ f(B(x, \delta)) \subset B(y, \varepsilon/2)}} \quad \textcircled{*}$

$$\Rightarrow \forall x_1, x_2 \in X \text{ avec } d_X(x_1, x_2) < \delta$$

$$x_1, x_2 \in B(x_1, \delta) \stackrel{\textcircled{*}}{\Rightarrow} \exists y \in Y \text{ tq } \underbrace{f(B(x_1, \delta))}_{\substack{\downarrow \\ f(x_1), f(x_2)}} \subset B(y, \varepsilon/2)$$

$$\Rightarrow f(x_1), f(x_2) \in B(y, \varepsilon/2)$$

$$\Rightarrow d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq d_Y(f(x_1), y) + d_Y(f(x_2), y)$$

$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2$$

$$= \varepsilon$$

□

Chapitre Complétude

Def Soit $(x_n)_n$ une suite dans un espace topologique X

On dit que x_n converge vers $x \in X$

si $\forall$ voisinage ouvert U de x dans X

$\exists N$ tq $\forall n > N, x_n \in U$.

On note $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$

Rq : Une suite $(x_n)_n$ peut converger vers plusieurs pts différents.

• si on suppose que X est séparé.

alors $(x_n)_n$ peut converger vers au plus un pt. (Exo)

Def Dans le cas $x_n \longrightarrow x$ dans X séparé, on dit que x est la limite de x_n .

On note $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = x$

- $\exists$ suite qui ne converge pas.

Exemple Un espace métrique est séparable.
 Donc si une suite converge, la limite est unique.

Def Soit (X, d) un espace métrique
 une suite de Cauchy dans X est une suite $(x_n)_n$
 tq $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \text{ tq } \forall n, n' > N, d(x_n, x_{n'}) < \varepsilon$

Exemple Une suite convergente dans (X, d) est de Cauchy.

Preuve: Soit $(x_n)_n$ une suite convergente

$$X \ni x := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

Par la définition de limite, $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$ tq
 $\forall n > N, d(x_n, x) < \varepsilon/2$
 $\left(\begin{array}{c} \updownarrow \\ x_n \in B(x, \varepsilon/2) \end{array} \right)$

$$\Rightarrow \forall n, n' > N,$$

$$d(x_n, x_{n'}) \leq d(x_n, x) + d(x_{n'}, x)$$

$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2$$

$$= \varepsilon.$$

Exemple (suite de Cauchy qui ne converge pas)

$X = \mathbb{Q}$ avec la distance euclidienne.

On prend $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (eg. $\sqrt{2}, \pi, e, \dots$)

Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$,

$\exists$ une suite $\{x_n\}$ tq $|x_n - \alpha| < \frac{1}{n}$.

$\Rightarrow \{x_n\}_n$ est de Cauchy (Car $\{x_n\}$ converge dans $\mathbb{R}$)
(Exo).

Pas contre, $\{x_n\}_n$ ne converge pas en tant que suite dans $\mathbb{Q}$.

Raison Supposons par l'absurd $\exists x \in \mathbb{Q}$ tq $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$

$\Rightarrow x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ dans $\mathbb{R}$

mais $\mathbb{R}$ séparé, donc limite est unique (si existe)

$\Rightarrow x = \alpha \notin \mathbb{Q}$

contradiction $\square$

Déf Un espace métrique est dit complet si toute suite de Cauchy admet une limite.

Exemples

• $\mathbb{R}$

• $\mathbb{R}^n$

• Lemme Un sous-espace F fermé dans un

Proposition : Espace métrique complet X est complet.

Preuve : Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy dans F

$\Rightarrow (x_n)_n$ est Cauchy vne comme suite dans X

X complet $\Rightarrow \exists x \in X$ tq $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$

Comme $\left. \begin{array}{l} x_n \rightarrow x \\ x_n \in F \end{array} \right\} \Rightarrow x \in \overline{F} \underset{F \text{ fermée}}{=} F$

$\Rightarrow x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \in F$ $\square$