

Cours 11

Lemme (Produit)

Soient $(X_1, d_1), \dots, (X_n, d_n)$ des espaces métriques.

Soit $X = X_1 \times \dots \times X_n$, $D: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$
 $((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \mapsto \sum_{i=1}^n d_i(x_i, y_i)$

Alors (X, D) est complet $\iff (X_i, d_i)$ est complet $\forall 1 \leq i \leq n$.

Preuve $\Rightarrow$: Mg (X_i, d_i) est complet.

On choisit des points $x_2 \in X_2, \dots, x_n \in X_n$.

$\forall$ suite de Cauchy $\{a_m\}_m$ de X_1

On considère la suite $\{(a_m, x_2, \dots, x_n)\}_m$ de X

• c'est une suite de Cauchy car

$$D((a_m, x_2, \dots, x_n), (a_{m'}, x_2, \dots, x_n)) = d_1(a_m, a_{m'})$$

et $\{a_m\}$ est de Cauchy.

X est complet $\Rightarrow \exists (l_1, l_2, \dots, l_n) \in X$ tq

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (a_m, x_2, \dots, x_n) = (l_1, \dots, l_n)$$

$$\text{i.e. } d_1(a_m, l_1) + d_2(x_2, l_2) + \dots + d_n(x_n, l_n) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d_i(x_i, l_i) = 0 & \forall i = 2, \dots, n \\ d_1(a_m, l_1) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_i = l_i & \forall 2 \leq i \leq n \\ a_m \rightarrow l_1 \end{cases}$$

$\Leftarrow$ Supposons $(X_1, d_1), \dots, (X_n, d_n)$ sont complets.

Mg $(X = X_1 \times \dots \times X_n, D)$ est complet.

$\forall \{x_m\}_m = \{(x_{m,1}, \dots, x_{m,n})\}_m$ suite de Cauchy de X

Claim: $\forall 1 \leq i \leq n$, la suite $\{x_{m,i}\}_m$ est de Cauchy dans X_i .

En effet, $\{x_m\}_m$ Cauchy

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 \text{ tq } \forall m, m' > N, D(x_m, x_{m'}) < \varepsilon$$

$$\parallel \sum_{i=1}^n d_i(x_{m,i}, x_{m',i})$$

$$\Downarrow \forall i, d_i(x_{m,i}, x_{m',i}) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \{x_{m,i}\}_m \text{ Cauchy } \forall i$$

$$X_i \text{ complet} \Rightarrow \forall i, \exists l_i \in X_i, \text{ tq } x_{m,i} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} l_i$$

$$\stackrel{(Exo)}{\Rightarrow} x_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} l := (l_1, \dots, l_n) \in X \quad \square$$

Rq même énoncé, et la même preuve
 (Exo) pour $D = \left(\sum_{i=1}^n d_i(x_i, y_i)^p \right)^{1/p}$

ou $\max_i (d_i(x_i, y_i))$ etc.

Cor/Ex. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ est complet. $p=1, 2, \dots, \infty$

Cor . Tout fermé de $\mathbb{R}^n$, muni de la restriction de distance $\|\cdot\|_p$ est complet.

Espaces vectoriels (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) complets de dim ∞

Rq c'est important car on doit traiter des espaces des fonctions

Déf (Espaces vectoriels normés)

Soit V un $(\mathbb{R}\text{-e.v.})$
(ou $\mathbb{C}$)

Une norme sur V est une fonction

$$\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), $\forall v \in V$
(homogénéité)

$$\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$$

(inégalité triangulaire) $\forall v_1, v_2 \in V$

$$\|v_1 + v_2\| \leq \|v_1\| + \|v_2\|$$

$$\bullet \quad \|v\| = 0 \iff v = 0$$

- $(V, \|\cdot\|)$ est appelé un esp. vect. normé.
C'est naturellement un espace métrique avec
$$d(v_1, v_2) = \|v_1 - v_2\|$$

(Exo. (V, d) est un espace métrique)

Déf (Espace de Banach)

Un espace vectoriel normé $(V, \|\cdot\|)$
(on $\mathbb{C}$)
est de Banach si V est complet pour
la distance induite de $\|\cdot\|$.

Exemples. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ est un espace de Banach.

- $\ell^p = \left\{ (x_m)_m \mid \sum_{m=0}^{\infty} |x_m|^p \text{ converge} \right\}$
suite dans $\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$

muni de la norme

$$\|(x_m)_m\|_p = \left(\sum_{m=0}^{\infty} |x_m|^p \right)^{1/p} < \infty$$

$(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ est un espace vectoriel normé complet
Donc Banach.

• Soit (X, μ) un espace mesuré

$$L^p(X) := \left\{ f: X \rightarrow \begin{matrix} \mathbb{R} \\ \text{ou} \\ \mathbb{C} \end{matrix} \mid \int_X |f(x)|^p d\mu(x) < \infty \right\}$$

muni de la norme

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p} < \infty$$

$(L^p(X), \|\cdot\|_p)$ est un espace de Banach

Déf Soit V un $\mathbb{R}$ -e.v.
 $\mathbb{C}$ -e.v.
 Un produit scalaire sur V est une
 fonction $\underbrace{\text{produit hermitien}}_{\text{produit}}: V \times V \xrightarrow{\langle \cdot, \cdot \rangle} \begin{matrix} \mathbb{R} \\ \mathbb{C} \end{matrix}$
 $(v_1, v_2) \longmapsto \langle v_1, v_2 \rangle$

- ↳
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire / sesqui-lin.
 - Symétrique hermitien $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_2, v_1 \rangle$
 $\langle v_1, v_2 \rangle = \overline{\langle v_2, v_1 \rangle}$
 - positivité $\langle v, v \rangle \geq 0$
 et $\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$.

$$\underline{\text{Rq}}. (V, \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightsquigarrow (V, \|\cdot\|)$$

$$\text{avec } \|v\| := \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

Def Un $\mathbb{R}$ -espace de Hilbert est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire complet.
 (produit hermitien.)

Rq Hilbert est Banach.

Exemple. $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightsquigarrow (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$
 Hilbert Banach

• $\ell^2 = \{ (a_m) \mid \sum_{m=0}^{\infty} (a_m)^2 < \infty \}$ muni du produit :

$$\langle (a_m)_m, (b_m)_m \rangle := \sum_m \overline{a_m} b_m < \infty \quad (\text{Exo})$$

est un espace d'Hilbert.

• $L^2(X) = \{ f: X \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_X |f(x)|^2 d\mu(x) < \infty \}$

muni du produit

$$\langle f, g \rangle := \int_X \overline{f(x)} g(x) d\mu(x) < \infty \quad (\text{Exo})$$

est un espace Hilbert.

Q: V : esp de Banach/Hilbert
• Est-ce que toute fonction linéaire
 $V \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ est continue?

(pas vraie si $\dim = \infty$)

- {Toutes les fonctions linéaires continues} est un sujet central.

Complétion

Thm Soit (X, d) un espace métrique.

Alors $\exists$ un espace métrique complet (Z, D)
et une application injective

$$X \xrightarrow{i} Z$$

$$\text{tq } d(x_1, x_2) = D(i(x_1), i(x_2)), \forall x_1, x_2 \in X$$

$$(ie. D|_{X \times X} = d)$$

Preuve 1: par construction directe:

la complétion de $X := \{ \text{les suites de Cauchy} \} / \sim$
 $\uparrow$

$(x)_n$
 $\uparrow$
 $\mathbb{R}$

i
 $\cup$
 X

Dem suite de Cauchy $(x_n) \sim (y_n)$
 ssi $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 \text{ tq } \forall n \geq N$
 $d(x_n, y_n) < \varepsilon$

$$D((x_n), (y_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n)$$

densité : $(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n)_m$

Preuve : utilise la complétude de $\mathbb{R}$

Cor Soit (X, d) un espace métrique.

Alors $\exists$ un espace métrique complet (Y, D)
et une application injective

$$X \xhookrightarrow{\bar{i}} Y$$

$$\text{tq } d(x_1, x_2) = D(\bar{i}(x_1), \bar{i}(x_2)), \forall x_1, x_2 \in X$$

et $\bar{i}(X)$ est dense dans Y .

- De plus un tel $(Y, D, \bar{i})$ est

unique à isométrie unique près :

si $(Y', D, \bar{i}' : X \hookrightarrow Y')$ vérifiant les

même propriété

Alors $\exists !$ isométrie $Y \xrightarrow{\phi} Y'$

$$\text{tq } \phi \circ \bar{i} = \bar{i}'$$

Preuve Soit $(Z, D), \bar{i} : X \hookrightarrow Z$

Comme dans le thm.

On pose $Y = \overline{\bar{i}(X)}^Z$: l'adhérence
de X dans Z .

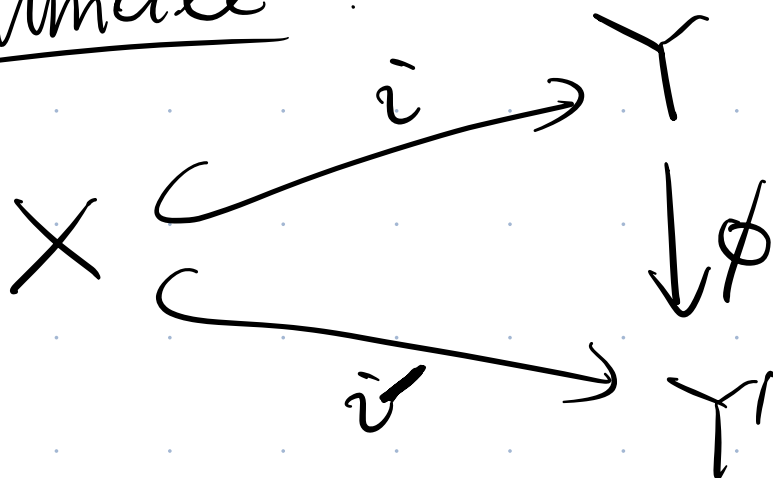
munie de la restriction de D .

On a $\bar{i}: X \hookrightarrow Y$

$$d(x_1, x_2) = D(\bar{i}(x_1), \bar{i}(x_2)) \quad \checkmark$$

- $Y = \overline{\bar{i}(X)} \Rightarrow \bar{i}(X)$ est dense dans Y
- (Y, D) est complet car il est fermé dans Z .

Unicité



$\forall y \in Y$, comme $\bar{i}(X)$ est dense dans Y
 $\exists$ une suite $\{x_m\}_m$ dans X

$$\begin{aligned}
 & \text{tg } \bar{i}(x_m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} y \\
 & \Rightarrow \{\bar{i}(x_m)\} \text{ Cauchy} \Rightarrow \{x_m\}_m \text{ Cauchy} \Rightarrow \{\bar{i}'(x_m)\} \text{ Cauchy}
 \end{aligned}$$

On définit $\phi = Y \longrightarrow Y'$

$$y \longmapsto \lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{i}'(x_m)$$

Exo: Vérifier que ϕ est bien définie.

- ϕ est isométrique:

$$D_Y(y_1, y_2) \stackrel{\text{Exo}}{\underset{\substack{\text{(inégalité} \\ \text{triang.)}}}{=}} \lim_{m \rightarrow \infty} d(x_m, x'_m) \stackrel{\text{même}}{=} D_{Y'}(\phi(y_1), \phi(y_2))$$

où $\begin{cases} \tilde{i}(x_m) \rightarrow y_1 \\ \tilde{i}(x'_m) \rightarrow y_2 \end{cases}$ dans Y .

- On construit $Y' \xrightarrow{\Psi} Y$ par exactement le même argument

on vérifie que par construction

$$\begin{cases} \phi \circ \overline{\Psi}|_{\tilde{i}(x)} = \text{id}|_{\tilde{i}(x)} \\ \overline{\Psi} \circ \phi|_{\tilde{i}(x)} = \text{id}|_{\tilde{i}(x)} \end{cases}$$

Or ϕ et Ψ sont isométriques $\Rightarrow$ continues

$$\Rightarrow \phi \circ \Psi = \text{id}_Y \text{ et } \Psi \circ \phi = \text{id}_X$$

Exo: Deux fonctions continues qui coïncident sur un sous-espace dense coïncident.

Def "la" donnée $(Y, D, i: X \hookrightarrow Y)$ est appelée "la" complétion de (X, d) . □

Exemple :

• $(\mathbb{Q}, |\cdot|) \xrightarrow{\text{complétion}} \mathbb{R}$

• $(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)$, $|x|_p = p^{-v_p(x)}$

où $v_p\left(\frac{a}{b}\right) := v_p(a) - v_p(b)$

où $v_p(n) = \ell$ où $n = p^\ell p_1 \dots$

(eg. $v_2(10) = 1$, $v_2(8) = 3$, $v_2(\frac{1}{8}) = -3$ etc)

$(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)$ completion $\mathbb{Q}_p$ nb p-adiques

$$\left\{ \frac{1}{p^n} (a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots) \mid a_i \in \mathbb{Z}, 0 \leq a_i < p \right\}$$

$\sim$