Cours 2

Déf (Continuité)

Soient X, Y deux espaces topologiques,
Une application $f : X \longrightarrow Y$ est
dit continue si $\forall U$ ouvert de Y, $f^{-1}(U)$ est ouvert dans X

Rq f est continue
$\Leftrightarrow$ $\forall F$ fermé de Y, $f^{-1}(F)$ est fermé dans X.

Preuve : $\boxed{\Rightarrow}$ F fermé $\Leftrightarrow$ $Y \setminus F$ est ouvert dans Y

$\Rightarrow$ $f^{-1}(Y \setminus F)$ est ouvert dans X

$$f^{-1}(Y \setminus F) = X \setminus f^{-1}(F)$$

$\Leftrightarrow$ $f^{-1}(F)$ est fermé dans X

$\boxed{\Leftarrow}$ (Exo)

Prop La composition de deux applications continues est continue

Preuve : $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ app. $\mathcal{C}^0$ entre esp. top.

Mq $g \circ f$ est continue.

$\forall U$ ouvert Z

$$(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$$

g continue $\Rightarrow$ $g^{-1}(U)$ ouvert dans Y

$\xRightarrow{f \text{ continue}}$ $f^{-1}(g^{-1}(U))$ ouvert dans X

$\Rightarrow$ $(g \circ f)^{-1}(U)$ ouvert dans X. $\square$

__Exemples__

- X : espace top. discret ; Y : espace top.

alors toute application $f : X \longrightarrow Y$ est continue.

(__Preuve__ : $\forall U$ ouvert de Y
$f^{-1}(U)$ est ouvert car X est discret).

- X espace top ; Y : espace top. grossier

alors toute application $f : X \longrightarrow Y$ est continue.

(Exo)

- X : ensemble

$\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$: deux topologies sur X

alors l'application $f : (X, \mathcal{T}_1) \longrightarrow (X, \mathcal{T}_2)$

$$x \longmapsto x$$

est continue $\iff \mathcal{T}_1 \succ \mathcal{T}_2$.

(Preuve : f continue

$\iff \forall U \in \mathcal{T}_2,\ U = f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_1$

$\iff \mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1 \iff \mathcal{T}_2 \prec \mathcal{T}_1$)

- Soient (X, d_X), (Y, d_Y) deux espaces métriques

On munit X, Y de ses topologiques induites de distance

Soit $f : X \to Y$ une application.

Alors f est continue

$\iff \forall x \in X,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ tq

$$f(\mathbb{B}_{d_X}(x, \delta)) \subset \mathbb{B}_{d_Y}(f(x), \varepsilon).$$

$\left(\text{i.e. } \forall x' \in \mathbb{B}_{d_X}(x, \delta),\ f(x') \in \mathbb{B}_{d_Y}(f(x), \varepsilon)\right)$.

Preuve :

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons f est continue.

$\forall x \in X,\ \forall \varepsilon > 0$.

On considère $U := \mathbb{B}_{d_Y}(f(x), \varepsilon)$ qui est un ouvert de Y.

(Rappel : Dans un espace métrique (W, d) une boule ouverte $\mathbb{B}_d(w, r)$ est ouverte.

Raison : $\forall w' \in \mathbb{B}_d(w, r)$, i.e. $d(w, w') < r$

Affirmation : $\mathbb{B}_d(w', \underbrace{r - d(w, w')}_{>0}) \subset \mathbb{B}_d(w, r)$.

En effet, $\forall w'' \in \mathbb{B}_d(w', r - d(w, w'))$

on a $d(w'', w') < r - d(w,w')$

$\Rightarrow d(w'',w') + d(w,w') < r$

$\leq$

$d(w,w'')$

$\Rightarrow w'' \in \mathbb{B}_d(w,r)$

$\left.\begin{array}{l} f \text{ continue} \\ \mathbb{B}_{d_Y}(f(x),\varepsilon) \text{ est ouverte} \end{array}\right\} \Longrightarrow f^{-1}\left(\mathbb{B}_{d_Y}(f(x),\varepsilon)\right)$ est ouvert dans X.

$x \in f^{-1}\left(\mathbb{B}_{d_Y}(f(x),\varepsilon)\right)$

$\Rightarrow \exists\, \delta > 0$, tq $\mathbb{B}_{d_X}(x,\delta) \subset f^{-1}\left(\mathbb{B}_{d_Y}(f(x),\varepsilon)\right)$

$\Rightarrow f\left(\mathbb{B}_{d_X}(x,\delta)\right) \subset \mathbb{B}_{d_Y}(f(x),\varepsilon)$.

i.e. $\forall x' \in \mathbb{B}_{d_X}(x,\delta)$, $f(x') \in \mathbb{B}_{d_Y}(f(x),\varepsilon)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ $\forall\, U$ ouvert de Y

<u>Mq</u> $f^{-1}(U)$ ouvert dans X

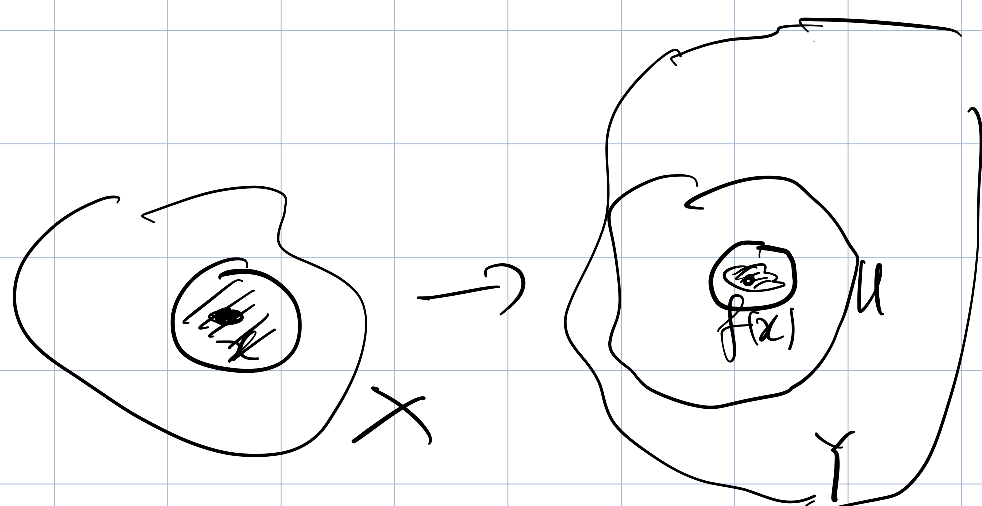
$\forall x \in f^{-1}(U)$, $f(x) \in U$

U ouvert $\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0$, tq $\mathbb{B}_{d_Y}(f(x), \varepsilon) \subset U$

hyp. $\Rightarrow \exists\, \delta > 0$ tq $f(\mathbb{B}_{d_X}(x, \delta)) \subset \mathbb{B}_{d_Y}(f(x), \varepsilon)$

$\Rightarrow \mathbb{B}_{d_X}(x, \delta) \subset f^{-1}(\mathbb{B}_{d_Y}(f(x), \varepsilon)) \subset f^{-1}(U)$

$\Rightarrow f^{-1}(U)$ est ouvert



$\square$

- $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{+} \mathbb{R}^n$ est continue

$(\underline{x}, \underline{y}) \longmapsto \underline{x} + \underline{y}$

où $\mathbb{R}^n$ ~~est~~ muni de la top. euclid.

(on peut le vérifier par ε-δ)

- $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{\quad \cdot \quad} \mathbb{R}$ est continue

- $\sin, \cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

  $e : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

  $x \longmapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$

  $\vdots$

<u>Déf</u> (homéomorphisme)

Soit $f : X \longrightarrow Y$ une app. $\mathcal{C}^0$ entre esp. top.

f est dite un <u>homéomorphisme</u> si

- f est bijective
- f^{-1} est continue.

⚠ f continue et bijective

$\not\Longrightarrow$ f^{-1} est continue.

Exemple :

X : ensemble

$\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$: deux topologies sur X

alors l'application $f : (X, \mathcal{T}_1) \longrightarrow (X, \mathcal{T}_2)$

$x \longmapsto x$

est continue $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{T}_1 \succ \mathcal{T}_2$.

Par contre : f^{-1} continue $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{T}_2 \succ \mathcal{T}_1$.

Déf Une application continue $f : X \to Y$

- est ouverte si $\forall U$ ouvert de X, $f(U)$ est ouvert de Y.
- est fermée si $\forall F$ fermé de X, $f(F)$ est fermé de Y.

Lemme Soit $f : X \to Y$

Une application continue bijective.

Alors

(i) f est homéomorphisme

$\Longleftrightarrow$ (ii) f est ouverte

$\Longleftrightarrow$ (iii) f est fermée.

Preuve :

(i) ⇒ (ii) Comme f^{-1} est continue, $\forall U$ ouvert X

$f(U) = (f^{-1})^{-1}(U)$ est ouvert de Y

(ii) ⇒ (iii) $\forall F \subset X$ fermé

$\Rightarrow X \setminus F$ ouvert

$\Rightarrow f(X \setminus F)$ ouvert

$$f(X \setminus F) = Y \setminus f(F)$$

$\Rightarrow f(F)$ fermé.

(iii) ⇒ (i) Mq f^{-1} est continue

$\forall F$ fermé de X

$(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$ fermé par (iii)

$\Rightarrow f^{-1}$ continue. $\square$

§ Base de Topologie

- Topologie euclidienne sur $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$

Un sous-ensemble U de $\mathbb{R}$ est ouvert

$\Leftrightarrow \forall x \in U, \quad \exists r > 0, \text{ tq }]x-r, x+r[\subset U$

Conséquence : U est ouvert dans $\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow U = \bigcup$ intervalles ouverts

- Topologie euclidienne sur $\mathbb{R}^n$

$U \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert

$$\Leftrightarrow \quad U = \bigcup_{i \in I} B(x_i, r_i) \quad \text{où } x_i \in U, \ r_i > 0$$

Déf (Base de topologie)

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique

Un sous-ensemble $\mathcal{B}$ de $\mathcal{T}$ est dit une base de $\mathcal{T}$ si $\forall U \in \mathcal{T} \ \exists (B_i)_{i \in I}$ avec $B_i \in \mathcal{B}$ tq $U = \bigcup_{i \in I} B_i$

<u>Autrement dit</u>, $\forall U \in \mathcal{T}$, $\forall x \in U$
$\exists\, B \in \mathcal{B}$ tq $x \in B \subset U$.

<u>Rq</u> : En particulier $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$.

<u>Exemple</u>.

- $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{euclid})$ admet les bases suivantes
  - $\{\mathbb{B}_{d_2}(x, r)\}_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ r > 0}}$
  - $\{\mathbb{B}_{d_p}(x, r)\}_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ r > 0}}$ $\quad p = 1, 2, \dots, \infty$
  - $\{\mathbb{B}_{d_p}(x, r)\}_{\substack{x \in \mathbb{Q}^n \\ r \in \mathbb{Q}_{>0}}}$
- $(X, \mathcal{T}_{disc})$ admet la base suivante :
  $$(\{x\})_{x \in X}$$
  car $\forall U \subset X$, $U = \bigcup_{x \in U} \{x\}$.
- (X, d) espace métrique (muni de la top. induite) admet une base de top. $\mathcal{B} = \{\mathbb{B}_d(x, r)\}_{\substack{x \in X \\ r > 0}}$

<u>Terminologie</u> : Si $\mathcal{B}$ est une base de la topologie sur X, on dit que la topologie est engendrée par $\mathcal{B}$.

<u>Prop</u> Soit X un ensemble.
Une collection $\mathcal{B}$ de sous-ensembles de X est une base d'une topologie de X.
ssi (i) $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$

(ii) $\forall B, B' \in \mathcal{B}, \exists (B_i)_{i \in I}$ avec $B_i \in \mathcal{B}$

tq $B \cap B' = \bigcup_{i \in I} B_i$.

<u>Preuve</u>.

- si $\mathcal{T}$ est une top. ayant $\mathcal{B}$ comme une base alors (i) (ii) ✓

- On <u>définit</u> un sous-ens U de X est ouvert si $U = \bigcup_{B \subset U} B$.

Autrement-dit $\mathcal{T} := \left\{ \bigcup_{i \in I} B_i \;\middle|\; \begin{array}{l} I \text{ ensemble} \\ B_i \in \mathcal{B} \end{array} \right\}$

Mq $\mathcal{T}$ est une topologie

- $\emptyset \in \mathcal{T}$; $X \in \mathcal{T}$ par (i)
- Soit $U_j \in \mathcal{T}$, $j \in J$

$$\Rightarrow \forall j \in J,\ U_j = \bigcup_{i \in I_j} B_{ij} \qquad B_{ij} \in \mathcal{B}$$

$$\bigcup_{j \in J} U_j = \bigcup_{j \in J} \bigcup_{i \in I_j} B_{ij} \in \mathcal{T}.$$

- Il suffit de mq $\forall U, V \in \mathcal{T}$, $U \cap V \in \mathcal{T}$

$$U, V \in \mathcal{T} \Rightarrow U = \bigcup_{i \in I} B_i, \quad V = \bigcup_{j \in J} B_j$$

$$\Rightarrow U \cap V = \left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) \cap \left(\bigcup_{j \in J} B_j\right)$$

$$= \bigcup_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (B_i \cap B_j)$$

$$\underline{\underline{(ii)}} \Rightarrow \forall i, j, \quad B_i \cap B_j = \bigcup_{k \in \Lambda_{ij}} B_{ijk}$$

avec $B_{ijk} \in \mathcal{B}$

$$\Rightarrow U \cap V = \bigcup_{\substack{i \in I \\ j \in J}} \bigcup_{k \in \Lambda_{ij}} B_{ijk} \in \mathcal{T}$$

$\square$