Cours 3

(Suite de base de topologie)

<u>Exemple</u> $(\mathbb{R}^n, d)$ $d :=$ la distance induite par une norme L_p.

$$\mathcal{B} := \left\{ B_d(x,r) \;\middle|\; \begin{matrix} x \in \mathbb{R}^n \\ r > 0 \end{matrix} \right\}$$ satisfait (i)(ii)

$\Rightarrow$ $\mathcal{B}$ définit une topologie, à savoir, la top. euclid.

<u>Prop</u> Soit $\mathcal{B}_1$ une base de top. $\mathcal{T}_1$

——— $\mathcal{B}_2$ ——— $\mathcal{T}_2$

sur même ensemble X.

Alors $\mathcal{T}_1 > \mathcal{T}_2$ ssi $\forall B \in \mathcal{B}_2$, $\exists (B_i)_{i \in I}$ dans $\mathcal{B}_1$ tq $B = \bigcup_{i \in I} B_i$.

En particulier,

$$\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2 \iff \begin{cases} \forall B \in \mathcal{B}_2,\ \exists (B_i)_{i \in I} \text{ dans } \mathcal{B}_1 \text{ tq } B = \bigcup_{i \in I} B_i. \\ \\ \forall B \in \mathcal{B}_1,\ \exists (B_i)_{i \in I} \text{ dans } \mathcal{B}_2 \text{ tq } B = \bigcup_{i \in I} B_i. \end{cases}$$

Preuve :

$\boxed{\Rightarrow}$ si $\mathcal{T}_1 \succ \mathcal{T}_2$

$$\forall B \in \mathcal{B}_2 \subset \mathcal{T}_2 \Rightarrow B \in \mathcal{T}_1$$

$\mathcal{B}_1$ est une base de $\mathcal{T}_1 \Rightarrow B = \bigcup_{i \in I} B_i$

avec $B_i \in \mathcal{B}_1$.

$\boxed{\Leftarrow}$. $\forall U \in \mathcal{T}_2$

$\mathcal{B}_2$ est une base de $\mathcal{T}_2 \Rightarrow \exists (V_j)_{j \in J}$ avec

$V_j \in \mathcal{B}_2$

tq $U = \bigcup_{j \in J} V_j$

l'hyp $\Rightarrow \forall j \in J, \ \exists (B_{ij})_{i \in I_j}$ dans $\mathcal{B}_1$

$$\text{tq } V_j = \bigcup_{i \in I_j} B_{ij}$$

$$\Rightarrow U = \bigcup_{j \in J} V_j = \bigcup_{j \in J} \bigcup_{i \in I_j} B_{ij}$$

$\Rightarrow U \in \mathcal{T}_1$ $\square$

§ Constructions d'espace topologiques

<u>Question</u> : Comment construire de nouveaux espaces topologiques à partir des anciens ?

<u>Idées</u> :
- "Hériter" la top. à un sous-espace.
- produit
- disjoints
- quotient.
- ⋮

Sous-espace

~~Def~~ ~~Prop~~ : Soit X un espace topologique

soit $A \subset X$ un sous-ensemble.

Alors
$$\mathcal{T} := \{ U \cap A \mid U \text{ ouvert de } X \}$$ est

une topologie de A, appellée la **top. induite** sur A

Preuve (i) $\emptyset \cap A = \emptyset$; $X \cap A = A$

donc $\emptyset, A \in \mathcal{T}$

(ii) Soit $\{U_i \cap A\}_{i \in I}$ une collection d'élé de $\mathcal{T}$

$$\bigcup_{i \in I} (U_i \cap A) = \Big(\underbrace{\bigcup_{i \in I} U_i}_{\text{ouvert dans } X} \Big) \cap A \in \mathcal{T}$$

(iii) Soient $U \cap A$, $V \cap A \in \mathcal{T}$

où U, V sont ouverts de X

$$(U \cap A) \cap (V \cap A) = (\underbrace{U \cap V}_{\text{ouvert dans } X}) \cap A \in \mathcal{T}.$$

$\square$

<u>Rq</u> (Exo) la topologie induite sur A est la topologie <u>la moins fine</u> sur A tq l'inclusion naturelle

$$A \xhookrightarrow{i} X$$

est continue.

$$\left(i^{-1}(U) = U \cap A \right)$$

<u>Lemme</u> $X \xrightarrow{f} Y$ appl. continue entre esp. top.
Soit A un sous-ensemble de Y.
si $\mathrm{Im}(f) \subset A$ alors

$$\begin{aligned} \cancel{X} &\xrightarrow{g} A \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

est continue si on munit A de la top. induite de Y.

Preuve: Soit $U \cap A$ un ouvert de A où U est un ouvert de Y.

$$g^{-1}(U \cap A) = \{ x \in X \mid f(x) \in U \cap A \}$$
$$= \{ x \in X \mid f(x) \in U \}$$
$$= f^{-1}(U)$$

$\overset{f \text{ continue}}{\Longrightarrow}$ $g^{-1}(U \cap A) = f^{-1}(U)$ ouvert

$\Longrightarrow$ g est continue. $\square$

Lemme Soit $X \xrightarrow{f} Y$ une app. $\mathcal{C}^0$

si $A \subset X$ sous-espace

alors $A \xrightarrow{f|A} Y$ est continue

(Exo: démontrer directement.)

Preuve : $f|_A = f \circ i$

$f|_A : A \xrightarrow{i} X \xrightarrow{f} Y$

$\left.\begin{array}{l} f \text{ continue} \\ i \text{ continue} \end{array}\right\} \Longrightarrow f|_A$ continue $\square$

Exemple.

- $\mathbb{R}$: muni de la top. euclid.
- $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$.

la top. induite sur $\mathbb{Z}$ est la topologie discrète.

- $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

la topologie induite sur $\mathbb{Q}$ n'est pas discrète.

Prop Soit $\mathcal{B}$ une base d'une topologie sur X

Soit $A \subset X$

alors la topologie induite sur A admet une base $\mathcal{B}_A := \{ B \cap A \mid B \in \mathcal{B} \}$.

<u>Preuve</u> : • $\forall B \cap A \in \mathcal{B}_A$, $B \cap A$ est bien ouvert dans A

• Soit U ouvert de A

$\Rightarrow \exists V$ ouvert de X tq $U = V \cap A$

$\mathcal{B}$ est une base de topologie sur X

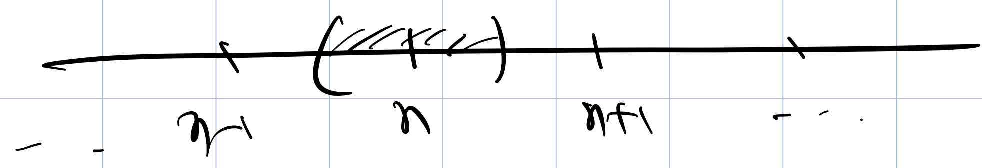
$\exists (B_i)_{i \in I}$ dans $\mathcal{B}$ tq $V = \bigcup_{i \in I} B_i$

$$\Rightarrow \quad U = V \cap A = \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) \cap A = \bigcup_{i \in I} \underbrace{(B_i \cap A)}_{\in \mathcal{B}_A}.$$

$\Rightarrow \mathcal{B}_A$ est une base. $\square$

• <u>Revenons à l'exemple $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$</u> :

On voit que les singletons de $\mathbb{Z}$ forment une base de topologie induite



$\Rightarrow$ la top. sur $\mathbb{Z}$ est discrète.

- la topologie induite sur $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ n'est pas discrète car :

  un ouvert contenant $0 \in \mathbb{Q}$ est de la forme $U \cap \mathbb{Q}$ pour un U ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0

  $\Rightarrow \exists\, a < b \in \mathbb{R}$ tq $0 \in \left]a,b\right[\subset U$

  $\Rightarrow U \cap \mathbb{Q} \supset \left]a,b\right[\cap \mathbb{Q} \supsetneq \{0\}$

  Donc $\{0\}$ n'est pas ouvert dans $\mathbb{Q}$.

§ Union disjoint :

Soient X, Y deux espaces ~~topologiques~~.

$X \sqcup Y$ est muni d'une topologie naturelle :

$$\mathcal{T}_{X \sqcup Y} = \left\{ U \sqcup V \;\middle|\; \begin{array}{l} U \text{ ouvert de } X \\ V \text{ ouvert de } Y \end{array} \right\}$$

Exo :

- $\mathcal{T}_{X \sqcup Y}$ est une topologie.
- $\begin{array}{rcl} X & \xrightarrow{i_1} & X \sqcup Y \\ x & \longmapsto & x \end{array}$ et $\begin{array}{rcl} Y & \xrightarrow{i_2} & X \sqcup Y \\ y & \longmapsto & y \end{array}$ sont continues.
- $\mathcal{T}_{X \sqcup Y}$ est la topologie la plus fine sur $X \sqcup Y$ tq i_1 et i_2 sont continues.
- la topologie induite sur le sous-espace X de $X \sqcup Y$ est la top. originale de X
- Une application $X \sqcup Y \xrightarrow{F} Z$ est continue $\Longleftrightarrow$ $F|_X$ et $F|_Y$ sont continues.

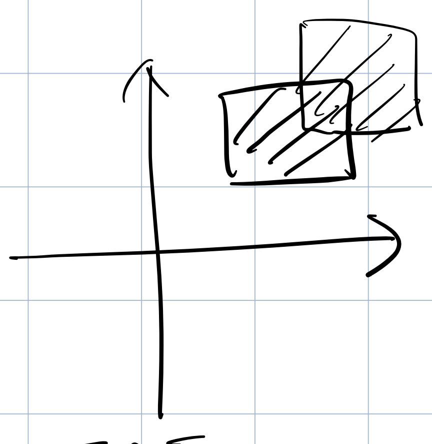
(*) Généraliser tout pour une famille d'espaces topologiques $(X_i)_{i\in I}$.

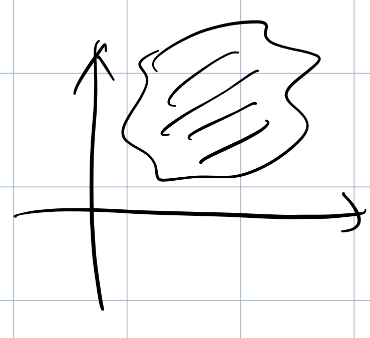
§ Topologie produit

Soient X, Y deux espaces topologiques.
On veut construire une topologie sur $X\times Y$.

$$X\times Y = \left\{ (x,y) \;\middle|\; \begin{array}{l} x\in X \\ y\in Y \end{array} \right\}$$

$$\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^1 \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^2$$





Idée : Utilise base de topologie.

Construction générale

X, Y : espaces topologiques.

On considère

$$\mathcal{B} := \left\{ U \times V \;\middle|\; \begin{matrix} U \text{ ouvert de } X \\ V \text{ ouvert de } Y \end{matrix} \right\}$$

Lemme $\mathcal{B}$ vérifie

(i) $\displaystyle\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = X \times Y$

(ii) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$

Preuve :

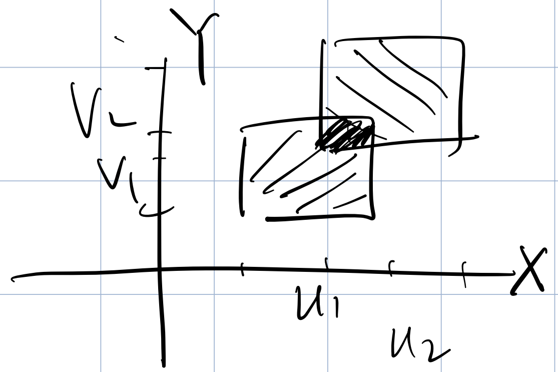
(i) $X \times Y \in \mathcal{B}$ ✓

(ii) Soient $B_1 = U_1 \times V_1$ dans $\mathcal{B}$
$B_2 = U_2 \times V_2$

où $\begin{cases} U_1, U_2 \text{ ouverts de } X \\ V_1, V_2 \text{ ——— } Y. \end{cases}$

$$B_1 \cap B_2 = (U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2)$$
$$= \left\{ (x,y) \;\middle|\; \begin{matrix} x \in U_1, \; y \in V_1 \\ x \in U_2, \; y \in V_2 \end{matrix} \right\}$$

$$= (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$$



$\square$

<u>Cor</u> $\mathcal{B} = \left\{ U \times V \;\middle|\; \begin{matrix} U \text{ ouvert } X \\ V \text{ ouvert } Y \end{matrix} \right\}$

est une base d'une topologie sur $X \times Y$.

Déf Cette topologie sur $X \times Y$ est appelée la <u>topologie produit</u> de $X \times Y$.

<u>Lemme</u> X, Y : espaces top.
$X \times Y$: muni de la top. produit

alors

$$X \times Y \xrightarrow{p_1} X$$

$$X \times Y \xrightarrow{p_2} Y$$

sont continues.

Preuve : $p_1^{-1}(U) = U \times Y \in \mathcal{B}$ donc ouvert

$p_2^{-1}(V) = X \times V \in \mathcal{B}$ ———

$\square$

Rq la top. produit sur $X \times Y$ est la topologie la moins fine sur $X \times Y$ tq p_1, p_2 soient continues

Raison : p_1 continue $\Rightarrow$ $U \times Y$ ouvert $\forall U$ ouvert

p_2 continue $\Rightarrow$ $X \times V$ ——— $\forall V$ ouvert

$\Rightarrow (U \times Y) \cap (X \times V) = U \times V$ est ouvert $\forall U \subset X$ ouvert $\forall V \subset Y$ ouvert

$\Rightarrow \forall B \in \mathcal{B}$ est ouvert

$\Rightarrow$ la topologie produit est la moins fine

Généralisation

Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'esp. topologiques

Déf (Topologie boîte)

$$\mathcal{B}^{\text{boîte}} := \left\{ \prod_{i \in I} U_i \;\middle|\; U_i \text{ ouvert dans } X_i \ \forall i \in I \right\}$$

est une base de topologie sur $\prod_{i\in I} X_i$
(Exo)
On appelle cette topologie la top. boîte.

Déf (Topologie produit)

$$\mathcal{B} := \left\{ \prod_{i\in I} U_i \;\middle|\; \begin{array}{l} U_i \text{ ouvert dans } X_i \quad \forall i\in I \\ \left|\{i\in I \mid U_i \subsetneq X_i\}\right| < \infty \end{array} \right\}$$

Lemme $\mathcal{B}$ est une base d'une topologie

Preuve: (i) $\prod_{i\in I} X_i \in \mathcal{B}$

(ii) $\forall \prod_{i\in I} U_i , \prod_{i\in I} V_i \in \mathcal{B}$

$$\left(\prod_{i\in I} U_i\right) \cap \left(\prod_{i\in I} V_i\right) = \prod_{i\in I} (U_i \cap V_i) \in \mathcal{B}$$

$\square$

Déf Cette top. sur $\prod_{i\in I} X_i$ est appelée la top. produit de $\prod_{i\in I} X_i$.

Rq Pour un produit fini $X_1 \times \cdots \times X_n$

la topologie boîte = la top. produit.

= la topologie engendrée par la base :

$$\mathcal{B} = \{ U_1 \times \cdots \times U_n \mid U_i \subset X_i \text{ ouvert } \forall i = 1, \ldots, n \}$$

Exo. X, Y, Z trois esp. top, alors sous l'identification $X \times (Y \times Z) = X \times Y \times Z = (X \times Y) \times Z$ les trois topologies coïncident.

Exemple / Prop :

La topologie euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ est la topologie produit construite à partir de la topologie euclidienne sur $\mathbb{R}^1$.

Preuve : Sur le produit $\underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n}$ la top. produit est engendrée par la base

$\mathcal{B} = \{ U_1 \times \cdots \times U_n \mid U_i \subset \mathbb{R} \text{ ouvert} \}$.

- $\forall\, U_1 \times \cdots \times U_n \in \mathcal{B}$ est bien ouvert dans $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{\text{usuelle}})$

<u>Raison</u> : $\forall (x_1, \dots, x_n) \in U_1 \times \cdots \times U_n$

i.e. $x_i \in U_i \Rightarrow$ on a $x_i \in]x_i - r_i, x_i + r_i[\subset U_i$ $\forall i$

$r := \min\limits_{1 \le i \le n} (r_i)$

$\Rightarrow B_{L_\infty}((x_1, \dots, x_n), r) \subset \prod\limits_{i=1}^{n} U_i$.

-