Cours 4

Prop Soient $(X_1, d_1), \dots, (X_n, d_n)$ des esp. métriques

Alors la topologie produit sur $X_1 \times \dots \times X_n$

coïncide avec la topologie induite par la distance d sur $X_1 \times \dots \times X_n$ définit par

$$d\big((x_1, \dots, x_n), (x_1', \dots, x_n')\big) := \max_{1 \leq i \leq n} \{ d_i(x_i, x_i') \}.$$

(même topologie si on utilise
$$d(\underline{x}, \underline{x}') := \left(\sum_i d_i(x_i, x_i')^p \right)^{1/p}.)$$

Preuve : comme dans la preuve de $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_{Eucl.})$
$$\cong (\mathbb{R}^1, \mathcal{T}_{Eucl}) \times \dots \times (\mathbb{R}^1, \mathcal{T}_{Eucl})$$

Mq : ① Une boîte $U_1 \times \dots \times U_n$ de $X_1 \times \dots \times X_n$ est ouvert pour la tp. induite par d.

② Une boule ouverte de $(X_1 \times \dots \times X_n, d)$ est une union des boîtes.

(Exo : terminer la preuve) $\square$

§ Intérieure, Adhérence, Densité

Soit X un esp. top.,

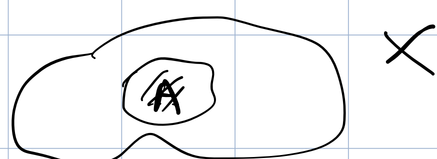
Déf Soit A un sous-espace de X.

- $\mathring{A} := \bigcup_{\substack{U \subset A \\ U \text{ ouvert}}} U$ l'intérieure de A.

- $\overline{A} = \bigcap_{\substack{F \supset A \\ F \text{ fermé}}} F$ l'adhérence de A.

Lemme • $\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$

- $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert de X contenant dans A
- $\overline{A}$ ——— petit fermé de X qui contient A.



Lemme

- $X \setminus \mathring{A} = \overline{X \setminus A}$

- $X \setminus \overline{A} = (X \setminus A)^\circ$

Preuve: $X \setminus \mathring{A} = X \setminus \bigcup_{\substack{U \subset A \\ U \text{ ouvert}}} U = \bigcap_{\substack{U \subset A \\ U \text{ ouvert}}} (X \setminus U)$.

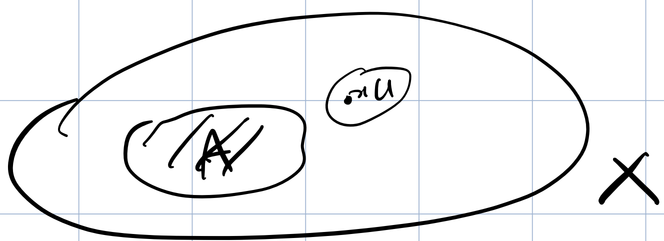
$$= \bigcap_{\substack{F \text{ fermé} \\ F \supset X\setminus A}} F = \overline{X\setminus A}.$$

$\square$.

<u>Rq</u> : $x \in \overline{A} \Leftrightarrow \forall$ voisinage ouvert de x intersecte A.

<u>Raison</u> : $x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \notin (X\setminus A)^\circ$

- $x \in (X\setminus A)^\circ \Leftrightarrow \exists$ ouvert U contenant x tq $\underbrace{U \subset X\setminus A}_{\Updownarrow \; U\cap A = \emptyset}$.



<u>Exemples</u>

- $\emptyset^\circ = \overline{\emptyset} = \emptyset$; $X^\circ = \overline{X} = X$.
- U ouvert $\Leftrightarrow U^\circ = U$; F fermé $\Leftrightarrow \overline{F} = F$.
- $a<b$, $[a,b]^\circ =]a,b[$; $[a,b[^\circ =]a,b[$.

  $\overline{]a,b[} = [a,b]$; $\overline{]a,b]} = [a,b]$.

- $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$. car $\mathbb{Z}$ est fermé.

  $\mathring{\mathbb{Z}} = \emptyset$

- $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}^\circ = \emptyset$

Déf $A \subset X$ sous-ensemble d'un esp. top.

On dit que A est <u>dense</u> si $\bar{A} = X$

——————— <u>maigre</u> si $\mathring{A} = \emptyset$.

Rq A est dense dans X ssi $\forall U$ ouvert de X ($U \neq \emptyset$), $U \cap A \neq \emptyset$.

Ex. · $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Z}$ sont maigres dans $\mathbb{R}$

· $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Déf Un espace topologique X est dit <u>séparable</u>

si X admet un sous-ensemble dense et dénombrable

Exemple : $\mathbb{R}$ est séparable ($\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ dense et dénombrable)

Prop $X_1, \dots, X_n$ séparables

$\Rightarrow$ $X_1 \times \dots \times X_n$ est séparable.

Preuve : Soient $Y_i \subset X_i$ denses et dénombrable ($i = 1, \dots, n$)

Mq $Y_1 \times \dots \times Y_n$ est dense dans $X_1 \times \dots \times X_n$.

Preuve : Soit $U \neq \emptyset$ un ouvert de $X_1 \times \dots \times X_n$.

On a alors $U_i \overset{\neq \emptyset}{\subset} X_i$ ouvert tq

$$U \supset U_1 \times \dots \times U_n$$

Comme $U_i \cap Y_i \neq \emptyset$ car Y_i dense

$\Rightarrow (U_1 \times \dots \times U_n) \cap (Y_1 \times \dots \times Y_n) = (U_1 \cap Y_1) \times \dots \times (U_n \cap Y_n) \neq \emptyset$

$\Rightarrow U \cap (Y_1 \times \dots \times Y_n) \neq \emptyset.$

$\Rightarrow Y_1 \times \dots \times Y_n$ dense.

De plus $Y_1 \times \dots \times Y_n$ est dénombrable. car produit fini des dénomb.

$\Rightarrow X_1 \times \dots \times X_n$ séparable

$\square$

__Exemple__ $\mathbb{R}^n$, ...

§ Axiomes de séparation et de dénombrabilité

Déf (Système fondamental de voisinages d'un pt)

Soit $x \in X$ un esp. top.

Une collection $\{U_i\}_{i \in I}$ des ouverts contenant x (i.e. voisinages ouverts de x)

est appellée un systèmo fondamental de voisinages pour x

si $\forall U$ voisinage ouvert de x

$\exists i \in I$ tq $U_i \subset U$.

Déf (C1) Un espace top. X est (C1)

si $\forall x \in X$, il existe un système fond.

de voisinage dénombrable $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$

Exemple $x \in \mathbb{R}^n$ admet le système fond. de vois.

Suivant $\{B(x,r)\}_{r\in\mathbb{Q}_{>0}}$.

Déf (C2) X est appelé (C2) si X admet une base de topologie dénombrable.

Prop $(C2) \Rightarrow (C1)$

Preuve. Soit $\mathcal{B} = \{U_i\}_{i\in I}$ une base de topologie dénombrable. (I dénble)

$\forall x \in X$

Mq $\mathcal{S} := \{U_i \in \mathcal{B} \mid U_i \ni x\}$ est un système fondamental de voisinage de x.

En effet, $\forall V$ voisinage ouvert de x.

$\mathcal{B}$ est une base $\Rightarrow \exists U_i \in \mathcal{B}$ contenant x et $U_i \subset V$

$\Rightarrow U_i \in \mathcal{S}$ $\square$

Prop $(C2) \Rightarrow$ séparable.

Preuve : Soit $\mathcal{B} = \{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ une base de top dénombrable.

On choisit $\forall i \geq 1$, $x_i \in U_i$ un point.
alors $S := \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ est un sous-ensemble dénomb.

Mq S est dense :
$\forall U$ ouvert de X, $\emptyset \neq$, $\exists\ U_i \in \mathcal{B}$ $\neq \emptyset$ tq $U_i \subset U$.

$\Rightarrow x \in U$ Donc $U \cap S \neq \emptyset$.

$\Rightarrow S$ dense $\Rightarrow X$ séparable $\square$

Exemples $\mathbb{R}^n$ est (C2)

(une base dénombrable $\left\{ \mathbb{B}(x,r) \,\middle|\, \begin{array}{l} x \in \mathbb{Q}^n \\ r \in \mathbb{Q}_{>0} \end{array} \right\}$
EXO : Vérifier que c'est une base.)

Prop Soit X un espace top. (C1)

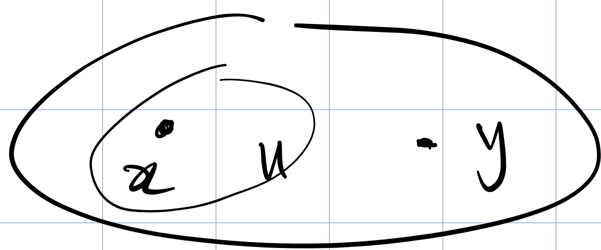
Alors • Un sous-ensemble F est fermé
$\Longleftrightarrow$ F est stable par pt d'adhérence des suite.

- $\bar{A} = \left\{ \begin{array}{l} \text{points d'adhérences des} \\ \text{suites dans } A \end{array} \right\}$

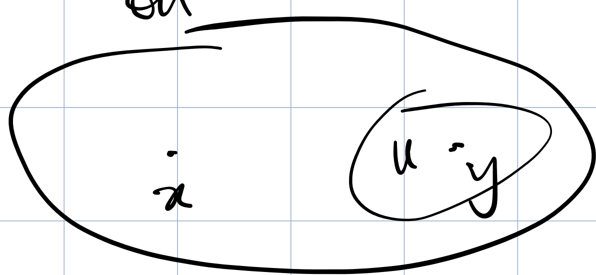
Axiomes de séparations

Déf Soit X un espace top.

- X est (T0) si $\forall\, x \neq y \in X$
  $\exists$ ouvert U de X tq $\left\{ \begin{array}{l} \text{soit } U \ni x,\ U \not\ni y \\ \text{soit } U \ni y,\ U \not\ni x \end{array} \right.$



ou

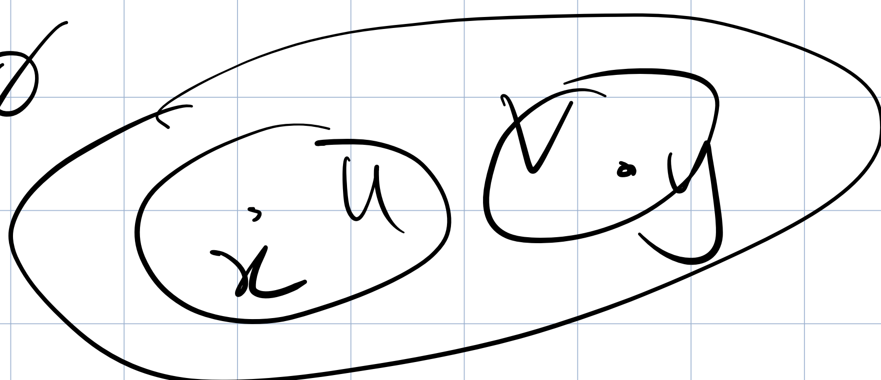


- X est (T1), $\forall\, x \neq y \in X$
  $\exists$ ouvert U de X tq $U \ni x$ et $U \not\ni y$

et

- X est $(T2)$, $\forall x \neq y \in X$ $\exists$ ouverts U, V tq

$$\begin{cases} U \ni x \\ V \ni y \\ U \cap V = \emptyset \end{cases}$$



$(T2) :=$ Hausdorff $:=$ séparé.

- X est (T3) si

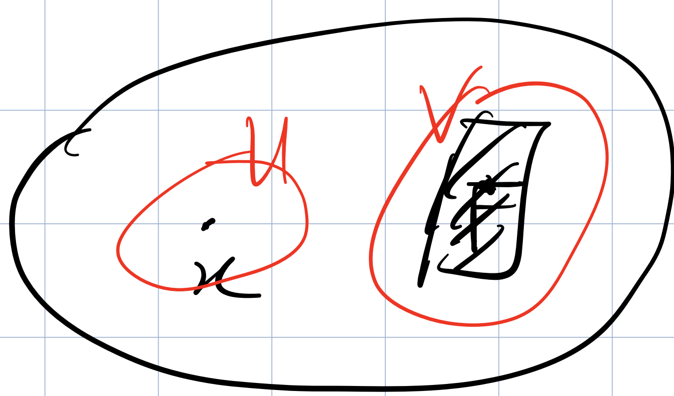
tout pt est fermé

et $\forall x \in X$ $\forall F \subset X$ fermé

avec $x \notin F$

$\exists$ ouverts U, V de X tq

$$\begin{cases} U \ni x \\ V \supset F \\ U \cap V = \emptyset \end{cases}$$



- X est (T4) si

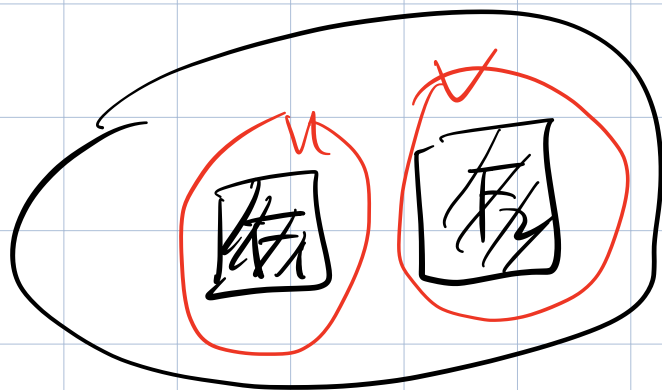
tout pt est fermé

et $\forall F_1, F_2$ fermés

tq $F_1 \cap F_2 = \emptyset$

$\exists$ ouverts U, V de X

tq $\begin{cases} U \supset F_1 \\ V \supset F_2 \\ U \cap V = \emptyset \end{cases}$



Rq. (T1) $\Rightarrow$ tout pt est fermé.

- (T4) $\Rightarrow$ (T3) $\Rightarrow$ (T2) $\Rightarrow$ (T1) $\Rightarrow$ (T0)
- chaque implication est stricte.

<u>Exemple</u> (T0 $\not\Rightarrow$ T1) (Sierpinski)

$X = \{\bullet, \cdot\}$ avec la topologie

$\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{\bullet\}\}$

X est (T0) mais pas (T1).

<u>Rq</u> (Exo). (T1) $\iff$ tout pt est fermé.

$\iff$ tout sous-ensemble fini est fermé.