

# Cours 5

(suite de "axiomes de séparations")

Lemme  $X$  espace topologique

$$\Delta := \{ (x, x) \mid x \in X \} \subset X \times X$$

$$X \text{ (T}_2) \Leftrightarrow$$

est fermé.

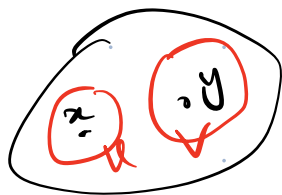
$\nearrow$   
muni de la top. produit

Preuve:  $\Rightarrow$  Mq  $X \times X \setminus \Delta$  est ouvert.

$$\forall (x, y) \in X \times X \setminus \Delta, \text{ i.e. } x \neq y$$

$$X \text{ (T}_2) \Rightarrow \exists U, V \text{ ouverts de } X$$

$$\text{t.q. } \begin{cases} x \in U \\ y \in V \\ U \cap V = \emptyset \end{cases}$$

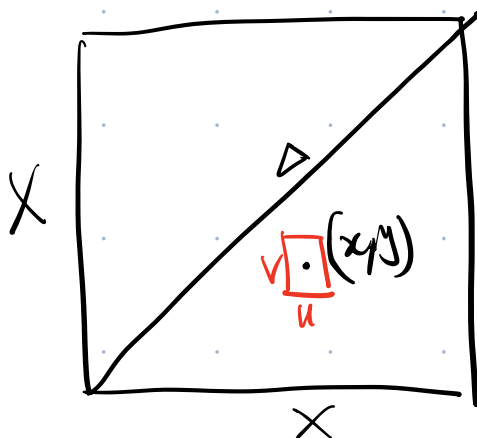


On a donc  $(x, y) \in U \times V$  un ouvert de  $X \times X$

$$U \times V \cap \Delta = \{ (u, v) \in U \times V \mid (u, v) \in \Delta \}$$

$$= \{ (u, u) \in U \times V \mid u \in \underbrace{U \cap V}_{\emptyset} \}$$

$$= \emptyset$$



$\boxed{\Leftarrow}$  (Exo)

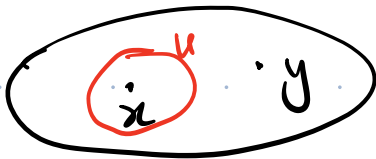
Exemples  $(T_1) \not\Rightarrow (T_2)$

Soit  $X$  un ensemble infini  
muni de la topologie cofinie.

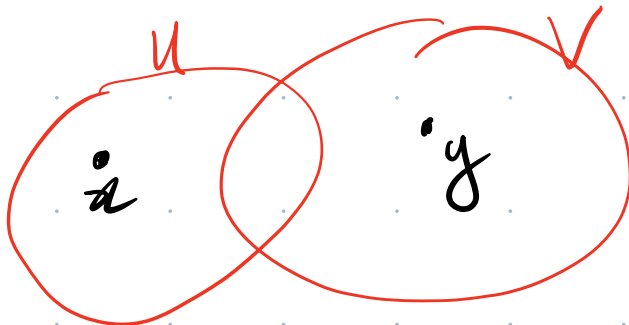
(Rappel :  $U$  ouvert  $\Leftrightarrow |X \setminus U| < \infty$ )

$X$  est  $(T_1)$  :  $\forall x \neq y \in X$

On a l'ouvert  $U = X \setminus \{y\}$  qui contient  $x$   
et  $U \neq \emptyset$



$X$  n'est pas  $(T_2)$  : En fait deux ouverts non-vides  
 $U$  et  $V$  s'intersectent toujours.



car  $X \setminus (U \cap V) = \underbrace{(X \setminus U)}_{\text{fini}} \cup \underbrace{(X \setminus V)}_{\text{fini}}$  fini

$$|X| = \infty \Rightarrow U \cap V \neq \emptyset \quad (\text{on fait } |U \cap V| = \infty) \quad \square$$

Propriétés  $(T_2)$  est héritée par "sous-espace" produit

(i) Si  $X (T_2)$ ,  $Y \subset X$  sous-espace  
Alors  $Y$  est aussi  $(T_2)$ .

(ii) Si  $X_1, X_2 (T_2)$   
alors  $X_1 \times X_2$  est  $(T_2)$ .

Preuve

(i)  $\forall y_1 \neq y_2 \in Y$

$X \text{ est } (T_2) \Rightarrow \exists U, V \text{ ouverts de } X$

$$\text{t.q. } \begin{cases} U \ni y_1, V \ni y_2 \\ U \cap V = \emptyset \end{cases}$$

$\Rightarrow U' := U \cap Y, V' := V \cap Y$  sont ouverts dans  $Y$

et  $\begin{cases} U' \ni y_1; V' \ni y_2 \end{cases}$

$$U' \cap V' = (U \cap Y) \cap (V \cap Y) = (U \cap V) \cap Y = \emptyset$$

(ii) (EXO)

$$X_1 (T_2) \xLeftrightarrow{\text{Lemme}} \Delta_{X_1} \subset X_1 \times X_1 \text{ fermée}$$

$$X_2 (T_2) \xLeftrightarrow{\text{Lemme}} \Delta_{X_2} \subset X_2 \times X_2 \text{ fermée}$$

*fermée*

$$\text{pr}_{12}^{-1}(\Delta_{X_1}) \cap \text{pr}_{34}^{-1}(\Delta_{X_2}) \subset X_1 \times X_1 \times X_2 \times X_2 \xrightarrow{\text{pr}_{12}} X_1 \times X_1$$

$$\text{pr}_{34} \xrightarrow{\quad} X_2 \times X_2$$

*fermé*  $\parallel$  *fermé*  $\parallel$

$$\Delta_{X_1 \times X_2} \subset X_1 \times X_2 \times X_1 \times X_2$$

$$\xLeftrightarrow{\text{Lemme}} X_1 \times X_2 \text{ est } (T_2). \quad \square$$

## Métrisabilité

Rq:  $(X, d)$  espace métrique  
 $X$  est toujours  $(T_4)$

(EXO)

$$\underline{\text{Thm}} (C2) + (T3) \Rightarrow (T4)$$

Si  $X$  est un esp. top.  $(C2)$  et  $(T3)$   
alors  $X$  est  $(T4)$ .

## Trois thm difficiles

### Thm 1 (Lemme de Urysohn)

Si un espace top.  $X$  est  $(T4)$

Alors pour tout  $A, B$  fermés de  $X$   
disjoints (i.e.  $A \cap B = \emptyset$ )

Alors  $\exists$  une fonction CONTINUE  $f: X \rightarrow [0, 1]$

$$\text{tq } f|_A \equiv 0 ; f|_B \equiv 1$$



Thm 2 (Urysohn) "Métrisabilité"

Si  $X$  est  $(C_2)$  et  $(T_4)$

Alors  $\exists$  une distance  $d$  sur  $X$   
qui induit la top. de  $X$ .

Thm 3 (Tietze extension)

Si  $X$  est un esp. top.  $(T_4)$

Alors  $\forall A$  fermé de  $X$

$\forall$  fonction continue  $f$  sur  $A$

$\exists$  une fonction continue  $F$  sur  $X$

tel  $F|_A = f$

