

Cours 6

§ Connexité

Déf X esp. tp.

| un sous-ensemble ouvert et fermé est appelé Clopen

Déf (Connexité) Un espace topologique X est connexe si $\emptyset$ et X sont les seuls sous-ensembles ouverts et fermés de X

Déf équivalente Un espace tp. X est connexe

$\Leftrightarrow \forall$ Toute décomposition $X = U \sqcup V$ avec U, V ouverts et $U \cap V = \emptyset$

on a $U = \emptyset$ ou $V = \emptyset$.

Exo : vérifier que les 2 Déf. sont équivalentes.

Exemples • $(X, \mathcal{T}_{\text{grossière}})$ est connexe

• $(X, \mathcal{T}_{\text{discr}})$ et si $|X| \geq 2$

alors X n'est pas connexe car $X = \{x\} \sqcup (X - \{x\})$

• $(X, \mathcal{T}_{\text{finie}})$ si $|X| = \infty$

alors X est connexe. car $\forall \text{fermé} \neq \emptyset \subsetneq X$ est fini et ouvert

• $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \leftarrow$ mini de la top. euclid.
 $\nwarrow$ mini de la top. de sous-esp.

$\mathbb{Q}$ n'est pas commutatif =

Raison : on choisit un nb $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

$$\text{also } \mathbb{Q} = (\mathbb{Q} \cap]-\infty, \alpha[) \sqcup (]\alpha, +\infty[\cap \mathbb{Q})$$

$$\qquad \qquad \qquad \parallel \qquad \qquad \qquad \parallel$$

$$\qquad \qquad \qquad \{x \in \mathbb{Q} \mid x < \alpha\} \qquad \qquad \qquad \{x \in \mathbb{Q} \mid x > \alpha\}$$

$\Rightarrow \mathbb{Q}$ non commutative

Lemme "Connexité est une propriété topologique"

Si X et Y sont des espaces top. homéomorphes
alors X connexe $\Leftrightarrow Y$ connexe.

preuve : Supposons X et Y connexes, Mg Y est connexe.
Soit $f: X \rightarrow Y$ un homéo.

$V \cup C \cap Y$ ouvert et fermé.

$f \text{ continue} \Rightarrow f^{-1}(U) \text{ est ouvert et fermé}$

X connexe $\Rightarrow f^{-1}(u) = \emptyset$ on X

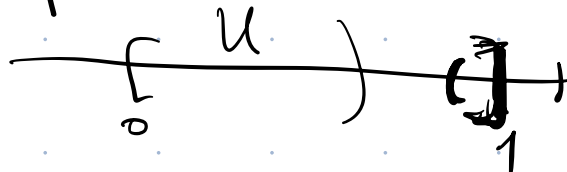
$$\Rightarrow u = \emptyset \text{ on } Y \quad \square$$

Thm $\mathbb{R}, [0,1]$ sont connexes (min de la top. euclidienne)

Pressure = $P_{\text{out}} [0,1]$

Soit $\emptyset \neq U \subsetneq [0,1]$ un ouvert et fermé de $[0,1]$.

quitte à remplacer U par son complémentaire, OPS. $1 \notin U$



Comme U est borné. et non-vidé

$$s := \sup(U) \in [0, 1] \quad \leftarrow \text{l'étape essent.}$$

- Comme U est fermé.
et s est la limite d'une suite dans U .

$$\Rightarrow s \in U$$

- Or U est ouvert. par la définition de top eucl.
 $\exists r > 0, [s-r, s+r[\subset U$
 $\Rightarrow s < s + \frac{r}{2} \in U$ contradiction.

Pour $\mathbb{R}$

Soit $\emptyset \neq U \subseteq \mathbb{R}$ ouvert et fermé.

$$\forall a \in \mathbb{R}$$

On considère $U \cap [-a, a]$

|| qui est ouvert et fermé

|| donc $\emptyset$ ou $[-a, a]$.

On choisit $x \in U$,

$$\Rightarrow \forall a \geq |x|, U \cap [-a, a] = [-a, a]$$

$$\Rightarrow U = \mathbb{R} \quad \text{Contradiction}$$

□

Cor Un intervalle non vide de $\mathbb{R}$
est connexe,
(Exo)

Prop (Adhérence) Soit A un sous-espace d'un esp-tp X
└ Si A est connexe
└ alors $\bar{A}$ est connexe.

Preuve Si $\emptyset \neq U$ un ouvert et fermé de $\bar{A}$

$$\Rightarrow U \cap A \text{ est ouvert et fermé de } A$$

$$A \text{ connexe} \Rightarrow U \cap A = \emptyset \text{ ou } U = A$$

$$\text{ - Si } U \cap A = \emptyset \text{ i.e. } U \subset \bar{A} \setminus A$$

$$\text{ On choisit } x \in U \subset \bar{A}$$

par la définition de $\bar{A}$, $U \cap A \neq \emptyset$. Contradiction.

• Si $U \supset A$, $U = \bar{U} \supset \bar{A} \Rightarrow U = \bar{A}$
 $\uparrow$
 U fermé. $\square$

Exo: Prouver plus généralement que si A connexe
 $\forall A \subseteq B \subseteq \bar{A}$ on a B connexe.

Prop (Image)

X connexe, $f: X \rightarrow Y$ continue.

alors $\text{Im}(f)$ est connexe.

Preuve • $f: X \rightarrow Y$ continue $\Rightarrow f: X \rightarrow \text{Im}(f)$ continue.

Donc on peut supposer que f surjective.

• Supposons X et connexe, mq Y est connexe.

$\forall U \subset Y$ ouvert et fermé.

f continue $\Rightarrow f^{-1}(U) \subset X$ est ouvert et fermé

X connexe $\Rightarrow f^{-1}(U) = \emptyset$ ou X

$\Rightarrow U = \emptyset$ ou $Y = f(f^{-1}(U))$ $\square$
 $\uparrow$
surjectivité.

Prop (Produit)

Soient X, Y deux espaces top. complexes

alors $X \times Y$ est complexe.

Preuve $\forall \emptyset \neq U \subseteq X \times Y$ ouvert et fermé de $X \times Y$

clair: $\forall x \in X$, $\{x\} \times Y$ est homéomorphe à Y

Preuve: Une base de la top.

de $\{x\} \times Y \subset X \times Y$

est donnée par

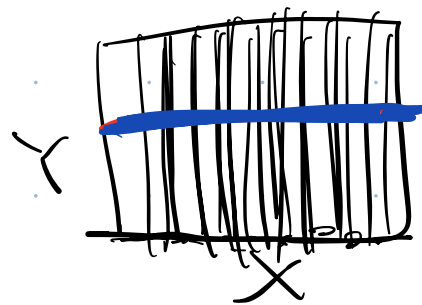
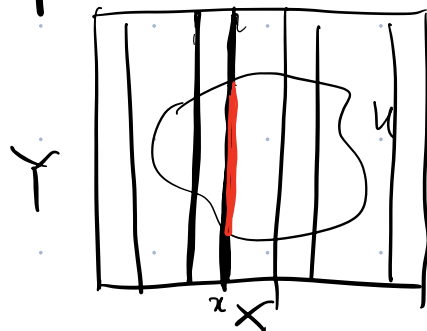
$$\left\{ (\{x\} \times Y) \cap (V_1 \times V_2) \mid \begin{array}{l} V_1 \subset X \text{ ouvert} \\ V_2 \subset Y \text{ ouvert} \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ (\{x\} \cap V_1) \times V_2 \mid \begin{array}{l} V_1 \text{ ouvert de } X \\ V_2 \text{ ouvert de } Y \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \{x\} \times V_2 \mid V_2 \text{ ouvert de } Y \right\} \quad \square (\text{clair})$$

$\forall x \in X$
On considère $U \cap (\{x\} \times Y)$ qui est
ouvert et fermé dans $\{x\} \times Y$.

$$\left. \begin{array}{l} Y \text{ complexe} \\ \{x\} \times Y \cong_{\text{homéom}} Y \end{array} \right\} \Rightarrow \{x\} \times Y \text{ complexe}$$



$$\Rightarrow U \cap (\{x\} \times Y) = \emptyset \text{ ou } \{x\} \times Y.$$

$$\Rightarrow U = \text{pr}_X^{-1}(W) \text{ pour un } W \subset X.$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{même argument pour } X \times Y \setminus U \\ \Rightarrow X \times Y \setminus U = \text{pr}_X^{-1}(X \setminus W) \end{array} \right)$$

On considère $X \times \{y\}$ pour $\forall y \in Y$

même argument montre que

$$U = \text{pr}_Y^{-1}(Z) \text{ pour un } Z \subset Y.$$

$$\stackrel{(\text{Exo})}{\Rightarrow} U = X \times Y \quad \square$$

Cor. $X_1, \dots, X_n$ espace top. connexe

$$\Rightarrow X_1 \times \dots \times X_n \text{ est connexe.}$$

Prop (Connexe par arcs $\Rightarrow$ connexe)

X connexe par arcs, alors X connexe

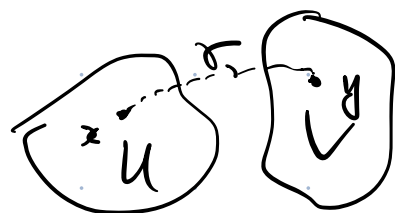
Preuve On suppose par absurde que

$$X = U \sqcup V \quad \text{avec } \begin{matrix} U \\ \neq \\ \emptyset \end{matrix} \text{ et } \begin{matrix} V \\ \neq \\ \emptyset \end{matrix} \text{ ouverts}$$

On choisit $x \in U, y \in V$

$$X \text{ connexe par arcs} \Rightarrow \exists \gamma: [0,1] \rightarrow X$$

$$\begin{matrix} 0 & \mapsto & x \\ 1 & \mapsto & y \end{matrix}$$

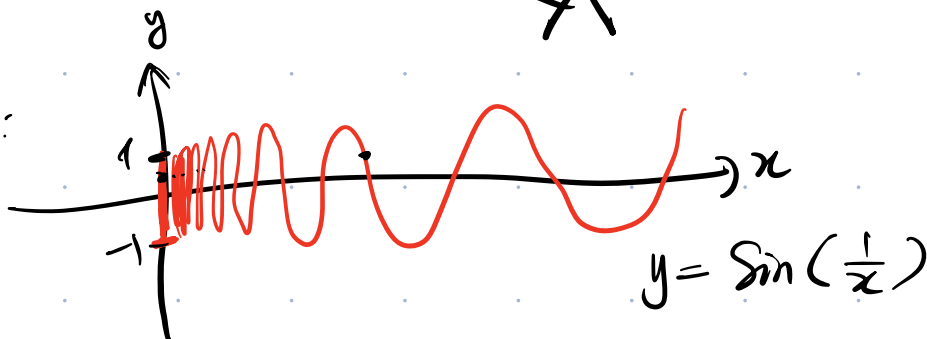


$$[0,1] = \gamma^{-1}(U) \sqcup \gamma^{-1}(V) \quad \text{avec } \begin{matrix} \gamma^{-1}(U) \\ \neq \\ \emptyset \end{matrix} \text{ et } \begin{matrix} \gamma^{-1}(V) \\ \neq \\ \emptyset \end{matrix} \text{ sont ouverts}$$

$\Rightarrow$ contredit à la connexité de $[0,1]$. $\square$

Rq Connexité par arcs $\not\Rightarrow$ Connexité.

Exemple:



$X = \left\{ (0, y) \mid -1 \leq y \leq 1 \right\} \sqcup \left\{ (x, y) \mid y = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right\}$ est connexe mais pas connexe par arcs.

$$= \overline{X_2}$$

X_2 connexe $\Rightarrow X = \overline{X_2}$ connexe $\square$

Rq En pratique, pour montrer la connexité penser à montrer la connexité par arcs.

Rq En général, A connexe par arcs

$\overline{A}$ 

Prop (Image) Soit X connexe par arcs.
Soit $f: X \rightarrow Y$ continue

alors $\text{Im}(f)$ est connexe par arcs.

Preuve $\forall f(x_1), f(x_2) \in \text{Im}(f)$
où $x_1, x_2 \in X$.

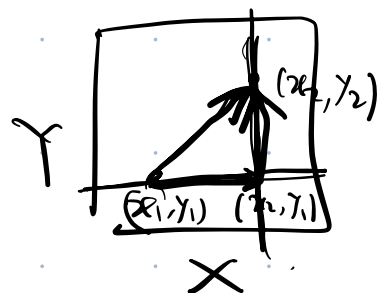
X connexe par arcs $\Rightarrow \exists \gamma: [0,1] \rightarrow X$
 $0 \mapsto x_1$
 $1 \mapsto x_2$

$\Rightarrow f \circ \gamma: [0,1] \xrightarrow{\gamma} X \xrightarrow{f} Y$ est continue.
 $0 \mapsto f(x_1)$
 $1 \mapsto f(x_2)$ $\square$

Prop (Produit) X, Y connexes par arcs
 $\Rightarrow X \times Y$ est connexe par arcs.

Preuve :

Soit $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$



X connexe par arcs

$$\Rightarrow \exists \gamma_1: [0,1] \rightarrow X$$

$$\begin{matrix} 0 & \mapsto & x_1 \\ 1 & \mapsto & x_2 \end{matrix}$$

Y connexe par arcs

$$\Rightarrow \exists \gamma_2: [0,1] \rightarrow Y$$

$$\begin{matrix} 0 & \mapsto & y_1 \\ 1 & \mapsto & y_2 \end{matrix}$$

On considère $\gamma := (\gamma_1, \gamma_2): [0,1] \rightarrow X \times Y$
 $t \mapsto (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$

Propriété
universelle
 de tp. prod.

γ est continue

$$\gamma(0) = (\gamma_1(0), \gamma_2(0)) = (x_1, y_1)$$

$$\gamma(1) = (x_2, y_2)$$

$\square$

Conséquence : $(X_i)_{i=1}^n$ connexes par arcs
 $\Rightarrow \prod_{i=1}^n X_i$ connexe par arcs

Rq même pour $\left(\prod_{i \in I} X_i, \mathcal{T}_{\text{produit}} \right)$.