

Cours 7

Application

1) Thm (Valeurs intermédiaires)

Soit X un espace topologique Connexe

Soit $f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue
(ou un intervalle)

si $a < b \in \text{Im}(f)$

alors $\forall a \leq c \leq b$ est dans $\text{Im}(f)$

Preuve: $\left. \begin{array}{l} X \text{ Connexe} \\ f \text{ continue} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Im}(f) \text{ est connexe de } \mathbb{R}$

$\Rightarrow \text{Im}(f) \text{ est un intervalle (donc convexe)}$

Donc $a, b \in \text{Im}(f) \Rightarrow [a, b] \subset \text{Im}(f) \quad \square$

Digression (Convexité, Étoile)

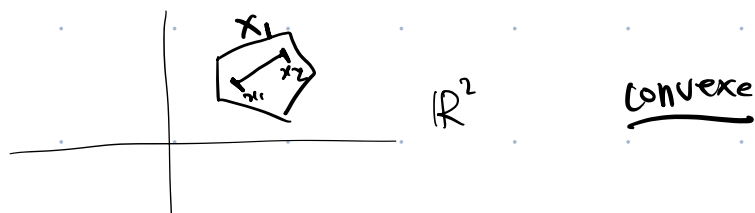
Def Soit $X \subset \mathbb{R}^n$

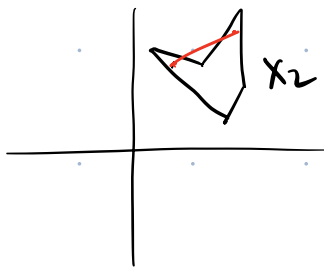
On dit que X est convexe si

$$\forall x_1, x_2 \in X$$

le segment $[x_1, x_2] := \{ tx_1 + (1-t)x_2 \mid t \in [0, 1] \} \subset X$

Dessin





non Convexe

X_1 convexe
 X_2 non convexe

mais

$X_1 \cong X_2$
homéo.

sont CONVEXE

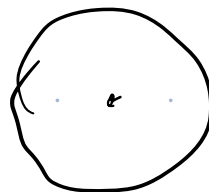
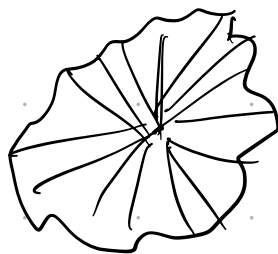
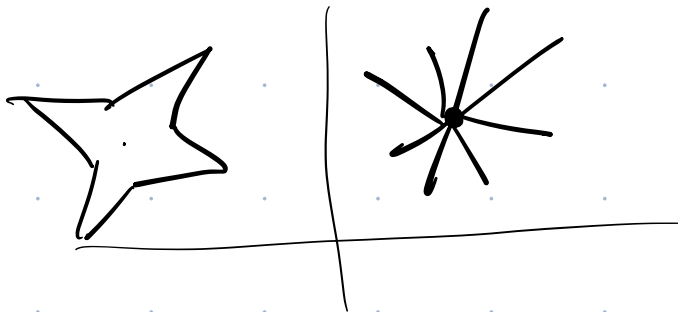
Déf. Un sous-ensemble $X \subset \mathbb{R}^n$

est dit une étoile si

$\exists x_0 \in X$ tq $\forall x \in X$

le segment $[x_0, x] \subset X$.

Dessin -



Convexe $\Rightarrow$ Étoile.

Rg. $X \subset \mathbb{R}^n$ étoile
 $\Rightarrow X$ est connexe par arcs, donc connexe.

Raison: On considère $x_0 \in X$ comme dans Déf.
• $\forall x \in X$, $[x_0, x] \subset X$ par convexité.

On a donc un chemin

$$\gamma: [0, 1] \longrightarrow X \quad (\text{continue})$$
$$t \longmapsto tx + (1-t)x_0$$

$$\begin{cases} \gamma(0) = x_0 \\ \gamma(1) = x \end{cases} \Rightarrow \gamma \text{ est un chemin de } x_0 \text{ à } x$$

• $\forall x, y \in X$ la concaténation de chemins
 $\begin{cases} \gamma_1 \text{ de } x_0 \text{ à } x \\ \overline{\gamma_2} \text{ de } y \text{ à } x_0 \end{cases}$

donne un chemin $\gamma_1 * \overline{\gamma_2}$ de y à x .

$$\gamma_1 * \overline{\gamma_2}: [0, 1] \longrightarrow X$$
$$t \longmapsto \begin{cases} tx_0 + (1-t)y & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (2t-1)x + (2-2t)x_0 & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma_1 * \overline{\gamma_2}(0) = y \\ \gamma_1 * \overline{\gamma_2}(1) = x \end{cases}$$

□

Convexe $\Rightarrow$ Étoile $\Rightarrow$ Convexe par arcs $\Rightarrow$ Convexe

Notions "affines" Notions topologiques.

————— (Digression)

2) Thm de pt fixe.

Cor Toute application continue de $[0,1]$ vers $[0,1]$ admet un pt fixe.

Preuve: Soit $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$ app. continue.

On considère

$$g: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto f(x) - x.$$

Affirmation: g est continue.

Preuve 1: $\forall \varepsilon > 0$, comme f est continue

$\exists \delta > 0$ tq $\forall x, y$ avec $|x - y| < \delta$, on a

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{et } \delta < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow |g(x) - g(y)| &= |f(x) - x - f(y) + y| \\
 &\leq |f(x) - f(y)| + |x - y| \\
 &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \square
 \end{aligned}$$

Preuve 2 (Composition)

g est la composition :

$$\begin{aligned}
 g: [0,1] &\xrightarrow{\Delta} [0,1] \times [0,1] \xrightarrow{(f, \text{id})} [0,1] \times [0,1] \Rightarrow \mathbb{R} \\
 x &\longmapsto (x, x) \\
 (x, y) &\longmapsto (f(x), y) \\
 (t_1, t_2) &\longmapsto t_1 - t_2
 \end{aligned}$$

CCL : g est continue $\square$

$$g(0) = f(0) - 0 = f(0) \in [0,1]$$

$$g(1) = f(1) - 1 \in [-1, 0]$$

$$g(0) \geq 0 \geq g(1)$$

Thm de Val. Int $\Rightarrow 0 \in \text{Im}(g)$

$$\text{i.e. } \exists x \in [0,1] \quad g(x) = f(x) - x = 0 \quad \square$$

Ce thm admet une version en dim supérieure:

Thm (Brouwer)

Soit $D := \overline{B}(0,1)$ un disque fermé.

de dimension n

(ou un espace topologique homéomorphe à un disque fermé, e.g. ,  ...)

Alors toute application continue de D vers D admet un pt fixe.

Décomposition en composantes connexes

Déf Soit X un espace topologique.

On introduit une relation d'équivalence $\sim$.

$x \sim y \iff \exists Y \subset X$ sous-esp. connexe
tq $x, y \in Y$.

Lemme $\sim$ est une relation d'équivalence.

Preuve: $x \sim x$ ✓

$x \sim y \Leftrightarrow y \sim x$ ✓

• Si $x \sim y$, $y \sim z$ mg $x \sim z$.

$x \sim y \Rightarrow \exists U \subset X$ connexe
 $\forall x, y \in U$

$y \sim z \Rightarrow \exists V \subset X$ connexe
 $\forall y, z \in V$.

Donc $U \cup V \ni x$ et z

Il suffit de mg $U \cup V$ est connexe
Soit $\emptyset \neq W$ un ouvert et fermé de $U \cup V$

U connexe $\Rightarrow W \cap U$ est ouvert et fermé de U .

$\Rightarrow W \cap U = \emptyset$ ou $U \subset W$

De même $W \cap V = \emptyset$ ou $V \subset W$.

Comme $W \neq \emptyset$, $W \cap U \neq \emptyset$ ou $W \cap V \neq \emptyset$.

$$\Rightarrow U \subset W \quad \underline{\text{ou}} \quad V \subset W$$

$$\text{Si } U \subset W \Rightarrow y \in W \Rightarrow W \cap V \neq \emptyset \\ \Rightarrow W \supset V$$

$$\Rightarrow W = U \cup V$$

De même

$$\text{Si } V \subset W, \Rightarrow W = U \cup V \quad \square$$

Déf Une classe d'équivalence par $\sim$
est appelée une composante connexe de X
Et la décomposition de X en classes d'éq
est appelée la décomposition en composantes

Connexes

$$X = \bigsqcup_{i \in I} X_i$$

Lemme: Une composante connexe est ^{connexe} fermée.

Preuve: Soit $A \subset X$ une composante connexe

Ng A est connexe

Soit U un ouvert et fermé de A

il faut montrer que $U = A$

Si $U \neq A$, on choisit un pt



$$\begin{cases} x \in U \\ y \in A \setminus U = V \end{cases}$$

$$A = U \sqcup V$$

Comme $x, y \in A$, i.e. $x \sim y$

$\exists W$ connexe tq $x, y \in W$

Comme tous pts de W sont equiv. à x et y

$$\Rightarrow W \subset A$$

$$\Rightarrow W = (W \cap U) \sqcup (W \cap V)$$

$\uparrow$
ouvert et fermé
non vide
 $x \in W \cap U$

$\uparrow$
union
disjoint

$\uparrow$
ouvert et fermé
non vide
 $y \in W \cap V$

contradiction à la connexité de W

$\Rightarrow A$ est connexe

$\Rightarrow \bar{A}$ est connexe

Donc tous pts de $\bar{A}$ sont équivalents.

$$\Rightarrow \bar{A} \subset A$$

$$\Rightarrow A = \bar{A}, \text{ i.e. } A \text{ est fermé} \quad \square$$

Exemples $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

les seuls sous-ensembles connexes de $\mathbb{Q}$ sont $\emptyset$ et singletons.

Donc les composantes connexes de $\mathbb{Q}$ sont les singletons.

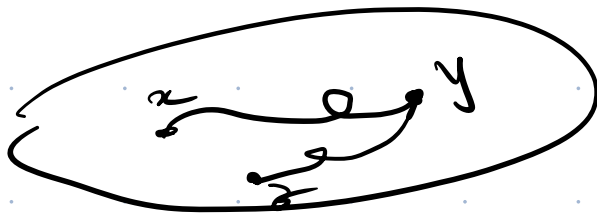
Prop (Exo) : Un espace est connexe $\iff$ il n'a qu'une seule composante connexe.

Def $X = \text{esp. top.}$

on introduit une relation d'équivalence $\sim_{\text{arc}}$:

$$x \sim_{\text{arc}} y \iff \exists \text{ chemin } \gamma \text{ de } X \text{ avec } \gamma(0) = x, \gamma(1) = y$$

Exo : $\sim_{\text{arc}}$ est une relation d'équivalence.



(Indication: - chemin inverse $\gamma \rightsquigarrow \bar{\gamma}$
 - concaténation $\gamma_1 * \gamma_2$)

Def Les classes d'équivalence pour $\sim$ arc
 d'un espace topologique X
 sont appelées composantes connexes par arcs

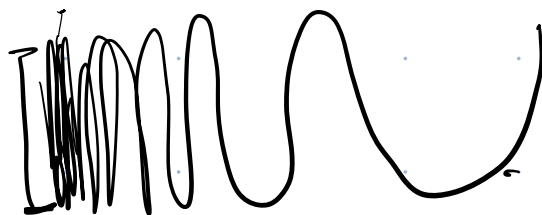
On a décomposition en

$$X = \bigsqcup_{j \in J} X_j$$

Rq • Par définition,
 Une composante connexe par arcs est
 connexe par arcs.

- $\triangle$ une composante connexe par arcs
 n'est pas forcément ouvert ou fermé.

Exemple



a deux composantes connexes par arcs,
mais qu'une _____.

Rq Si un espace topologique X est localement connexe par arcs

(i.e. $\forall x \in X, \exists U$ voisinage ouvert de x
 tq U est connexe par arcs)

Alors les composantes connexes de X

Sont _____ pour arcs de X