

Cours 8

§ Compacité

"Compacité est une notion de finitude"

Déf Soit X un espace topologique.

On dit que X est compact si tout recouvrement ouvert admet un sous-recouvrement fini

i.e. $\forall \{U_i\}_{i \in I}$ collection des ouverts de X

$$\text{tq } \bigcup_{i \in I} U_i = X$$

alors $\exists J \subset I$ sous-ensemble fini, tq $\bigcup_{j \in J} U_j = X$
(i.e. on a un sous-ensemble fini $\{U_j\}_{j \in J} \subset \{U_i\}_{i \in I}$)

Lemme (Déf équivalente en termes de fermés (Exo))

X est compact ssi la condition suivante est vérifiée:

$\forall \{F_i\}_{i \in I}$ collection des fermés de X

$$\text{tq } \bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$$

alors $\exists J \subset I$ fini tq $\bigcap_{j \in J} F_j = \emptyset$

Exemple

- Un espace topologique fini est compact.

(c'est immédiate de la définition)

• Non exemple :

• $\mathbb{R}$ n'est pas compact :

on considère $\{]-N, N[\mid N \in \mathbb{Z}_{>0} \}$

il n'a pas de sous-recouvrement fini.

• Plus généralement, un intervalle ouvert ou semi-ouvert n'est pas compact :

$] -\infty, +\infty[$, $] -\infty, a[$, $] -\infty, a]$

$] a, b]$, $] a, b[$, $] a, +\infty[$ etc.

Rq si X et Y sont homéomorphes.

[alors $X \text{ cpt} \Leftrightarrow Y \text{ cpt}$.

(Exo)

• plus généralement, un sous-espace non borné de $\mathbb{R}^n$ n'est pas compact.

Soit X un esp. top.

Lemme Soit $A \subset X$ un sous-espace.

Alors A est compact ssi la condition suivante est vérifiée:

ie. $\forall \{U_i\}_{i \in I}$ collection des ouverts de X
 $\otimes \left[\begin{array}{l} \text{tg } \bigcup_{i \in I} U_i \supset A \\ \text{alors } \exists J \subset I \text{ sous-ensemble fini tg } \bigcup_{j \in J} U_j \supset A \end{array} \right.$

Preuve:

$\Rightarrow$

Supposons A cpt.

Soit $\{U_i\}_{i \in I}$ collection des ouverts de X tg $\bigcup_{i \in I} U_i \supset A$

On considère $V_i := U_i \cap A$ qui est un ouvert de A

$$\text{et de plus } \bigcup_{i \in I} V_i = \bigcup_{i \in I} (U_i \cap A) = \left(\bigcup_{i \in I} U_i \right) \cap A = A$$

$$A \text{ cpt} \Rightarrow \exists J \subset I \text{ fini tg } \bigcup_{j \in J} V_j = A$$

$$\left(\bigcup_{j \in J} U_j \right) \cap A = \bigcup_{j \in J} (U_j \cap A) = \bigcup_{j \in J} V_j = A$$

$$\Rightarrow \bigcup_{j \in J} U_j \supset A$$

$\square \Rightarrow$

$\Leftarrow$: Supposons que $\otimes$ est vérifiée.

tg A est compact :

Soit $\{V_i\}_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de A

(i.e. $V_i \subset A$ ouvert, $\bigcup_{i \in I} V_i = A$)

$\forall i \in I$, on choisit U_i ouvert de X
tq $V_i = U_i \cap A$.

$$\Rightarrow \left(\bigcup_{i \in I} U_i \right) \cap A = \bigcup_{i \in I} (U_i \cap A) = \bigcup_{i \in I} V_i = A$$

$$\Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \supset A$$

$$\Rightarrow \exists J \subset I \text{ fini, tq } \bigcup_{j \in J} U_j \supset A$$

$$\Rightarrow \bigcup_{j \in J} V_j = \bigcup_{j \in J} (U_j \cap A) = \left(\bigcup_{j \in J} U_j \right) \cap A = A$$

□

Thm (Heine - Borel)

$[0,1]$ est compact.

Preuve: Soit $\{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de $[0,1]$.

On considère $S := \{z \in [0,1] \mid [0,z] \text{ peut \u00eatre couvert par un nb fini de } U_i\}$
mq $1 \in S$.

• $S \neq \emptyset$ car $0 \in S$

• S est ouvert: $\forall z \in S$,

par définition de S , $[0, z] \subset \bigcup_{j \in J} U_j$ pour un $J \subset I$ fini.

Comme $z \in \bigcup_{j \in J} U_j$, $\exists j_0 \in J$ tq $z \in U_{j_0}$

U_{j_0} ouvert $\Rightarrow \exists r > 0$, tq $\underbrace{]z-r, z+r[}_{B(z, r)} \subset U_{j_0}$

$$\Rightarrow [0, z+\frac{r}{2}] \subset \bigcup_{j \in J} U_j$$

$$\Rightarrow]0, z+\frac{r}{2}[\subset S$$



$\Rightarrow S$ ouvert

• S est fermé, ou de manière équivalente

$[0, 1] \setminus S$ est ouvert

$\forall z \notin S$ (si $[0, 1] \setminus S = \emptyset \Rightarrow S = [0, 1]$ $\wedge$)

Comme $[0, 1] = \bigcup_{i \in I} U_i$

$\exists i_0 \in I$ tq $z \in U_{i_0}$

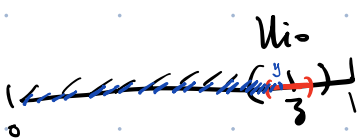
$\Rightarrow \exists r > 0$, $]z-r, z+r[\subset U_{i_0}$

Affirmation $]z-\frac{r}{2}, z+\frac{r}{2}[\cap S = \emptyset$

Preuve: (si) $\exists y \in]z-\frac{r}{2}, z+\frac{r}{2}[$ et $y \in S$

$$\exists JCI \uparrow \text{fin} \quad [0, y] \subset \bigcup_{j \in J} U_j,$$

$$\Rightarrow [0, z] \subset [0, y] \cup]z-t, z+t[$$



$$\subset \bigcup_{j \in J} U_j \cup U_{i_0}$$

$$\Rightarrow z \in S \quad \text{contradiction!}$$

$$\Rightarrow [0, 1] \setminus S \text{ est ouvert.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Par la compacité de } [0, 1] \\ S \neq \emptyset, \text{ ouvert et fermé} \end{array} \right\} \Rightarrow S = [0, 1] \Rightarrow 1 \in S$$

$$\Rightarrow [0, 1] \text{ peut \u00eatre couvert par un nb fini de } U_i.$$

□

Cor Tout intervalle fermé (borné) est cpt.
 $[a, b]$

Preuve: On a un homéomorphisme

$$[0, 1] \xrightarrow{\cong} [a, b]$$

□

Prop 1 (Un fermé d'un compact est compact)

[Soit X un esp. top. compact, Soit $F \subset X$ fermé.
alors F est compact.

Preuve, Soit $\{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de F .
(i.e. U_i ouvert de X et $\bigcup_{i \in I} U_i \supset F$)

F fermé $\Rightarrow U_0 := X \setminus F$ ouvert de X

$\Rightarrow \{U_i\}_{i \in I} \cup \{U_0\}$ est un recouvrement de X .

X compact $\Rightarrow \exists J \subset I$ fini tq $\{U_j\}_{j \in J} \cup \{U_0\}$ est
un sous-recouvrement fini de X .

i.e. $\bigcup_{j \in J} U_j \cup U_0 = X$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left(\bigcup_{j \in J} U_j \right) \cap F &= \left(\left(\bigcup_{j \in J} U_j \right) \cap F \right) \cup \left(U_0 \cap F \right) \\ &= \underbrace{\left(\bigcup_{j \in J} U_j \cup U_0 \right)}_{\substack{= X \\ \parallel}} \cap F = F \end{aligned}$$

$$\Rightarrow F \subset \bigcup_{j \in J} U_j$$

□

Prop 2 (L'image d'un compact est compact)

Soit $f: X \rightarrow Y$ une application continue.

Soit $F \subset X$ un sous-ensemble compact de X

Alors $f(F)$ est compact.

Preuve

(Rq: $f|_F: F \rightarrow Y$ est une app. continue.
Donc il suffit de montrer pour $F=X$ compact)

Soit $\{U_i\}_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de $f(F)$
i.e. U_i ouvert dans Y et $\bigcup_{i \in I} U_i \supset f(F)$.

$$\bigcup_{i \in I} U_i \supset f(F) \Rightarrow \bigcup_{i \in I} f^{-1}(U_i) \supset f^{-1}(f(F)) \supset F$$

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ continue} \\ U_i \text{ ouvert} \end{array} \right\} \Rightarrow f^{-1}(U_i) \text{ ouvert}$$

$$F \text{ compact} \Rightarrow \exists J \subset I \text{ fini } \text{ tq } \bigcup_{j \in J} f^{-1}(U_j) \supset F$$

$$\Rightarrow f\left(\bigcup_{j \in J} f^{-1}(U_j)\right) \supset f(F)$$

$$\bigcup_{j \in J} f(f^{-1}(U_j))$$

$$\bigcup_{j \in J} U_j$$

□

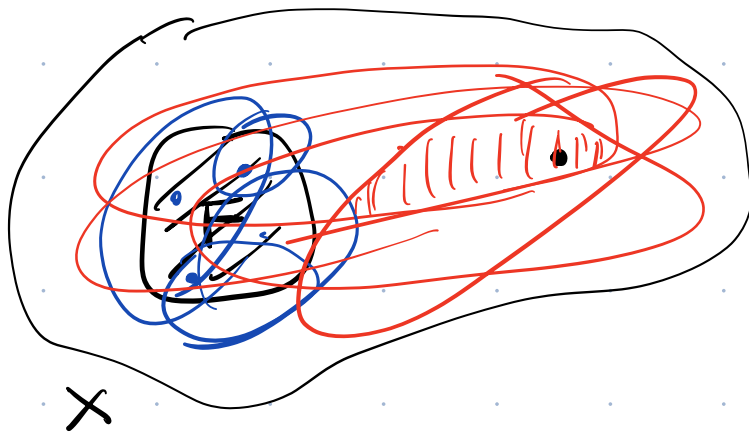
Prop 3 (un compact dans un esp. séparé est fermé)

Soit X un espace top. séparé (= Hausdorff) (= T_2)

Soit $F \subset X$ un sous-espace compact

Alors F est fermé.

Preuve:



mg $X \setminus F$ est ouvert.

$\forall x \notin F$, on va mg $\exists$ ouvert $x \in U \subset X \setminus F$.

$\forall y \in F$, Comme X est séparé

$\exists$ V_y, U_y ouvert de X

$$\begin{cases} y \in V_y \\ x \in U_y \\ V_y \cap U_y = \emptyset \end{cases}$$

$$\Rightarrow F \subset \bigcup_{y \in F} V_y$$

F compact $\Rightarrow \exists$ un nb fini de pts $y_1, \dots, y_n \in F$

$$\nrightarrow F \subset \bigcup_{i=1}^n V_{y_i}$$

On considère $\underbrace{x \in U}_{\text{ouvert de } X} = \bigcap_{i=1}^n U_{y_i}$ ouvert de X .

$$\begin{aligned}
 \underline{F \cap U} &\subset \left(\bigcup_{i=1}^n V_{y_i} \right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^n U_{y_j} \right) \\
 &= \bigcup_{i=1}^n \left(V_{y_i} \cap \bigcap_{j=1}^n U_{y_j} \right) \\
 &\subset \bigcup_{i=1}^n \left(\underbrace{V_{y_i} \cap U_{y_i}}_{\emptyset} \right) = \emptyset
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow F$ fermé □

Cor Soit $f: X \rightarrow Y$ une application continue

Si X est compact et Y est séparé

Si f est bijective

Alors f est un homéomorphisme.

Preuve: Il suffit de mq f^{-1} est continue.

cà-d. mq $\forall F \subset X$ fermé, $(f^{-1})'(F) = f(F)$ est fermé.

Soit $F \subset X$ fermé $\overset{\text{Prop 1}}{\Rightarrow} F$ est compact
 X compact

f continue $\wedge$ F compact $\overset{\text{Prop 2}}{\Rightarrow} f(F)$ est compact $\overset{\text{Prop 3}}{\Rightarrow} f(F)$ fermé
 Y séparé

$\Rightarrow f \text{ est une app. fermée} \left. \begin{array}{l} f \text{ bij. et } \tau^0 \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ homéom.} \quad \square$

Thm (produit de compact est compact)

Soient X et Y deux espaces top. compacts

Alors $X \times Y$, muni de la top. produit, est compact.

Plus généralement,

si $X_1, \dots, X_n$ sont compacts

$\Rightarrow X_1 \times \dots \times X_n$ est compact.

Thm (Tychonoff) Soit $\{X_i\}_{i \in I}$ une collection
des espaces topologiques compacts

Alors $\prod_{i \in I} X_i$, muni de la top. produit, est compact.
(mais pas boîte)

Exo. $\prod_{i \in I} X_i$ est compact alors X_i est compact.