

Cours 9

Thm (produit^(fini) des compacts est compact)

Soient $X_1, \dots, X_n$ des espaces topologiques compacts.

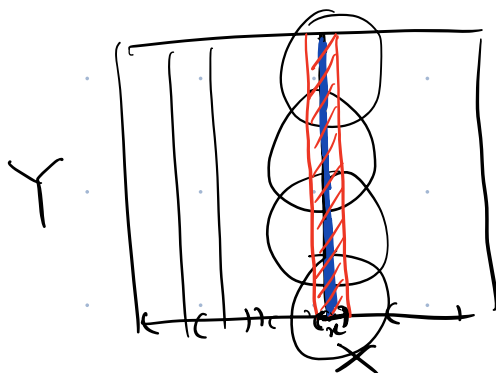
Alors $X_1 \times \dots \times X_n$ est compact.

Preuve:

• Par récurrence, il suffit de démontrer pour $n=2$.

$$\left(X_1 \times \dots \times X_n \cong \underbrace{(X_1 \times \dots \times X_{n-1})}_{\text{compact}} \times \underbrace{X_n}_{\text{compact}} \right)$$

• $X_1 = X, X_2 = Y$ compact, mg: $X \times Y$ compact.



Lemme de tube Soit $x \in X, Y$ compact.
Soit U un ouvert tq $U \supset \{x\} \times Y$

Alors $\exists V$ voisinage ouvert de x dans X

$$\text{tq } U \supset V \times Y$$

Preuve du Lemme:

$\forall y \in Y$ comme $(x, y) \in U$

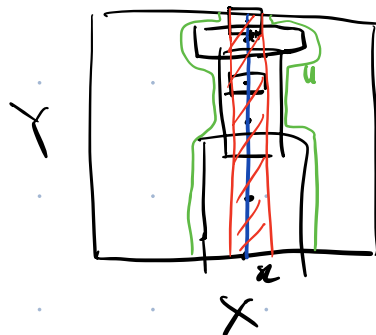
def. de la

top. produit

$\Rightarrow \exists$

$\left\{ \begin{array}{l} A_y \text{ ouvert dans } X \\ B_y \text{ ouvert dans } Y \end{array} \right.$

tq $(x, y) \in A_y \times B_y \subset U$



(en particulier $\begin{matrix} x \in A_y \\ y \in B_y \end{matrix}$)

$$\Rightarrow Y = \bigcup_{y \in Y} B_y$$

$$Y \text{ cpt} \Rightarrow \exists y_1, \dots, y_n \in Y \text{ tq}$$

$$Y = \bigcup_{i=1}^n B_{y_i}$$

on considère $x \in V := \bigcap_{i=1}^n A_{y_i}$ ouvert de X

$$\Rightarrow \{x\} \times Y \subset V \times Y$$

$$\left\{ \begin{array}{l} U \supset \bigcup_{i=1}^n A_{y_i} \times B_{y_i} \supset \bigcup_{i=1}^n V \times B_{y_i} = V \times Y \end{array} \right.$$

□

Preuve du thm

Soit $\{U_i\}_{i \in I}$ une famille d'ouvert de $X \times Y$

$$\text{tq } \bigcup_{i \in I} U_i = X \times Y$$

$\forall x \in X$ comme $\{x\} \times Y \cong Y$ et compact

$\exists J_x \subset I$ sous-ensemble fini tq

$$\bigcup_{j \in J_x} U_j \supset \{x\} \times Y$$

Lemme de tube $\Rightarrow \exists V_x$ voisinage ouvert de x dans X tq

$$\textcircled{*} \quad \bigcup_{j \in J_x} U_j \supset V_x \times Y.$$

Comme $X = \bigcup_{x \in X} V_x \xrightarrow{X \text{ q.t.}} \exists x_1, \dots, x_m \in X$
 $\text{t.q. } X = \bigcup_{k=1}^m V_{x_k}$

$\textcircled{*}$

Alors $\bigcup_{k=1}^m \bigcup_{j \in J_{x_k}} U_j$

$$\textcircled{*} \supset \bigcup_{k=1}^m (V_{x_k} \times Y).$$

$$= \left(\bigcup_{k=1}^m V_{x_k} \right) \times Y$$

$$\textcircled{*} \stackrel{=}{=} X \times Y.$$

$\Rightarrow \{U_j\}_{\substack{j \in J_{x_k} \\ k=1, \dots, m}}$ est un sous-recouvrement fini de $\{U_i\}_{i \in I}$. $\square$

Cor/Exemples :

(i) $[0,1]^n$ est compact

(ii) Un sous-ensemble fermé et borné de $\mathbb{R}^n$ est compact.

Preuve: (i) par thm. et la compacité de $[0,1]$
(Thm de Heine-Borel)

(ii) Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ fermé et borné

borné $\Rightarrow X \subset [-N, N]^n$ pour un $N \geq 0$.

$\xRightarrow{(i)} [-N, N]^n$ est compact.

$X \subset [-N, N]^n$ est fermé
 $\xRightarrow{\quad\quad\quad} X$ compact $\square$

Rk. En effet, un compact dans $\mathbb{R}^n$
est forcément fermé et borné.

Preuve: • $\left. \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \text{ séparé} \\ X \text{ compact} \end{array} \right\} \Rightarrow X \text{ fermé}$

• $X \subset \bigcup_{N=1}^{\infty} [-N, N]^n$

$X \text{ cpt} \xRightarrow{\quad\quad\quad} \text{on a } \exists N > 0 \text{ s.t. } X \subset [-N, N]^n$
 $\Rightarrow X$ borné $\square$



$\text{cpt} \not\Rightarrow$ fermé et borné
en général :

Ex.

S : ensemble infini muni de la

$$\text{distance} \quad d(x, y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

$\Rightarrow$ la top. induite sur S est la top. discrète.

S est borné
et fermé

mais S n'est pas
compact