

2025-2026

Topologie, feuille 3

Exercice 1. Soient $(X, \mathcal{T}_X)$ et $(Y, \mathcal{T}_Y)$ deux espaces topologiques et soit $\mathcal{B}$ une base pour $\mathcal{T}_Y$. Montrer que $f : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ est continue si et seulement si pour tout $U \in \mathcal{B}$, $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$.

Exercice 2. Soient $(X, \mathcal{T}_X)$ et $(Y, \mathcal{T}_Y)$ deux espaces topologiques. Montrer que $f : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ est continue si et seulement si pour tout sous-ensemble A de X , $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Exercice 3. Soit $f : (X, d) \rightarrow (X', d')$. Montrer que f est continue si et seulement si, pour toute suite x_n qui converge vers un point $a \in X$, $f(x_n) \rightarrow f(a)$. Noter que la métrisabilité de l'espace d'arrivée n'est pas nécessaire.

Exercice 4. Soient $(X, \mathcal{T}_X)$ et $(Y, \mathcal{T}_Y)$ deux espaces topologiques et soit $f : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ une application continue et injective. Montrer que si $(Y, \mathcal{T}_Y)$ est séparé, alors $(X, \mathcal{T}_X)$ est séparé.

Exercice 5. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. On suppose que toutes les applications de X dans $\mathbb{R}$ (muni de la topologie euclidienne) sont continues. Montrer que $\mathcal{T}$ est la topologie discrète.

Exercice 6. Soient $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ deux topologies sur un ensemble X , et soit Y un sous-ensemble de X . On suppose que $\mathcal{T}_2$ est plus fine que $\mathcal{T}_1$. Que dire des topologies induites par $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ sur Y ?

Exercice 7. Soit (E, d) un espace métrique et soit A une partie non vide de E . Pour tout x dans E on appelle *distance de x à A* , notée $d(x, A)$, le nombre $\inf_{y \in A} d(x, y)$.

1. Montrer que l'application de E dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $d(x, A)$ est bien définie et s'annule sur A .
2. On note B l'ensemble des points $x \in E$ tels que $d(x, A) = 0$. Montrer que B est égal à l'adhérence de A .
3. Montrer que la fonction $d(\cdot, A)$ est 1-Lipschitzienne, puis qu'elle est continue.

Exercice 8. Soit $A = [0, 5[\subset \mathbb{R}$ muni de la topologie induite par la topologie euclidienne sur $\mathbb{R}$.

1. Les parties $]1, 2]$, $[3, 5[$, $[0, 3[$ de A sont-elles ouvertes, fermées ou ni l'un ni l'autre?
2. Donner les intérieurs et les adhérences de ces parties dans A .
3. Déterminer la boule ouverte de centre 1 et de rayon 2 dans A .

Exercice 9. Donner des exemples d'espaces topologiques pour lesquels il existe des parties non triviales

1. à la fois ouvertes et fermées,
2. ni ouvertes ni fermées.

Exercice 10. Dans $\mathbb{R}^2$ muni de la métrique euclidienne usuelle on considère le sous-ensemble

$$\Theta = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [-1, 1]\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1, x \neq 0\}.$$

Dessiner cette partie Θ de $\mathbb{R}^2$. Est-elle ouverte, fermée dans $\mathbb{R}^2$? Déterminer son intérieur et son adhérence.

Exercice 11. Soit A une partie d'un espace topologique X .

1. Montrer que $X \setminus (\overline{X \setminus A}) = \overset{\circ}{A}$.
2. Montrer que $X \setminus (X \setminus \overset{\circ}{A}) = \overline{A}$.

Exercice 12. On munit $\mathbb{R}$ de la topologie euclidienne. Déterminer l'adhérence et l'intérieur de chacun des sous-ensembles ci-après : $]0, 1[$, $[0, 1]$, $]0, 1]$, $]1, +\infty[$, $] - \infty, 1]$, $\mathbb{R}$, $\emptyset$, $\{0\}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$.

Exercice 13. Soit X un espace topologique et soit A une partie de X . On appelle *frontière* de A l'ensemble $\partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.

1. Montrer que $\partial \overline{A} \subset \partial A$ et $\partial \overset{\circ}{A} \subset \partial A$. Donner des exemples sur $\mathbb{R}$ où les inclusions sont strictes.
2. Montrer que $\partial(X \setminus A) = \partial A$.
3. Montrer que les parties $(X \setminus \overset{\circ}{A})$, ∂A et $\overset{\circ}{A}$ sont disjointes, et que $X = (X \setminus \overset{\circ}{A}) \cup \partial A \cup \overset{\circ}{A}$.

Exercice 14. Soit X un espace topologique et soient A et B des parties de X .

1. On suppose que $A \cup B = X$. Montrer que $\overline{A} \cup \overset{\circ}{B} = X$.
2. On suppose que $A \cap B = \emptyset$. Montrer que $\overline{A} \cap \overset{\circ}{B} = \emptyset$.

Exercice 15. Soit X un espace topologique et soient A et B deux sous-ensembles de X . On suppose que $A \cap B = \emptyset$ et que A et B sont denses dans E . Montrer que l'on a $\overset{\circ}{A} = \overset{\circ}{B} = \emptyset$.

Exercice 16. Soit E un espace vectoriel normé et soit F un sous-espace vectoriel de E . Montrer que si $\overset{\circ}{F} \neq \emptyset$, alors $F = E$.

Exercice 17. On rappelle que les valeurs d'adhérences d'une suite $u = (u_n)$ dans un espace topologique sont l'ensemble des limites de ses sous-suites. On note l'ensemble de ces valeurs d'adhérences $\Gamma(u)$

1. Montrer que

$$\Gamma(u) = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{\{u_n, n \geq N\}}.$$

2. On suppose que u_n est à valeur dans un espace vectoriel (ou affine). Soit $C(u)$ la suite des sommes de Césaro de u . Montrer que $\Gamma(C(u)) \subset \text{Conv}(\Gamma(u))$.
3. Soit $K \subset \mathbb{R}^d$ un polyèdre convexe. Montrer qu'il existe une suite (u_n) à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ telle que $C(u) = K$.
4. Soit $u = (u_n)$ une suite réelle. On suppose que $u_{n+1} - u_n \rightarrow 0$. Montrer que $\Gamma(u)$ est un intervalle.
5. Soit u une suite dans $\mathbb{R}^d$. On suppose que $u_{n+1} - u_n \rightarrow 0$. Montrer que $\Gamma(u)$ est connexe.

- Exercice 18.** 1. Montrer que $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ et $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ forment des ouverts denses de $M_n(\mathbb{R})$ et $M_n(\mathbb{C})$, respectivement. Indication : On pourra raisonner par contradiction, en utilisant le fait que $\det$ est polynômial : si $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ pas dense, on démontre que $\det$ s'annule sur $M_n(\mathbb{R})$.
2. En déduire que $\chi_{AB} = \chi_{BA} \ \forall A, B \in \text{GL}_n(K), K = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$.
3. En déduire aussi que $\chi_{tA} = \chi_A$ pour $A \in \text{GL}_n(K), K = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$.

- Exercice 19.** 1. En utilisant le fait que toute matrice complexe est trigonalisable, montrer que les matrices diagonalisables à valeurs propres distinctes forment un ouvert dense dans $M_n(\mathbb{C})$. Est-ce encore le cas dans $\mathbb{R}$?
2. En déduire que pour $A \in M_n(\mathbb{C}), \det(e^A) = e^{\text{Tr}A}$.
3. Pour $A \in M_n(\mathbb{C})$, démontrer le théorème de Cayley-Hamilton.

Commentaire : la plupart des résultats des deux derniers exercices pour les matrices réelles ou complexes restent valables dans un corps K quelconque, sans qu'une topologie soit disponible. Il faut alors trouver des preuves purement algébriques de ces résultats, qui sont en général plus compliquées. La densité est un raccourci précieux !

Exercice 20. Soit $n < m$ deux entiers. Montrer que l'ensemble des applications linéaires injectives est un ouvert dense de $\mathcal{L}(R^n, \mathbb{R}^m)$, et que l'ensemble des applications linéaires surjectives est un ouvert dense dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$.