

2025-2026

Topologie, feuille 4

Exercice 1. Soient $(X, \mathcal{T}_X)$ et $(Y, \mathcal{T}_Y)$ deux espaces topologiques, et soit $f : X \rightarrow Y$ une application continue et surjective.

1. Montrer que si $(X, \mathcal{T}_X)$ est séparable, alors $(Y, \mathcal{T}_Y)$ l'est aussi.
2. On suppose de plus que f est une application ouverte, montrer que si $(X, \mathcal{T}_X)$ est à base dénombrable (C2), alors $(Y, \mathcal{T}_Y)$ l'est aussi.

Exercice 2. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et soit $\mathcal{B}$ une base pour $\mathcal{T}$. Soit A une partie de X et soit $x \in X$. Montrer que $x \in \bar{A}$ si et seulement si pour tout $B \in \mathcal{B}$ contenant x , $A \cap B \neq \emptyset$.

Exercice 3. Soit $\mathcal{B} = \{]a, b[\mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$. On rappelle (voir feuille 2) que $\mathcal{B}$ est la base d'une topologie sur $\mathbb{R}$, et on note $\mathcal{T}$ la topologie engendrée par $\mathcal{B}$.

1. $\mathcal{T}$ est-elle séparable ?
2. $\mathcal{T}$ est-elle à base dénombrable (C2) ?

Exercice 4. On dit qu'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ vérifie la *condition de chaîne dénombrable* si toute famille d'ouverts deux à deux disjoints est finie ou dénombrable.

1. On suppose que $(X, \mathcal{T})$ est séparable. Montrer qu'il vérifie la condition de chaîne dénombrable.
2. Soit X un ensemble non-dénombrable et soit

$$\mathcal{T} = \{A \subset X \mid A = \emptyset \text{ ou } X \setminus A \text{ est fini ou dénombrable}\}.$$

- (a) Montrer que $\mathcal{T}$ est une topologie.
- (b) Montrer que $(X, \mathcal{T})$ vérifie la condition de chaîne dénombrable mais n'est pas séparable.

Exercice 5. Soient $(X, \mathcal{T}_X)$ et $(Y, \mathcal{T}_Y)$ deux espaces topologiques, et soit $f, g : X \rightarrow Y$ deux applications continues. Montrer que si $(Y, \mathcal{T}_Y)$ est séparé, alors $F = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ est un fermé de X .

Exercice 6. Soit (X, d) un espace métrique. Montrer que X , muni de la topologie associée à la métrique d , est T4 (normal).

Exercice 7. Soit (X, d) un espace métrique. On munit X de la topologie associée à la métrique d . Montrer que si X est séparable, alors X est à base dénombrable (C2).

Exercice 8. Soient X et Y deux espaces topologiques. On munit $X \times Y$ de la topologie produit.

1. Montrer que $X \times Y$ est régulier (T3) si et seulement si X et Y le sont.
2. Montrer que si $X \times Y$ est normal (T4), alors X et Y le sont. (La réciproque n'est pas vraie en général.)

Exercice 9. On munit l'ensemble $X = \{a, b, c, d, e\}$ de la topologie

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}, X\}.$$

Décrire les topologies induites sur $Y = \{a, c, e\}$ et $Z = \{b, c, d, e\}$.

Exercice 10. Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. Montrer que soit G est dense dans $\mathbb{R}$, soit il existe $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tel que $G = \alpha\mathbb{Z}$.

Exercice 11. Soient (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques, et soit $f : X \rightarrow Y$ une isométrie, c'est-à-dire

$$\forall x_1, x_2 \in X \quad d_Y(f(x_1), f(x_2)) = d_X(x_1, x_2).$$

On suppose que f est surjective; montrer que f est un homéomorphisme.

Connexité

Exercice 12. Les lettres X et Y sont-elles homéomorphes?

Exercice 13. Soient X et Y deux espaces topologiques.

1. Montrer que si $f : X \rightarrow Y$ est une application continue et que si $A \subset X$ est connexe, alors $f(A)$ est connexe dans Y .
2. Montrer que $X \times Y$ est connexe si et seulement si X et Y le sont.

Exercice 14. Soient X un espace topologique et A une partie de X . Montrer que A est une partie connexe de X si et seulement si pour tout couple (U_1, U_2) d'ouverts de X tel que $A \subset U_1 \cup U_2$ et $A \cap U_1 \cap U_2 = \emptyset$, alors $A \subset U_1$ ou $A \subset U_2$.

Exercice 15. Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction continue.

1. En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer qu'il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.
2. En utilisant la connexité de $[0, 1]$, montrer qu'il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

Exercice 16. 1. Les espaces métriques $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ sont-ils connexes? En déduire que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes.

2. Montrer que $\mathbb{S}^1$ (le cercle unité dans $\mathbb{R}^2$) n'est homéomorphe à aucune partie de $\mathbb{R}$.

Exercice 17 (Groupes Topologiques). Soit G un groupe commutatif dont la loi est notée $\cdot$ muni d'une topologie $\mathcal{T}$ telle que les applications¹

$$\begin{aligned}\bullet : G \times G &\rightarrow G \\ (g_1, g_2) &\mapsto g_1 \cdot g_2\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\varphi : G &\rightarrow G \\ g &\mapsto \varphi(g) = g^{-1}\end{aligned}$$

soient continues.

Soit H un sous-groupe de G ; on parle de sous-groupe topologique en le munissant de la topologie induite par celle de G . On note e l'élément neutre de G . On munit le quotient G/H de la topologie quotient.

1. Montrer que pour h fixé dans G l'application $\tau_h : G \rightarrow G$ qui à tout élément g de G associe $\tau_h(g) = g \cdot h$ est un homéomorphisme.
2. Montrer que H est un ouvert de G si et seulement si $e \in \mathring{H}$.
3. Montrer que si H est ouvert alors il est aussi fermé.
4. Montrer que $C_{\{e\}}$, la composante connexe de e dans G , est un sous-groupe topologique de G .
5. Montrer que si G est connexe, alors il ne possède pas de sous-groupe strict d'intérieur non vide et non réduit à e .
6. Montrer que si H et G/H sont connexes alors G est connexe.

Exercice 18. Soit le peigne dans $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ donné par

$$P = (\mathbb{Q} \times [0, 1]) \cup (\mathbb{R} \times \{0\}) \subset \mathbb{R}^2.$$

Montrer que P est connexe (et même connexe par arcs), mais pas localement connexe.

Exercice 19. Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y = \sin \frac{1}{x}\} \subset (\mathbb{R}^2, d_\infty)$.

1. Montrer que A est connexe, connexe par arcs, localement connexe.
2. Déterminer $\bar{A}$ et montrer que $\bar{A}$ est connexe mais qu'il n'est ni connexe par arcs, ni localement connexe.

Exercice 20 (Connexité des sous-groupes de matrices réelles).

1. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ et $O_n(\mathbb{R})$ ne sont pas connexes.
2. Rappeler le théorème de réductions des matrices orthogonales (diagonalisation par blocs). En déduire que $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arc (ce sous-groupe désigne les matrices orthogonales de déterminant 1).
3. On rappelle le théorème de décomposition SO : toute matrice inversible A s'écrit $A = SO$ où S est une matrice symétrique définie positive et O est une matrice orthogonale. Lorsque $\det A > 0$, montrer que $O \in SO_n(\mathbb{R})$.
4. Montrer que si $\det A > 0$, il existe un chemin continu de matrices inversibles entre A et Id .
5. En déduire que $GL_n^+(\mathbb{R}) := \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det M > 0\}$ est connexe par arc.
6. En déduire que $GL_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes, qui sont connexes par arc.

1. $G \times G$ est muni de la topologie produit.

7. On rappelle (ou pas) le résultat suivant : toute matrice de $SL_n(\mathbb{R}) := \{\det A = 1\}$ est un produit de matrices de transvections (qui sont des matrices qui sont l'identité sur la diagonale et ayant exactement un élément non-diagonal non-nul). Montrer que $SL_n(\mathbb{R})$ est connexe par arc.
8. Dédire de la question précédente une autre preuve de la connexité de $GL_n^+(\mathbb{R})$.

Exercice 21 (Une autre démonstration de la connexité de $GL_n^+(\mathbb{R})$). On admettra dans un premier temps la version réelle du théorème de densité des matrices à valeurs propres distinctes dans $M_n(\mathbb{C})$ établie dans le dernier TD :

Les matrices réelles à valeurs propres complexes distinctes sont denses dans $M_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que toute matrice $A \in GL_n^+(\mathbb{R})$ est reliable dans $GL_n^+(\mathbb{R})$ à une matrice A' ayant ses valeurs propres complexes distinctes.
2. Montrer que A' est diagonale par blocs avec des blocs de dimension 2 qui sont des matrices de similitudes directes et des blocs scalaires.
3. Dans $GL_n(\mathbb{R})$, relier A' à une matrice A'' diagonale par blocs avec des blocs de dimension 1 qui sont des 1 ou des -1 et des blocs de dimension 2 qui sont des matrices de rotations.
4. Dans $GL_n(\mathbb{R})$, relier A'' à une matrice A''' diagonale avec des $+1$ ou des -1 sur la diagonale.
5. Montrer que la matrice A''' est dans $GL_n^+(\mathbb{R})$ et en déduire que A''' a un nombre pair de -1 .
6. Montrer que la matrice $\text{Diag}(-1, -1)$ est reliable dans $GL_n^+(\mathbb{R})$ à l'identité.
7. En déduire que $GL_n^+(\mathbb{R})$ est connexe.

Exercice 22 (Connexité de $GL_n(\mathbb{C})$). 1. Montrer que le complémentaire d'un nombre fini de points dans $\mathbb{C}$ est connexe.

2. Soit $A, B \in GL_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe au plus n valeurs de $t \in \mathbb{C}$ pour lesquels $A + tB$ n'est pas inversible.
3. En déduire que $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe.