Université de Strasbourg **L3 Mathématiques**

2025-2026

Topologie, feuille 6 : suites de Cauchy, espaces complets

Exercice 1. Un sous-espace métrique d'un espace métrique complet est-il complet ?

Exercice 2. Soit (E, d) un espace métrique et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans (E, d). Montrer que si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente, alors elle est convergente.

Exercice 3. Soit X un ensemble et soient d_1 et d_2 deux distances sur X. On suppose que d_1 et d_2 sont équivalentes, c'est-à-dire qu'il existe $C_1, C_2 > 0$ telles que

$$\forall x, y \in X \qquad C_1 d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq C_2 d_1(x, y),$$

et que l'espace métrique (X, d_1) est complet. Montrer que (X, d_2) est complet.

Exercice 4. Soit X un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni de deux normes équivalentes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$.

1. Montrer que $(X, \|\cdot\|)$ et $(X, \|\cdot\|')$ ont les mêmes suites convergentes.
2. Montrer que $(X, \|\cdot\|)$ et $(X, \|\cdot\|')$ ont les mêmes suites de Cauchy.
3. En déduire que $(X, \|\cdot\|)$ est complet si et seulement si $(X, \|\cdot\|')$ l'est.

Exercice 5. Les espaces métriques suivants, munis de la distance induite par la distance usuelle de $\mathbb{R}$ (respectivement la distance euclidienne de $\mathbb{R}^2$), sont-ils complets ?

1. $\mathbb{R}$.
2. $[0, 1]$.
3. $\mathbb{R}^2$.
4. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.
5. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x\}$.
6. $\mathbb{N}$.

Exercice 6. Soit $X =]0, +\infty[$ muni de la distance δ définie par

$$\forall x, y \in X \qquad \delta(x, y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$$

(voir exercice 24 TD1 pour la preuve qu'il s'agit bien d'une distance). L'espace métrique (X, δ) est-il complet ?

Exercice 7. Soit $E = \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme $\|\cdot\|$ définie par

$$\forall f \in E \qquad \|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

Montrer que $(E, \|\cdot\|)$ est complet.

Exercice 8. Soit $X = \mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Vérifier que l'application d définie par
$$\forall f,g \in X \qquad d(f,g) = \int_{-1}^{1} |f(t)-g(t)|\mathrm{d}t$$
est une distance sur X.
2. Pour tout entier $n \geq 1$, on note f_n l'élément de X défini par
$$\forall t \in [0,1] \qquad f_n(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 \leq t \leq -\frac{1}{n}, \\ nt & \text{si } -\frac{1}{n} \leq t \leq \frac{1}{n}, \\ 1 & \text{si } \frac{1}{n} \leq t \leq 1. \end{cases}$$
Montrer que pout tous $n,p \geq 1$, $d(f_n,f_p) \leq \max(\frac{2}{n},\frac{2}{p})$. En déduire que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ est de Cauchy.
3. L'espace métrique (X,d) est-il complet ?

Exercice 9. Soit X un ensemble et soit $E = B(X,\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions bornées de X dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer qu'on définit une norme $\|\cdot\|$ sur E en posant
$$\forall f \in E \qquad \|f\| = \sup_{x\in X} |f(x)|.$$
2. Montrer que $(E,\|\cdot\|)$ est complet.

Exercice 10. Soit (X,d) un espace métrique complet, et soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fermés non vides de X dont le diamètre (voir exercice 12 TD 5) tend vers zéro.

1. Montrer que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.
2. Montrer que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ contient exactement un point.

Exercice 11. Soit (X,d) un espace métrique complet. Soit $f : X \to X$ une application strictement contractante, c'est-à-dire qu'il existe $k \in]0,1[$ tel que
$$\forall x,y \in X \qquad d(f(x),f(y)) \leq k\ d(x,y).$$

1. Montrer que f est continue.
2. Soit $x \in X$ et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $x_0 = x$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.
3. Montrer que f admet un unique point fixe.

Exercice 12. Soit E l'ensemble des suites à valeurs réelles qui convergent.

1. Montrer qu'on définit une norme sur E en posant
$$\forall u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E \qquad \|u\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|.$$
2. Montrer que $(E,\|\cdot\|)$ est complet.

Exercice 13. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On rappelle qu'on dit qu'une série $\sum_{n\geq 0} u_n$ d'éléments de E est absolument convergente si la série $\sum_{n\geq 0} \|u_n\|$ converge. Montrer que E est complet si et seulement si toute série absolument convergente d'éléments de E est convergente.

Exercice 14 (Lemme du Demi-Maximum)**.** Soit (X, d) un espace métrique complet et soit $f : X \to]0, +\infty[$ une fonction continue. On se propose de montrer la proposition suivante :

($\mathcal{P}$) il existe un point x^* dans X tel que $\forall y \in B\left(x^*, \frac{1}{\sqrt{f(x^*)}}\right)$, on ait $f(y) \leq 2f(x^*)$.

1. Donner la négation de $\mathcal{P}$.
2. On suppose que ($\mathcal{P}$) est fausse. Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de E telle que $f(x_0) > 0$ et pour tout $n \geq 1$, $f(x_n) > 2f(x_{n-1})$ et $d(x_n, x_{n-1}) \leq \frac{1}{\sqrt{f(x_{n-1})}}$.
3. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et conclure.