

# NOTES DE COURS : STRUCTURES DE POISSON

NIKITA MARKARIAN

## 1. CHAMPS DE VECTEURS, DÉRIVATIONS ET FORMES DIFFÉRENTIELLES

**Bibliographie.** Voir [KN63, Section 1.1], [Arn78, Ch. 7], [Mic08, Ch. 3.9].

1.1. **Variétés lisses et coordonnées.** Soit  $M$  une variété lisse réelle de dimension  $n$ . Par définition,  $M$  est un espace topologique séparé, localement homéomorphe à  $\mathbb{R}^n$ , muni d'un atlas de cartes  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  tel que les changements de coordonnées soient des difféomorphismes lisses.

Dans une carte  $(U, (x^1, \dots, x^n))$ , une fonction  $f \in C^\infty(M)$  s'identifie localement à une fonction lisse de  $n$  variables.

Pour  $p \in M$ , l'espace tangent  $T_p M$  peut être défini comme l'espace des dérivations

$$D : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

satisfaisant la règle de Leibniz

$$D(fg) = f(p)D(g) + g(p)D(f).$$

1.2. **Champs de vecteurs.** Un *champ de vecteurs* sur  $M$  est une section lisse du fibré tangent  $TM$ . L'ensemble des champs de vecteurs est noté  $\mathfrak{X}(M)$ ; c'est un module sur  $C^\infty(M)$ .

Dans une carte locale,

$$X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

**Crochet de Lie.** À deux champs de vecteurs  $X, Y$  on associe leur *crochet de Lie*

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)).$$

1.3. **Opérateurs différentiels et dérivations.** Soit  $A = C^\infty(M)$ . Un *opérateur différentiel*  $D : A \rightarrow A$  est une application linéaire qui s'écrit localement comme une combinaison finie de dérivées partielles à coefficients lisses.

Un opérateur différentiel d'ordre 1 vérifiant

$$D(fg) = D(f)g + fD(g)$$

est une *dérivation*.

Tout champ de vecteurs définit une dérivation, et réciproquement :

$$\mathfrak{X}(M) \simeq \text{Der}(C^\infty(M)).$$

Le commutateur d'opérateurs

$$[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$$

coïncide, pour les dérivations, avec le crochet de Lie.

**1.4. Automorphismes infinitésimaux.** Soit  $\text{Diff}(M)$  le groupe des difféomorphismes de  $M$ . Un *automorphisme infinitésimal* est une famille à un paramètre

$$(\varphi_t)_{|t|<\varepsilon} \subset \text{Diff}(M), \quad \varphi_0 = \text{id},$$

dépendant lissement de  $t$ .

À une telle famille on associe un champ de vecteurs

$$X_p = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t(p).$$

Ainsi, les champs de vecteurs sont exactement les générateurs infinitésimaux des flots de difféomorphismes.

**1.5. Différentiels de Kähler.** Soit  $A$  une algèbre commutative sur  $\mathbb{R}$ . Le module des *différentiels de Kähler*  $\Omega_A^1$  est engendré par des symboles  $da$  satisfaisant

$$d(a+b) = da + db, \quad d(ab) = a db + b da.$$

Il vérifie la propriété universelle suivante : toute dérivation  $D : A \rightarrow M$  se factorise de manière unique par  $d$ .

Dans le cas  $A = C^\infty(M)$ , on retrouve les 1-formes différentielles.

**1.6. Formes différentielles et dérivations naturelles.** Une  $k$ -*forme différentielle* sur  $M$  est une application

$$\omega : \mathfrak{X}(M)^k \longrightarrow C^\infty(M)$$

$C^\infty(M)$ -multilinéaire, alternée et lisse.

On note  $\Omega^k(M)$  l'espace des  $k$ -formes différentielles sur  $M$ .

De manière équivalente, une  $k$ -forme différentielle est une section lisse du fibré

$$\Lambda^k T^*M.$$

Dans une carte locale  $(x^1, \dots, x^n)$ , toute  $k$ -forme s'écrit

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k},$$

où  $\omega_{i_1 \dots i_k} \in C^\infty(U)$ .

L'espace gradué

$$\Omega^\bullet(M) = \bigoplus_{k \geq 0} \Omega^k(M)$$

est muni du produit extérieur  $\wedge$ , qui en fait une algèbre graduée commutative.

L'algèbre  $\Omega^\bullet(M)$  est munie de la différentielle extérieure

$$d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M), \quad d^2 = 0.$$

À un champ de vecteurs  $X$  on associe :

— la contraction  $\iota_X : \Omega^{k+1}(M) \rightarrow \Omega^k(M)$ ,

— la dérivée de Lie  $\mathcal{L}_X : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(M)$ .

**1.7. Dérivation de flot et formule de Cartan.** La dérivée de Lie est définie par

$$\mathcal{L}_X T = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t^* T,$$

où  $(\varphi_t)$  est le flot de  $X$ .

**Théorème 1** (Formule de Cartan).

$$\mathcal{L}_X = d \circ \iota_X + \iota_X \circ d.$$

1.8. **Point de vue algébrique.** Les opérateurs

$$d, \iota_X, \mathcal{L}_X$$

sont des dérivations graduées de degrés +1, -1 et 0. La formule de Cartan s'écrit

$$\mathcal{L}_X = [d, \iota_X],$$

où  $[\cdot, \cdot]$  désigne le super-commutateur.

### Exercices.

- (1) **Champ associé à une rotation du plan.** Considérons la rotation du plan  $\mathbb{R}^2$  donnée par

$$\varphi_t(x, y) = (x \cos t - y \sin t, x \sin t + y \cos t).$$

- (a) Montrer que  $(\varphi_t)$  définit un flot de difféomorphismes.  
 (b) Calculer le champ de vecteurs infinitésimal associé.  
 (c) Décrire géométriquement ses lignes de flot.

- (2) **Non-invariance de la divergence.** Sur  $\mathbb{R}^n$ , on définit la divergence d'un champ de vecteurs

$$X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

par

$$\operatorname{div}(X) = \sum_{i=1}^n \partial_i(X^i).$$

- (a) Montrer que la divergence n'est pas invariante par l'action générale de  $\operatorname{Diff}(M)$ .  
 (b) \* Déterminer le sous-groupe de  $\operatorname{Diff}(M)$  qui préserve l'opération de divergence.  
 (3) \* **Crochet de Lie et difféomorphismes infinitésimaux.** Soient  $X, Y$  deux champs de vecteurs sur  $M$ , et  $(\varphi_t), (\psi_s)$  leurs flots respectifs.  
 (a) Considérer le commutateur

$$\varphi_t \circ \psi_s \circ \varphi_t^{-1} \circ \psi_s^{-1}.$$

- (b) Montrer que son développement à l'ordre  $ts$  définit un champ de vecteurs.  
 (c) Vérifier que ce champ coïncide avec le crochet de Lie  $[X, Y]$ .

**Remarque.** Ces exercices illustrent le principe fondamental selon lequel le crochet de Lie est le commutateur infinitésimal du groupe des difféomorphismes.

## 2. STRUCTURES DE POISSON ET STRUCTURES SYMPLECTIQUES

2.1. **Algèbre de Schouten–Nijenhuis.** Soit  $M$  une variété lisse. On note

$$\mathfrak{X}^k(M) = \Gamma(M, \Lambda^k TM)$$

l'espace des champs de  $k$ -vecteurs sur  $M$ . L'espace gradué

$$\mathfrak{X}^\bullet(M) = \bigoplus_{k \geq 0} \mathfrak{X}^k(M)$$

est muni d'une structure d'algèbre de Lie graduée, appelée *crochet de Schouten–Nijenhuis*.

Le crochet

$$[\cdot, \cdot]_{SN} : \mathfrak{X}^k(M) \times \mathfrak{X}^\ell(M) \rightarrow \mathfrak{X}^{k+\ell-1}(M)$$

prolonge le crochet de Lie des champs de vecteurs et vérifie :

- une antisymétrie graduée,
- l'identité de Jacobi graduée,
- une règle de Leibniz graduée par rapport au produit extérieur.

## 2.2. Structures de Poisson.

**Définition.** Une *structure de Poisson* sur  $M$  est un bivecteur

$$\pi \in \mathfrak{X}^2(M)$$

tel que

$$[\pi, \pi]_{SN} = 0.$$

Il définit un crochet bilinéaire sur  $C^\infty(M)$  par

$$\{f, g\} = \pi(df, dg),$$

qui fait de  $C^\infty(M)$  une algèbre de Lie et satisfait la règle de Leibniz.

Une structure de Poisson peut être vue comme la donnée du terme du premier ordre dans une déformation du produit commutatif :

$$f \star g = fg + \hbar \{f, g\} + O(\hbar^2).$$

La condition  $[\pi, \pi] = 0$  correspond à l'associativité à l'ordre 2.

## 2.3. Structures symplectiques.

**Définition.** Une *structure symplectique* sur  $M$  est une 2-forme différentielle  $\omega \in \Omega^2(M)$  telle que :

- $d\omega = 0$ ,
- $\omega$  est non dégénérée.

La non-dégénérescence implique que l'application

$$TM \rightarrow T^*M, \quad X \mapsto \iota_X \omega$$

est un isomorphisme de fibrés vectoriels.

À une forme symplectique  $\omega$  on associe un bivecteur  $\pi = \omega^{-1}$ , qui définit une structure de Poisson. Réciproquement, une structure de Poisson non dégénérée provient d'une forme symplectique.

**2.4. Champs hamiltoniens.** Soit  $(M, \omega)$  une variété symplectique. Pour toute fonction  $f \in C^\infty(M)$ , il existe un unique champ de vecteurs  $X_f$  tel que

$$\iota_{X_f} \omega = df.$$

Le champ  $X_f$  est appelé *champ hamiltonien* associé à  $f$ .

On a les relations

$$X_{\{f, g\}} = [X_f, X_g], \quad \mathcal{L}_{X_f} \omega = 0.$$

Ainsi, les champs hamiltoniens sont exactement les champs de vecteurs qui préservent la structure symplectique et admettent localement une fonction génératrice.

**2.5. Théorème de Darboux et rigidité symplectique.** Le résultat fondamental de la géométrie symplectique locale est le théorème de Darboux, qui montre l'absence totale d'invariants locaux pour les structures symplectiques.

**Théorème de Darboux.** Soit  $(M, \omega)$  une variété symplectique de dimension  $2n$  et  $p \in M$ . Il existe un système de coordonnées locales

$$(q_1, p_1, \dots, q_n, p_n)$$

au voisinage de  $p$  tel que

$$\omega = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i.$$

**2.6. Structure symplectique du fibré cotangent.** Soit  $M$  une variété lisse. Le fibré cotangent  $T^*M$  est muni d'une 1-forme canonique  $\theta$ , définie par

$$\theta_{(x,\xi)}(v) = \xi(d\pi(v)),$$

où  $\pi : T^*M \rightarrow M$  est la projection naturelle.

La 2-forme

$$\omega = d\theta$$

est une forme symplectique canonique sur  $T^*M$ .

**2.7. Quantification et opérateurs différentiels.** La structure symplectique de  $T^*M$  fournit un cadre géométrique pour la *quantification*. Les fonctions sur  $T^*M$  polynomiales le long des fibres correspondent aux symboles d'opérateurs différentiels sur  $M$ .

Pour les fonctions polynomiales la quantification *l'algèbre de Weyl*, définie par les relations

$$[x_i, x_j] = [\partial_i, \partial_j] = 0 \quad [x_i, \partial_j] = \hbar \delta_{ij}.$$

### Exercices.

- (1) **Champs hamiltoniens et flots.** On munit  $\mathbb{R}^2$  des coordonnées  $(q, p)$  et de la forme symplectique canonique

$$\omega = dq \wedge dp.$$

- (a) Calculer le champ hamiltonien associé à

$$f(q, p) = p, \quad f(p, q) = p^2 + q^2, \quad f(p, q) = pq.$$

Calculer explicitement le champ hamiltonien  $X_f$  associé à  $f$ .

- (b) Déterminer le flot du champ  $X_f$  et montrer qu'il est défini pour tout temps  $t \in \mathbb{R}$ .  
 (c) Montrer que le flot de  $X_f$  préserve la forme symplectique  $\omega$ .  
 (d) Décrire géométriquement l'action de ce flot sur le plan  $(q, p)$ .

- (2) **Déformation du produit et structure de Poisson.**

Soit  $M$  une variété lisse. On considère une déformation formelle du produit usuel sur l'algèbre  $C^\infty(M)$  à coefficients dans  $\mathbb{R}[\hbar]/(\hbar^2)$ , de la forme

$$f \star g = fg + \hbar B_1(f, g),$$

où  $\hbar$  est un paramètre formel et  $B_1$  est un opérateur bilinéaire différentiel sur  $C^\infty(M)$ .

On suppose que le produit  $\star$  est associatif, c'est-à-dire

$$(f \star g) \star h = f \star (g \star h),$$

et que 1 est une unité pour ce produit.

- (a) Montrer que si  $B_1$  est symétrique, alors il peut être éliminé par un changement de variables formel de la forme

$$f \longmapsto f + \hbar D(f),$$

où  $D$  est un opérateur différentiel linéaire sur  $C^\infty(M)$ . (On parle alors de *transformation de jauge* de la déformation.)

- (b) Montrer que l'associativité à l'ordre  $\hbar$  implique que la partie antisymétrique

$$\{f, g\} := B_1(f, g) - B_1(g, f)$$

est indépendante du choix de jauge et définit un crochet bilinéaire antisymétrique sur  $C^\infty(M)$ , qui est une *bidérivation*, c'est-à-dire qu'il vérifie la règle de Leibniz par rapport à chacune des variables :

$$\{fg, h\} = f\{g, h\} + g\{f, h\}, \quad \{f, gh\} = g\{f, h\} + h\{f, g\}.$$

En déduire que le crochet  $\{\cdot, \cdot\}$  est donné par un champ de bivecteurs sur  $M$ .

- (c) Déduire qu'après application d'une transformation de jauge, le terme  $B_1$  d'une déformation comme ci-dessus peut être supposé donné par un bivecteur.
- (d) Montrer que, pour que la déformation s'étende à  $\mathbb{R}[\hbar]/(\hbar^3)$ , ce bivecteur doit définir une structure de Poisson sur  $M$ .
- (3) **Preuve constructive du théorème de Darboux.** Soit  $(M, \omega)$  une variété symplectique et  $p \in M$ .

- (a) Montrer qu'il existe une fonction  $f \in C^\infty(M)$  telle que  $df(p) \neq 0$ .
- (b) Montrer que le champ hamiltonien  $X_f$  est non nul dans un voisinage de  $p$ .
- (c) Résoudre localement l'équation

$$X_f(g) = 1$$

et en déduire l'existence d'une fonction  $g$  telle que  $\{f, g\} = 1$ .

- (d) Montrer que la forme symplectique s'écrit alors

$$\omega = df \wedge dg + \omega',$$

où  $\omega'$  est une 2-forme fermée qui s'annule sur  $X_f$  et  $X_g$ .

- (e) Montrer que  $\omega'$  induit une structure symplectique sur le quotient local par les flots de  $X_f$  et  $X_g$ , et conclure par récurrence.

### 3. GROUPES ET ALGÈBRES DE LIE

**Bibliographie.** Voir [Ser92, Ch. 1, 3, 5], [DK00, Ch. 1], [Hal10, Ch. 1-4].

**3.1. Groupes de Lie.** Un *groupe de Lie* est une variété lisse  $G$  munie d'une structure de groupe pour laquelle les applications de multiplication  $(g, h) \mapsto gh$  et d'inversion  $g \mapsto g^{-1}$  sont lisses.

Une *action lisse* d'un groupe de Lie  $G$  sur une variété lisse  $M$  est une application lisse

$$G \times M \rightarrow M, \quad (g, x) \mapsto g \cdot x,$$

telle que  $e \cdot x = x$  et  $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$ .

Les *translations à gauche* et à *droite* sur  $G$  sont des actions de  $G$  sur soi-même et sont définies par

$$L_g(h) = g^{-1}h, \quad R_g(h) = hg.$$

Elles induisent des isomorphismes du fibré tangent.

L'action adjoint  $\text{Ad} : G \rightarrow \text{Aut}(G)$  est défini par

$$\text{Ad}_g(h) = ghg^{-1}.$$

**3.2. Algèbres de Lie.** Une *algèbre de Lie* est un espace vectoriel  $\mathfrak{g}$  muni d'un crochet bilinéaire antisymétrique  $[\cdot, \cdot]$  satisfaisant l'identité de Jacobi.

L'*algèbre de Lie* d'un groupe de Lie  $G$  est l'espace tangent  $\mathfrak{g} = T_e G$ , identifié aux champs de vecteurs invariants à gauche. Le crochet de Lie est donné par le crochet des champs invariants.

Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie et  $M$  une variété lisse. Une *action de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  sur  $M$*  est un morphisme d'algèbres de Lie

$$\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{X}(M),$$

où  $\mathfrak{X}(M)$  désigne l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur  $M$ , munie du crochet de Lie usuel. Autrement dit, à chaque  $X \in \mathfrak{g}$  on associe un champ de vecteurs  $\rho(X)$  sur  $M$  de telle sorte que

$$\rho([X, Y]) = [\rho(X), \rho(Y)].$$

Cette action décrit le comportement infinitésimal d'une action de groupe.

Lorsque  $G$  est un groupe de Lie agissant sur  $M$ , l'action de  $G$  induit naturellement une action infinitésimale de son algèbre de Lie  $\mathfrak{g} = T_e G$ . À tout  $X \in \mathfrak{g}$  on associe le *champ fondamental*

$$X_M(x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(tX) \cdot x, \quad x \in M.$$

La *représentation adjointe* d'un groupe de Lie  $G$  est l'application

$$\text{Ad} : G \longrightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g}),$$

définie par

$$\text{Ad}_g = d(L_g \circ R_{g^{-1}})_e.$$

La différentielle de l'application  $\text{Ad}$  en l'élément neutre définit l'*action adjointe infinitésimale*

$$\text{ad} : \mathfrak{g} \longrightarrow \text{End}(\mathfrak{g}), \quad \text{ad}_X = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \text{Ad}_{\exp(tX)}.$$

Le crochet de Lie sur l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  est alors autrement défini par

$$[X, Y] = \text{ad}_X(Y).$$

**3.3. Algèbre enveloppante universelle.** Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie réelle. On note

$$T(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{k \geq 0} \mathfrak{g}^{\otimes k}$$

l'algèbre tensorielle sur  $\mathfrak{g}$ .

L'*algèbre enveloppante universelle* de  $\mathfrak{g}$  est définie comme le quotient

$$U(\mathfrak{g}) := T(\mathfrak{g})/I,$$

où  $I$  est l'idéal bilatère engendré par les éléments

$$X \otimes Y - Y \otimes X - [X, Y], \quad X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Autrement dit,  $U(\mathfrak{g})$  est l'algèbre associative engendrée par les éléments de  $\mathfrak{g}$ , avec les relations

$$XY - YX = [X, Y].$$

Cette algèbre vérifie la propriété universelle suivante : pour toute algèbre associative  $A$  et tout morphisme d'algèbres de Lie  $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow A$ , il existe un unique morphisme d'algèbres associatives

$$\Phi : U(\mathfrak{g}) \rightarrow A$$

tel que  $\Phi|_{\mathfrak{g}} = \varphi$ .

On peut réaliser l'algèbre enveloppante universelle comme l'algèbre des opérateurs différentiels invariants par translations à gauche. Son centre est l'algèbre des opérateurs différentiels bi-invariants.

L'algèbre  $U(\mathfrak{g})$  est munie d'une structure de *bigèbre*, dont le coproduit est défini par

$$\Delta(X) = X \otimes 1 + 1 \otimes X, \quad X \in \mathfrak{g}.$$

**3.4. Application exponentielle et isomorphisme PBW.** L'*application exponentielle* est définie par

$$\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G,$$

en envoyant  $X$  sur la valeur à  $t = 1$  du flot du champ invariant correspondant.

Le théorème de Poincaré–Birkhoff–Witt (PBW) affirme que l'application symétrisation

$$\text{Sym}(\mathfrak{g}) \rightarrow U(\mathfrak{g})$$

est un isomorphisme de représentations adjointes.

La *formule Baker–Campbell–Hausdorff* décrit explicitement le produit de deux exponentielles dans un voisinage de l'origine de  $\mathfrak{g}$ . Pour  $X, Y$  suffisamment petits dans  $\mathfrak{g}$ , on a

$$\log(\exp(X)\exp(Y)) = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \frac{1}{12}[X, [X, Y]] - \frac{1}{12}[Y, [X, Y]] + \dots$$

où les termes d'ordre supérieur sont des combinaisons linéaires finies de crochets itérés de  $X$  et  $Y$ .

Cette série est universelle (elle ne dépend que de la structure d'algèbre de Lie) et exprime la loi de groupe en coordonnées exponentielles.

**3.5. Structure de Poisson de Kirillov–Kostant–Souriau.** Le dual  $\mathfrak{g}^*$  d'une algèbre de Lie est muni d'une structure de Poisson canonique, appelée *structure de Kirillov–Kostant–Souriau*.

Pour  $f, g \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ , le crochet de Poisson est défini par

$$\{f, g\}(\xi) = \langle \xi, [df(\xi), dg(\xi)] \rangle.$$

Le crochet de Poisson est tangent aux orbites de l'action coadjointe. Il induit sur chaque orbite une structure de Poisson non dégénérée ; autrement dit, chaque orbite coadjointe est naturellement munie d'une structure symplectique.

**3.6. Lien avec la quantification et les produits  $\star$ .** Les constructions précédentes fournissent un cadre naturel pour la *quantification* des structures de Poisson associées aux algèbres de Lie.

L'isomorphisme de Poincaré–Birkhoff–Witt permet d'identifier, en tant qu'espaces vectoriels, l'algèbre symétrique  $\text{Sym}(\mathfrak{g})$ , que l'on peut interpréter comme l'algèbre des fonctions polynomiales sur  $\mathfrak{g}^*$  avec l'algèbre enveloppante universelle  $U(\mathfrak{g})$ .

Le produit associatif de  $U(\mathfrak{g})$ , transporté sur  $\text{Sym}(\mathfrak{g})$  via l'isomorphisme PBW, définit alors un produit associatif non commutatif, appelé *produit  $\star$* , qui est une déformation du produit commutatif usuel des fonctions.

Ainsi, l'algèbre enveloppante universelle peut être interprétée comme une quantification de la variété de Poisson  $\mathfrak{g}^*$ .

**Exercices.**(1) **Algèbres de Lie de  $SO(3)$  et  $SU(2)$ .**

- (a) Déterminer l'algèbre de Lie  $\mathfrak{so}(3)$  du groupe  $SO(3)$  et la décrire comme l'espace des matrices réelles antisymétriques  $3 \times 3$ .
- (b) Déterminer l'algèbre de Lie  $\mathfrak{su}(2)$  du groupe  $SU(2)$  et la décrire comme l'espace des matrices complexes  $2 \times 2$  anti-hermitiennes et de trace nulle.
- (c) Montrer que les algèbres de Lie  $\mathfrak{so}(3)$  et  $\mathfrak{su}(2)$  sont isomorphes en exhibant un isomorphisme explicite (par exemple à l'aide des matrices de Pauli).
- (d) Montrer que le groupe  $SU(2)$  est un revêtement double de  $SO(3)$  et que l'on a un isomorphisme de groupes de Lie

$$SO(3) \simeq SU(2)/\{\pm 1\}.$$

(2) **Structures de Poisson linéaires et affines.** Soit  $V$  un espace vectoriel réel de dimension finie.

- (a) On appelle *structure de Poisson linéaire* sur  $V$  une structure de Poisson telle que le crochet de deux fonctions linéaires soit encore une fonction linéaire. Elle est alors nécessairement de la forme

$$\{x_i, x_j\} = \sum_k c_{ij}^k x_k,$$

où les coefficients  $c_{ij}^k$  sont des constantes. Montrer qu'une telle structure est équivalente à la donnée d'une algèbre de Lie sur l'espace dual  $V^*$ , alors  $c_{ij}^k$  sont les constants structure d'algèbre de Lie.

- (b) On appelle *structure de Poisson affine* sur  $V$  une structure de Poisson telle que le crochet de deux fonctions linéaires soit une fonction affine. Elle est alors de la forme

$$\{x_i, x_j\} = \sum_k c_{ij}^k x_k + \omega_{ij},$$

où  $(c_{ij}^k)$  définissent une algèbre de Lie sur  $V^*$  et où  $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$  sont des constantes. Montrer qu'une telle structure est équivalente à la donnée d'une algèbre de Lie sur  $V^*$ , munie d'une extension centrale

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \widehat{\mathfrak{g}} \longrightarrow \mathfrak{g} \longrightarrow 0$$

munie du crochet

$$[(X, a), (Y, b)] = ([X, Y], \omega(X, Y)).$$

La forme bilinéaire antisymétrique  $\omega \in \Lambda^2 V^*$  est une *cocycle de Lie* pour l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g} = V^*$ , c'est-à-dire qu'il vérifie

$$\omega([X, Y], Z) + \omega([Y, Z], X) + \omega([Z, X], Y) = 0, \quad X, Y, Z \in \mathfrak{g}.$$

- (c) Montrer que si le cocycle  $\omega$  est un cobord, c'est-à-dire s'il existe  $\ell \in \mathfrak{g}^*$  tel que

$$\omega(X, Y) = \ell([X, Y]),$$

alors la structure de Poisson affine correspondante est obtenue à partir de la structure de Poisson linéaire par translation de  $V$ .

- (d) Quelle est la quantification de la structure de Poisson affine ?

**(3) Orbites coadjointes et drapeaux complets.**

On identifie l'algèbre de Lie  $\mathfrak{u}(n)$  au sous-espace des matrices anti-hermitiennes, et son dual  $\mathfrak{u}(n)^*$  à l'espace des matrices hermitiennes via la forme bilinéaire invariante

$$\langle A, B \rangle = \text{Tr}(AB).$$

- (a) Montrer que, sous cette identification, l'action coadjointe de  $U(n)$  sur  $\mathfrak{u}(n)^*$  s'identifie à l'action par conjugaison :

$$H \longmapsto gHg^{-1}, \quad g \in U(n).$$

- (b) Montrer que toute matrice hermitienne est diagonalisable par une matrice unitaire, et que l'orbite coadjointe de  $H$  est entièrement déterminée par son spectre (compté avec multiplicités).
- (c) On dit que  $H$  est *régulier* si toutes ses valeurs propres sont simples. Montrer que, dans ce cas, le stabilisateur de  $H$  pour l'action coadjointe est le sous-groupe des matrices diagonales unitaires, isomorphe à  $U(1)^n$ .
- (d) En déduire que l'orbite coadjointe d'un élément régulier est difféomorphe à l'espace homogène

$$U(n)/U(1)^n.$$

- (e) Montrer que l'espace homogène  $U(n)/U(1)^n$  s'identifie naturellement à la variété des drapeaux complets de  $\mathbb{C}^n$ , c'est-à-dire à l'ensemble des suites de sous-espaces

$$0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n = \mathbb{C}^n, \quad \dim V_k = k.$$

## 4. GROUPOÏDES SYMPLECTIQUES

**Bibliographie.** Voir [CFM21, Ch. 3-5, 13-14], [Vai94, Ch. 2, 9].

**4.1. Rappel : structure de Kirillov–Kostant–Souriau.** Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie. Le dual  $\mathfrak{g}^*$  est muni de la structure de Poisson linéaire donnée par

$$\{f, g\}(\xi) = \langle \xi, [df(\xi), dg(\xi)] \rangle.$$

Les feuilles symplectiques sont les orbites coadjointes. La restriction du bivecteur de Poisson à une orbite est non dégénérée, ce qui munit chaque orbite de la forme symplectique de Kirillov–Kostant–Souriau.

Le centre  $Z(U(\mathfrak{g}))$  de l'algèbre enveloppante universelle s'identifie aux éléments invariants sous l'action adjointe :

$$Z(U(\mathfrak{g})) = U(\mathfrak{g})^{\text{Ad}}.$$

Il correspond, au niveau semi-classique, aux fonctions polynomiales invariantes sur  $\mathfrak{g}^*$ .

**4.2. Feuilles d'une structure de Poisson.** Soit  $(M, \pi)$  une variété de Poisson. Le bivecteur  $\pi$  définit une application

$$\pi^\sharp : T^*M \rightarrow TM.$$

Les champs hamiltoniens engendrent une distribution

$$\mathcal{D}_x = \pi^\sharp(T_x^*M).$$

**Motivation : théorème de Frobenius.** Soit  $M$  une variété lisse de dimension  $n$  et  $D \subset TM$  une distribution lisse de rang constant  $k$ .

On suppose que  $D$  est *involutive*, c'est-à-dire que pour tous champs de vecteurs  $X, Y$  tangents à  $D$ , on a

$$[X, Y] \in \Gamma(D).$$

Alors pour tout point  $p \in M$ , il existe un système de coordonnées locales

$$(x^1, \dots, x^k, y^1, \dots, y^{n-k})$$

centré en  $p$  tel que

$$D = \text{Span} \left( \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^k} \right).$$

Autrement dit, les feuilles intégrales de  $D$  sont localement données par

$$y^1 = \text{const}, \dots, y^{n-k} = \text{const}.$$

En particulier, toute distribution involutive de rang constant définit localement un feuilletage régulier.

**4.3. Théorème de Weinstein.** Soit  $(M, \pi)$  une variété de Poisson et  $p \in M$  un point. On note  $2r$  le rang de  $\pi$  en  $p$ .

Alors il existe un système de coordonnées locales

$$(x^1, \dots, x^r, y^1, \dots, y^r, z^1, \dots, z^k)$$

centré en  $p$  tel que le tenseur de Poisson s'écrive

$$\pi = \sum_{i=1}^r \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial y^i} + \sum_{a,b=1}^k \phi_{ab}(z) \frac{\partial}{\partial z^a} \wedge \frac{\partial}{\partial z^b},$$

avec

$$\phi_{ab}(0) = 0.$$

En particulier, la structure de Poisson est localement le produit :

$$(M, \pi) \cong (\mathbb{R}^{2r}, \pi_{\text{can}}) \times (\mathbb{R}^k, \pi_{\text{transv}}),$$

où

$$\pi_{\text{can}} = \sum_{i=1}^r \frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial y^i}.$$

Les feuilles symplectiques sont localement données par

$$z^1 = \text{const}, \dots, z^k = \text{const}.$$

Ainsi, toute variété de Poisson est localement le produit d'une variété symplectique et d'une structure de Poisson transverse s'annulant au point.

**Algèbre de Lie isotrope (conormale).** Soit  $(M, \pi)$  une variété de Poisson et  $x \in M$ . Le noyau de  $\pi_x^\sharp$ ,

$$\mathfrak{g}_x := \ker(\pi_x^\sharp) \subset T_x^*M,$$

est appelé *algèbre de Lie isotrope* (ou conormale).

Il hérite naturellement d'un crochet de Lie induit par la linéarisation du crochet de Poisson isotrope.

L'algèbre isotrope est localement constante le long d'une feuille symplectique.

**4.4. Groupoïde de Lie.** Un *groupoïde de Lie* est la donnée d'un diagramme

$$G \rightrightarrows M$$

où :

- $G$  (ensemble des flèches) et  $M$  (ensemble des objets) sont des variétés lisses,
- les applications source et but

$$s, t : G \rightarrow M$$

sont des submersions,

- la multiplication

$$m : G^{(2)} \rightarrow G, \quad (g, h) \mapsto gh$$

est lisse, où

$$G^{(2)} = \{(g, h) \in G \times G \mid s(g) = t(h)\},$$

- l'unité

$$\varepsilon : M \rightarrow G,$$

et l'inversion

$$\iota : G \rightarrow G, \quad g \mapsto g^{-1}$$

sont lisses,

et ces données satisfont les axiomes usuels de groupoïde.

**4.5. Algébroïde de Lie.** Un *algébroïde de Lie* au-dessus de  $M$  est un fibré vectoriel

$$A \rightarrow M$$

muni :

- d'un crochet de Lie sur les sections

$$[\cdot, \cdot] : \Gamma(A) \times \Gamma(A) \rightarrow \Gamma(A),$$

- d'un morphisme de fibrés (ancrage)

$$\rho : A \rightarrow TM,$$

satisfaisant la règle de Leibniz

$$[X, fY] = f[X, Y] + (\rho(X)f)Y,$$

pour  $X, Y \in \Gamma(A)$  et  $f \in C^\infty(M)$ .

L'ancrage induit un morphisme d'algèbres de Lie

$$\rho : (\Gamma(A), [\cdot, \cdot]) \rightarrow (\mathfrak{X}(M), [\cdot, \cdot]).$$

**4.6. Du groupoïde de Lie à l'algébroïde de Lie.** Soit  $G \rightrightarrows M$  un groupoïde de Lie.

Un champ de vecteurs invariant à gauche sur un groupoïde de Lie  $G$  est un champ de vecteurs  $X \in \mathfrak{X}(G)$  telle que  $X$  est tangent aux fibres de l'application  $t$  et

$$d_h L_g(X_h) = X_{gh},$$

dès que  $g$  et  $h$  sont des flèches composables.

L'algébroïde de Lie  $A = \text{Lie}(G)$  est défini par

$$A = \ker(dt)|_M.$$

Autrement dit,

$$A_x = \ker(dt)_{\varepsilon(x)} \subset T_{\varepsilon(x)}G.$$

L'ancre est donnée par

$$\rho = ds|_A : A \rightarrow TM.$$

Le crochet sur  $\Gamma(A)$  est obtenu en identifiant les sections de  $A$  aux champs de vecteurs invariants à gauche sur  $G$  et en prenant leur crochet usuel.

Cette construction définit un foncteur

$$\text{Lie} : \{\text{groupoïdes de Lie}\} \rightarrow \{\text{algébroïdes de Lie}\}.$$

**Exemple : algébroïde d'Atiyah.** Soit  $P \rightarrow M$  un fibré principal de groupe  $H$ .

Le groupoïde des jaugees est

$$(P \times P)/H \rightrightarrows M.$$

Son algébroïde de Lie est

$$A = TP/H,$$

et l'ancre est induite par la projection

$$TP \rightarrow TM.$$

On obtient la suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Ad}(P) \rightarrow A \xrightarrow{\rho} TM \rightarrow 0,$$

où  $\text{Ad}(P) = P \times_{\text{Ad}} \mathfrak{h}$ .

**4.7. Groupoïdes symplectiques.** Soit  $(N, \omega)$  une variété symplectique. Une sous-variété immergée  $L \subset N$  est dite *lagrangienne* si

$$\omega|_L = 0$$

et si

$$\dim L = \frac{1}{2} \dim N.$$

Équivalamment,

$$T_x L = (T_x L)^{\perp \omega} \quad \text{pour tout } x \in L.$$

Soient  $(M_1, \pi_1)$  et  $(M_2, \pi_2)$  deux variétés de Poisson. Une application lisse  $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$  est dite *de Poisson* si

$$\{f \circ \varphi, g \circ \varphi\}_{\pi_1} = \{f, g\}_{\pi_2} \circ \varphi$$

pour toutes fonctions  $f, g \in C^\infty(M_2)$ .

De manière équivalente,

$$d\varphi \circ \pi_1^\sharp = \pi_2^\sharp \circ d\varphi^*.$$

Soit  $\mathcal{G} \rightrightarrows M$  un groupoïde de Lie. Une  $k$ -forme  $\eta \in \Omega^k(\mathcal{G})$  est dite *multiplicative* si

$$m^* \eta = \text{pr}_1^* \eta + \text{pr}_2^* \eta$$

sur l'espace des couples composables

$$\mathcal{G}^{(2)} = \{(g, h) \in \mathcal{G} \times \mathcal{G} \mid s(g) = t(h)\}.$$

**Définition.** Un *groupoïde symplectique* est un groupoïde de Lie  $\mathcal{G} \rightrightarrows M$  muni d'une forme symplectique  $\omega$  qui est multiplicative.

Cette condition est équivalente à dire que le graphe de la multiplication

$$\Gamma_m = \{(g, h, gh)\} \subset \mathcal{G} \times \mathcal{G} \times \bar{\mathcal{G}}$$

est une sous-variété lagrangienne.

**Propriétés fondamentales.**

- La variété des unités  $M$  est une sous-variété lagrangienne de  $\mathcal{G}$ .
- Il existe une unique structure de Poisson  $\pi$  sur  $M$  telle que

$$t : (\mathcal{G}, \omega) \rightarrow (M, \pi)$$

soit une application de Poisson et

$$s : (\mathcal{G}, \omega) \rightarrow (M, -\pi)$$

soit anti-Poisson.

- Les fibres de  $s$  et  $t$  sont orthogonales pour  $\omega$  :

$$(\ker ds)_g^\perp \omega = \ker dt_g.$$

- L'application

$$\pi^\sharp = dt \circ (ds)^{-1}$$

identifie naturellement l'algébroïde de Lie  $\text{Lie}(\mathcal{G})$  avec  $T^*M$ .

**Algébroïde associé à une structure de Poisson.** Soit  $(M, \pi)$  une variété de Poisson.

On définit un crochet sur  $\Omega^1(M)$  par

$$[\alpha, \beta] = \mathcal{L}_{\pi^\sharp(\alpha)}\beta - \mathcal{L}_{\pi^\sharp(\beta)}\alpha - d(\pi(\alpha, \beta)).$$

Alors

$$A = T^*M$$

muni de ce crochet et de l'ancre

$$\rho = \pi^\sharp : T^*M \rightarrow TM$$

est un algébroïde de Lie.

Lorsque  $(M, \pi)$  est intégrable, cet algébroïde est précisément celui du groupoïde symplectique intégrant  $(M, \pi)$ .

**Exemple : cas de Kirillov–Kostant.** Pour une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ , la structure de Poisson linéaire sur  $\mathfrak{g}^*$  est intégrée (lorsqu'il existe globalement) par le groupoïde cotangent

$$T^*G \rightrightarrows \mathfrak{g}^*,$$

où les flèches sont les applications canoniques associées aux quotients par les actions à gauche et à droite.

**Exercices.**

- (1) **Algèbre de Lie d'isotropie pour la structure de Poisson linéaire.** Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie et  $(\mathfrak{g}^*, \pi_{\mathfrak{g}})$  sa structure de Poisson linéaire (Kirillov–Kostant–Souriau).

Pour  $\xi \in \mathfrak{g}^*$ , on note

$$\mathfrak{g}_{\xi} = \{v \in \mathfrak{g} \mid \xi([v, w]) = 0, \forall w \in \mathfrak{g}\}$$

l'algèbre de Lie d'isotropie pour l'action coadjointe.

Montrer explicitement que l'algèbre de Lie d'isotropie du tenseur de Poisson  $\pi_{\mathfrak{g}}$  au point  $\xi$  coïncide avec  $\mathfrak{g}_{\xi}$ .

- (2) **Feuilletages et algébroïdes de Lie.**

Soit  $M$  une variété lisse munie d'un feuilletage régulier  $\mathcal{F}$ . On note

$$A = T\mathcal{F} \subset TM$$

le sous-fibré vectoriel constitué des vecteurs tangents aux feuilles.

- (a) Montrer que  $A$  est naturellement muni d'une structure d'algébroïde de Lie :
- le crochet est la restriction du crochet usuel des champs de vecteurs,
  - l'ancre est l'inclusion

$$\rho : A \hookrightarrow TM.$$

Vérifier la règle de Leibniz.

- (b) Décrire le groupoïde de Lie intégrant cet algébroïde.

*Indication :* considérer le groupoïde d'holonomie (ou, si le feuilletage est simple, le groupoïde des paires restreint aux feuilles).

Plus précisément, définir

$$\mathcal{G} = \{\text{classes d'homotopie de chemins contenus dans les feuilles}\} \rightrightarrows M,$$

et décrire les applications source, but et multiplication.

- (c) Montrer que si  $(A, \rho)$  est un algébroïde de Lie dont l'ancre

$$\rho : A \rightarrow TM$$

est injective, alors son image

$$\rho(A) \subset TM$$

définit une distribution involutive.

En déduire que tout algébroïde de Lie à ancre injective est isomorphe à l'algébroïde tangent d'un feuilletage régulier.

- (3) **Formes multiplicatives sur un groupe de Lie**

Soit  $G$  un groupe de Lie (vu comme un groupoïde de Lie  $G \rightrightarrows \{\text{pt}\}$ ).

- (a) Soit  $\eta \in \Omega^k(G)$  une forme différentielle. Rappeler que la condition de multiplicativité s'écrit

$$m^*\eta = \text{pr}_1^*\eta + \text{pr}_2^*\eta,$$

où

$$m : G \times G \rightarrow G, \quad (g, h) \mapsto gh.$$

- (b) Montrer que si  $\eta$  est multiplicative, alors nécessairement  $k = 1$ .

*Indication :* évaluer la condition de multiplicativité en  $(e, e)$  et utiliser la décomposition

$$T_{(e,e)}(G \times G) = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}.$$

- (c) Montrer qu'une 1-forme multiplicative est automatiquement invariante à gauche et à droite :

$$L_g^* \eta = \eta, \quad R_g^* \eta = \eta.$$

- (d) Réciproquement, montrer que toute 1-forme bi-invariante est multiplicative.

Conclure qu'une forme différentielle sur un groupe de Lie est multiplicative si et seulement si elle est de degré 1 et bi-invariante.

## 5. RÉDUCTION SYMPLECTIQUE

**Bibliographie.** Voir [Arn78, Sec. 49-50], [Sil08, Ch. 18, 20, 22, 23, 27, 28], [Mei24, Ch. 8-9], [Eti06].

**5.1. Mécanique classique et systèmes intégrables.** Un *système hamiltonien* est la donnée d'une variété symplectique  $(M, \omega)$  et d'une fonction lisse

$$H : M \rightarrow \mathbb{R},$$

appelée hamiltonien. Le champ hamiltonien  $X_H$  est défini par

$$\iota_{X_H} \omega = dH, \quad \dot{x}(t) = X_H(x(t)).$$

Un système de dimension  $2n$  est dit complètement intégrable s'il existe  $n$  fonctions

$$F_1, \dots, F_n$$

indépendantes presque partout et en involution

$$\{F_i, F_j\} = 0,$$

et telles que  $H$  soit fonction des  $F_i$ .

**Théorème (Liouville).** Si  $c$  est une valeur régulière telle que  $F^{-1}(c)$  soit compacte et connexe, alors  $F^{-1}(c) \simeq \mathbb{T}^n$  et il existe des coordonnées action-angle

$$(I_1, \dots, I_n, \theta_1, \dots, \theta_n)$$

dans lesquelles

$$\omega = \sum dI_i \wedge d\theta_i, \quad \dot{I}_i = 0, \quad \dot{\theta}_i = \omega_i(I).$$

**5.2. Réduction symplectique.** Soit  $(M, \omega)$  une variété symplectique munie d'une action d'un groupe de Lie  $G$  préservant la forme symplectique  $\omega$ . On note  $\mathfrak{g}$  l'algèbre de Lie de  $G$ .

Une *application moment* est une application

$$\mu : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$$

telle que pour tout  $\xi \in \mathfrak{g}$ , la fonction

$$\mu^\xi(x) = \langle \mu(x), \xi \rangle$$

satisfasse

$$d\mu^\xi = \iota_{X_\xi} \omega,$$

où  $X_\xi$  est le champ de vecteurs fondamental sur  $M$  engendré par  $\xi$ .

Autrement dit, les composantes de l'application moment sont les hamiltoniens des champs fondamentaux de l'action du groupe.

**Théorème (Marsden–Weinstein–Meyer).** Soit  $\mu \in \mathfrak{g}^*$  une valeur régulière de  $\Phi$ . Supposons que le feuilletage de  $\Phi^{-1}(\mu)$  par les orbites de  $G_\mu$  soit une fibration.

On note

$$M_\mu = \Phi^{-1}(\mu)/G_\mu,$$

et

$$\iota : \Phi^{-1}(\mu) \hookrightarrow M, \quad \pi : \Phi^{-1}(\mu) \rightarrow M_\mu.$$

Il existe une unique forme symplectique  $\omega_\mu$  sur  $M_\mu$  telle que

$$\iota^*\omega = \pi^*\omega_\mu.$$

L'espace  $M_\mu$  est appelé la *réduction symplectique au niveau  $\mu$* . L'espace réduit au niveau 0 est noté  $M_0 := M//G$  et est appelé le *quotient symplectique*.

**Hamiltonien réduit.** Si  $H$  est  $G$ -invariant, il induit une fonction réduite

$$H_\mu : M_\mu \rightarrow \mathbb{R}, \quad H_\mu \circ \pi = H \circ \iota.$$

Le flot de  $H_\mu$  est la projection du flot de  $H$ . On parle de *hamiltonien réduit*.

Les variétés réduites  $M_\mu$  ne dépendent que de l'orbite coadjointe

$$\mathcal{O} = G \cdot \mu.$$

Soit  $\mathcal{O}^-$  la même orbite munie de la structure symplectique opposée et de l'application moment  $-\iota$ .

L'action diagonale de  $G$  sur

$$M \times \mathcal{O}^-$$

est hamiltonienne, avec application moment

$$\tilde{\Phi}(m, \nu) = \Phi(m) - \nu.$$

**Proposition (Shifting trick).**  $\mu$  est une valeur régulière de  $\Phi$  si et seulement si 0 est une valeur régulière de

$$\tilde{\Phi} : M \times \mathcal{O}^- \rightarrow \mathfrak{g}^*.$$

De plus, l'action de  $G_\mu$  sur  $\Phi^{-1}(\mu)$  est libre si et seulement si l'action de  $G$  sur  $\tilde{\Phi}^{-1}(0)$  est libre.

Il existe un symplectomorphisme canonique

$$M_\mu \cong (M \times \mathcal{O}^-)//G.$$

La réduction à  $\mu$  se ramène donc toujours à une réduction en 0, au prix d'un produit avec une orbite coadjointe.

**5.3. Exemple : Le système rationnel de Calogero–Moser par réduction symplectique.** On considère l'espace symplectique

$$T^*\text{Mat}_n(\mathbb{R}) \simeq \text{Mat}_n(\mathbb{R}) \times \text{Mat}_n(\mathbb{R}),$$

muni de la forme symplectique canonique

$$\omega = \text{Tr}(dY \wedge dX).$$

Le groupe  $G = \text{GL}_n(\mathbb{C})$  agit par conjugaison diagonale :

$$g \cdot (X, P) = (gXg^{-1}, gYg^{-1}).$$

On identifie  $\mathfrak{gl}_n^*$  à  $\mathfrak{gl}_n$  au moyen de la forme invariante

$$\langle A, B \rangle = \text{Tr}(AB).$$

L'application moment associée à cette action est

$$\mu(X, Y) = [X, Y].$$

On considère l'orbite coadjointe  $\mathcal{O} \subset \mathfrak{gl}_n$  des éléments  $g \in \mathfrak{gl}_n = \text{Mat}_n(\mathbb{R})$  telle que  $rk(1+g) = 1$ . Cette orbite est de dimension  $2(n-1)$ .

On considère l'espace  $M_{\mathcal{O}}$  réduit au niveau de cette orbite.

Sur un ouvert dense, on peut utiliser l'action de  $G$  pour diagonaliser  $X$  :

$$X = \text{diag}(x_1, \dots, x_n).$$

Par conjugaison unique par les matrices diagonales, on peut bouger un point de l'orbite à  $m = (\mathbf{1} - I)$ , où  $\mathbf{1}$  est la matrice dont toutes les entrées valent 1 et  $I$  la matrice identité. L'équation de moment

$$[X, Y] = m$$

donne, pour  $i \neq j$ ,

$$(x_i - x_j)Y_{ij} = 1.$$

On obtient donc

$$Y_{ij} = \frac{1}{x_i - x_j} \quad (i \neq j).$$

Les coefficients diagonaux restent libres :

$$Y_{ii} = p_i.$$

Ainsi, sur cet ouvert dense, un point réduit est déterminé par

$$(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n)$$

avec  $x_i \neq x_j$  pour  $i \neq j$ .

On obtient alors l'identification symplectique (voir Ex. 2) de notre réduction avec

$$M_{\mathcal{O}} \simeq T^*(\mathbb{C}^n \setminus \text{diagonales})/S_n,$$

où  $S_n$  agit par permutation des particules.

On considère le hamiltonien invariant

$$H(X, Y) = \frac{1}{2} \text{Tr}(Y^2).$$

En remplaçant l'expression précédente de  $Y$ , on obtient

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n p_i^2 - \sum_{i < j} \frac{1}{(x_i - x_j)^2}.$$

Les fonctions invariantes

$$H_k = \frac{1}{k} \text{Tr}(Y^k)$$

descendent à l'espace réduit.

Elles sont en involution pour la structure de Poisson réduite (voir Ex. 2) :

$$\{H_k, H_\ell\} = 0.$$

On obtient ainsi une famille complète d'intégrales premières, ce qui prouve l'intégrabilité complète du système.

**5.4. Variétés symplectiques toriques.** Soit  $(M, \omega)$  compacte, munie d'une action hamiltonienne d'un tore  $T$ .

**Théorème (Convexité, Atiyah, Guillemin–Sternberg).** L'image de l'application moment

$$\Phi : M \rightarrow \mathfrak{t}^*$$

est un polytope convexe, et les fibres sont connexes.

**Définition.** Une *variété symplectique torique* est une variété symplectique compacte connexe de dimension  $2n$  munie d'une action hamiltonienne effective du tore  $T^n$ .

Dans ce cas, l'application moment  $\mu : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  a pour image un polytope convexe.

**Définition.** Un polytope convexe  $\Delta \subset \mathbb{R}^n$  est dit *de Delzant* si :

- (1) exactement  $n$  faces se rencontrent en chaque sommet,
- (2) les vecteurs primitifs normaux aux faces forment une base de  $\mathbb{Z}^n$ ,
- (3) le polytope est simple et rationnel.

**Théorème de Delzant.** Il existe une correspondance bijective entre :

- (1) les variétés symplectiques toriques compactes, à isomorphisme symplectique équivariant près,
- (2) les polytopes de Delzant.

La variété symplectique torique est entièrement déterminée par le polytope moment.

**5.5. Théorème de Guillemin–Sternberg.** Soit  $X \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^n$  une variété projective lisse munie d'une action d'un groupe complexe réductif  $G$ , complexification d'un groupe compact connexe  $K$ .

Soit

$$\mu : X \rightarrow \mathfrak{t}^*$$

l'application moment associée à la métrique de Fubini–Study.

On note

$$X^{ps} = G \cdot \mu^{-1}(0)$$

l'ensemble des points polystables.

On a

$$\mu^{-1}(0) \subset X^{ps},$$

et cette inclusion induit un homéomorphisme

$$\mu^{-1}(0)/K \cong X//G.$$

Ce résultat exprime le principe “la réduction symplectique commute à la réduction GIT”.

**Exercices.**

- (1) **Particule dans un potentiel central et réduction symplectique.**

On considère le mouvement d'une particule dans  $\mathbb{R}^2$  soumise à un potentiel  $V$ . Le système hamiltonien est défini sur

$$T^*\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{R}_q^2 \times \mathbb{R}_p^2$$

par le hamiltonien

$$H(q, p) = \frac{|p|^2}{2} + V(q).$$

On suppose que le potentiel est invariant par rotations, c'est-à-dire  $V(q) = V(|q|)$ .

- (a) Calculer explicitement l'application moment associée à l'action du groupe  $SO(2)$  sur  $\mathbb{R}^2$  par rotations. Montrer qu'elle est donnée par  $J(q, p) = q_1 p_2 - q_2 p_1$  (moment cinétique).
- (b) Passer en coordonnées polaires  $q = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ . Montrer que la forme symplectique s'écrit

$$\omega = dr \wedge dp_r + d\theta \wedge dp_\theta,$$

où

$$p_r = \frac{q \cdot p}{r}, \quad p_\theta = J.$$

- (c) Fixer une valeur  $\ell$  du moment cinétique et effectuer la réduction symplectique au niveau  $J = \ell$ .

Montrer que le hamiltonien réduit est une fonction de  $(r, p_r)$  donnée par

$$H_\ell(r, p_r) = \frac{1}{2} p_r^2 + \frac{\ell^2}{2r^2} + V(r).$$

(2) **Formule du collier et choix de trivialisations de  $T^*\mathrm{GL}_n$ .**

On considère le fibré cotangent  $T^*\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ . Il est ouvert de

$$T^*\mathrm{Mat}_n \simeq \mathrm{Mat}_n \times \mathrm{Mat}_n,$$

muni de la structure symplectique canonique

$$\omega = \mathrm{Tr}(dX \wedge dY),$$

pour laquelle

$$\{X_{ij}, Y_{kl}\} = \delta_{ik} \delta_{jl}, \quad \{X_{ij}, X_{kl}\} = 0 \quad \{Y_{ij}, Y_{kl}\} = 0.$$

Pour un mot non commutatif  $w(X, Y)$ , on pose

$$F_w(X, Y) = \mathrm{Tr}(w(X, Y)).$$

- (a) Montrer que dans la structure linéaire  $(T^*\mathrm{Mat}_n)$ , le crochet de Poisson de deux traces est donné par la formule du collier :

$$\{\mathrm{Tr}(w_1), \mathrm{Tr}(w_2)\} = \sum_{\substack{w_1 = uXv \\ w_2 = sYt}} \mathrm{Tr}(vuts) - \sum_{\substack{w_1 = uYv \\ w_2 = sXt}} \mathrm{Tr}(vuts).$$

- (b) Vérifier explicitement la formule dans les cas particuliers suivants :

$$\begin{aligned} \{\mathrm{Tr}(X^k), \mathrm{Tr}(X^\ell)\} &= 0, \\ \{\mathrm{Tr}(X^m Y), \mathrm{Tr}(X^k)\} &= k \mathrm{Tr}(X^{m+k-1}), \\ \{\mathrm{Tr}(X^m Y), \mathrm{Tr}(X^k Y)\} &= (k - m) \mathrm{Tr}(X^{m+k-1} Y). \end{aligned}$$

(3) **Section d'un polytope de Delzant et réduction symplectique.**

Soit  $(M^{2n}, \omega, \mu)$  une variété symplectique torique compacte, munie d'une action hamiltonienne effective du tore  $T^n$  et d'application moment  $\mu : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

On note  $\Delta = \mu(M)$  le polytope de Delzant associé.

Soit  $H \subset \mathbb{R}^n$  un hyperplan affine donné par une équation

$$\langle x, u \rangle = c, \quad u \in \mathbb{Z}^n \text{ primitif.}$$

- (a) Montrer que  $u$  définit un sous-groupe  $S^1 \subset T^n$ .

- (b) Montrer que la fonction  $\mu_u = \langle \mu, u \rangle$  est une application moment pour cette action de  $S^1$ .
- (c) Supposer que  $c$  est une valeur régulière de  $\mu_u$ . Montrer que la réduction symplectique

$$M_c = \mu_u^{-1}(c)/S^1$$

est une variété symplectique torique de dimension  $2(n-1)$ .

- (d) Montrer que son polytope moment est donné par la section  $\Delta \cap H$ .

## 6. GROUPES DE POISSON-LIE

**Bibliographie.** Voir [Mic08, Sec. 14-15], [CP95, Ch. I-V], [Vai94, Ch. 10], [Kas12, Ch. III, IX, XIII].

**6.1. Complexe de Chevalley d'une algèbre de Lie.** Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie sur  $\mathbb{K}$ . Le complexe de Chevalley–Eilenberg à coefficients triviaux est donné par

$$C^k(\mathfrak{g}) = \Lambda^k \mathfrak{g}^*,$$

muni de la différentielle  $d : C^k(\mathfrak{g}) \rightarrow C^{k+1}(\mathfrak{g})$  définie par la formule explicite

$$(d\omega)(X_0, \dots, X_k) = \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_0, \widehat{X}_i, \widehat{X}_j, \dots, X_k).$$

Plus généralement, pour une représentation  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V)$ , le complexe à coefficients dans  $V$  est

$$C^k(\mathfrak{g}, V) = \Lambda^k \mathfrak{g}^* \otimes V,$$

et

$$(d\omega)(X_0, \dots, X_k) = \sum_i (-1)^i \rho(X_i) \omega(X_0, \widehat{X}_i, \dots, X_k) + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_0, \widehat{X}_i, \widehat{X}_j, \dots, X_k).$$

Si  $G$  est un groupe de Lie d'algèbre  $\mathfrak{g}$ , les formes différentielles invariantes à gauche s'identifient à  $\Lambda^\bullet \mathfrak{g}^*$ . La différentielle extérieure restreinte aux formes invariantes coïncide avec la différentielle de Chevalley.

Une extension centrale de  $\mathfrak{g}$  est donnée par un 2-cocycle  $\omega \in Z^2(\mathfrak{g})$  :

$$[(X, a), (Y, b)] = ([X, Y], \omega(X, Y)).$$

Les classes de  $H^2(\mathfrak{g})$  classifient les extensions centrales, voir aussi Exercice 3.2.

## 6.2. Bigèbres de Lie, algèbres de Hopf et groupes de Poisson–Lie.

**Définition.** Une *bigèbre de Lie* est une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  munie d'une application linéaire

$$\delta : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$$

appelée *cocrochet*, satisfaisant les propriétés suivantes.

- (1) **Condition de cocycle.** L'application  $\delta$  est un 1-cocycle pour l'action adjointe, c'est-à-dire

$$\delta([x, y]) = (\text{ad}_x \otimes 1 + 1 \otimes \text{ad}_x) \delta(y) - (\text{ad}_y \otimes 1 + 1 \otimes \text{ad}_y) \delta(x)$$

(2) **Condition de co-Jacobi.** Le dual

$$\delta^* : \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}^*$$

définit une structure d'algèbre de Lie sur  $\mathfrak{g}^*$ .

Autrement dit, une bigèbre de Lie est la donnée d'une structure d'algèbre de Lie sur  $\mathfrak{g}$  et d'une structure d'algèbre de Lie compatible sur  $\mathfrak{g}^*$ , la compatibilité étant exprimée par la condition de cocycle ci-dessus.

Pour un groupe de Lie  $G$ ,  $C^\infty(G)$  est une algèbre de Hopf :

$$\Delta f(g, h) = f(gh), \quad \varepsilon(f) = f(e), \quad S(f)(g) = f(g^{-1}).$$

Un groupe de Poisson–Lie est un groupe  $G$  muni d'un bivecteur  $\pi$  tel que la multiplication soit de Poisson :

$$\pi(gh) = (L_g)_* \pi(h) + (R_h)_* \pi(g).$$

La déformation au premier ordre s'écrit

$$\pi(g) = \hbar \pi_1(g) + O(\hbar^2).$$

La linéarisation en l'élément neutre définit

$$\delta : \mathfrak{g} \rightarrow \Lambda^2 \mathfrak{g}, \quad \delta(X) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \pi(\exp tX).$$

On obtient une bigèbre de Lie :

$$\delta([X, Y]) = (\text{ad}_X \otimes 1 + 1 \otimes \text{ad}_X) \delta(Y) - (\text{ad}_Y \otimes 1 + 1 \otimes \text{ad}_Y) \delta(X).$$

Le dual  $\mathfrak{g}^*$  hérite d'un crochet

$$[\xi, \eta] = \delta^*(\xi \otimes \eta).$$

Soit  $(G, \pi_G)$  un groupe de Poisson–Lie et  $(M, \pi_M)$  une variété de Poisson. Une action lisse

$$\Phi : G \times M \rightarrow M, \quad (g, x) \mapsto g \cdot x,$$

est appelée *action de Poisson* si  $\Phi$  est une application de Poisson, où  $G \times M$  est muni de la structure de Poisson produit

$$\pi_{G \times M} = \pi_G \oplus \pi_M.$$

Autrement dit, pour toutes fonctions lisses  $f, h \in C^\infty(M)$ , on a

$$\{f \circ \Phi, h \circ \Phi\}_{G \times M} = \{f, h\}_M \circ \Phi.$$

De manière équivalente, le bivecteur satisfait la condition

$$\pi_M(g \cdot x) = (d\Phi)_{(g, x)} (\pi_G(g) + \pi_M(x)).$$

Au niveau infinitésimal, si  $\delta : \mathfrak{g} \rightarrow \Lambda^2 \mathfrak{g}$  est le cocrochet associé à  $G$ , et si  $X_M$  désigne le champ fondamental associé à  $X \in \mathfrak{g}$ , la condition d'action de Poisson équivaut à

$$\mathcal{L}_{X_M} \pi_M = (\rho \otimes \rho)(\delta(X)),$$

où  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  est la représentation infinitésimale.

**6.3. Bigèbres cobord et équations de Yang–Baxter.** Une bigèbre est dite cobord s’il existe  $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$  tel que

$$\delta(X) = (\text{ad}_X \otimes 1 + 1 \otimes \text{ad}_X)(r).$$

L’équation classique de Yang–Baxter est

$$[r_{12}, r_{13}] + [r_{12}, r_{23}] + [r_{13}, r_{23}] = 0.$$

Triangulaire :  $r \in \Lambda^2 \mathfrak{g}$  et CYBE. Quasi-triangulaire :  $r + r^{21}$  invariant.  
Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie et

$$r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$$

une  $r$ -matrice quasi-triangulaire, c’est-à-dire une solution de l’équation classique (modifiée) de Yang–Baxter telle que la partie symétrique

$$r + r^{21}$$

soit Ad-invariante.

On écrit

$$r = \sum_i a_i \otimes b_i.$$

Soit  $G$  un groupe de Lie intégrant  $\mathfrak{g}$ . On note  $r^L(g)$  (resp.  $r^R(g)$ ) le bivecteur obtenu en transportant  $r$  par translations à gauche (resp. à droite) :

$$r^L(g) = (L_g)_* r, \quad r^R(g) = (R_g)_* r.$$

On définit alors un bivecteur sur  $G$  par

$$\pi(g) = r^L(g) - r^R(g).$$

Explicitement,

$$\pi(g) = \sum_i (a_i^L(g) \wedge b_i^L(g) - a_i^R(g) \wedge b_i^R(g)),$$

où  $a_i^L, a_i^R$  désignent les champs invariants à gauche et à droite associés à  $a_i$ .

Si  $r$  satisfait l’équation classique de Yang–Baxter, alors le bivecteur  $\pi$  vérifie

$$[\pi, \pi] = 0,$$

et définit donc une structure de Poisson sur  $G$ .

De plus, la multiplicativité

$$\pi(gh) = (L_g)_* \pi(h) + (R_h)_* \pi(g)$$

résulte directement de la définition  $\pi = r^L - r^R$ .

Ainsi, toute  $r$ -matrice quasi-triangulaire définit naturellement une structure de Poisson–Lie sur le groupe  $G$ , dont la bigèbre de Lie associée est donnée par

$$\delta(X) = (\text{ad}_X \otimes 1 + 1 \otimes \text{ad}_X)(r).$$

Pour une algèbre de Lie simple, la  $r$ -matrice de Belavin–Drinfeld la plus simple s’écrit

$$r = \sum_{\alpha > 0} E_\alpha \otimes E_{-\alpha} + \frac{1}{2} \sum_i H_i \otimes H_i$$

**6.4. Triples de Manin et double de Drinfeld.** Soit  $\mathfrak{d}$  une algèbre de Lie, munie d'une forme bilinéaire symétrique

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{d} \times \mathfrak{d} \rightarrow \mathbb{K}$$

non dégénérée et invariante, c'est-à-dire

$$\langle [x, y], z \rangle = \langle x, [y, z] \rangle, \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{d}.$$

Un sous-espace vectoriel  $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{d}$  est dit isotrope si

$$\langle x, y \rangle = 0, \quad \forall x, y \in \mathfrak{l},$$

et lagrangien s'il est isotrope maximal, c'est-à-dire

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{l}^\perp \quad \text{et} \quad \dim \mathfrak{l} = \frac{1}{2} \dim \mathfrak{d}.$$

**Définition.** Un *triple de Manin* est un triplet

$$(\mathfrak{d}, \mathfrak{g}, \mathfrak{g}')$$

tel que :

- (1)  $\mathfrak{d}$  est une algèbre de Lie munie d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée invariante ;
- (2)  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{g}'$  sont deux sous-algèbres de Lie de  $\mathfrak{d}$  ;
- (3)  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{g}'$  sont lagrangiennes pour la forme  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ;
- (4) on a une décomposition vectorielle directe

$$\mathfrak{d} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}'.$$

Les triples de Manin sont en correspondance naturelle avec les bigèbres de Lie : la structure de bigèbre sur  $\mathfrak{g}$  est équivalente au choix d'un tel triple, où le crochet sur  $\mathfrak{g}^*$  est celui dual du cocrochet.

L'algèbre  $\mathfrak{d}$  est appelée le *double de Drinfeld* de la bigèbre  $\mathfrak{g}$ .

Le double de Drinfeld est  $\mathfrak{d}$  muni du crochet

$$[X + \xi, Y + \eta] = [X, Y] + \text{ad}_X^* \eta - \text{ad}_Y^* \xi + [\xi, \eta] + \text{ad}_\xi^* Y - \text{ad}_\eta^* X.$$

Il est naturellement quasi-triangulaire, avec

$$r = \sum_i e_i \otimes e^i.$$

**6.5. Algèbres de Hopf (quasi)triangulaires.** Une algèbre de Hopf quasi-triangulaire est munie d'un élément inversible  $\mathcal{R} \in H \otimes H$  tel que

$$\Delta^{\text{op}}(x) = \mathcal{R} \Delta(x) \mathcal{R}^{-1},$$

et

$$\mathcal{R}_{12} \mathcal{R}_{13} \mathcal{R}_{23} = \mathcal{R}_{23} \mathcal{R}_{13} \mathcal{R}_{12}.$$

À l'ordre classique :

$$\mathcal{R} = 1 + \hbar r + O(\hbar^2).$$

**6.6. Dualité de Tannaka–Krein et quasi-algèbres de Hopf.** La dualité de Tannaka–Krein reconstruit une algèbre de Hopf à partir de sa catégorie de représentations.

Une quasi-algèbre de Hopf possède un associateur

$$\Phi \in H^{\otimes 3}$$

satisfaisant l'équation du pentagone :

$$(1 \otimes \Phi)(\text{id} \otimes \Delta \otimes \text{id})(\Phi)(\Phi \otimes 1) = (\text{id} \otimes \text{id} \otimes \Delta)(\Phi)(\Delta \otimes \text{id} \otimes \text{id})(\Phi).$$

Les catégories de représentations sont monoïdales tressées.

**Exercices.**

(1) **Algèbre de boucles et extension centrale.** Soit

$$L\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}], \quad [X \otimes t^m, Y \otimes t^n] = [X, Y] \otimes t^{m+n}.$$

Montrer que

$$\omega(X \otimes t^m, Y \otimes t^n) = m \delta_{m+n, 0} (X, Y)$$

définit un 2-cocycle et donne l'extension centrale affine.

(2) **Fonctions Ad-invariantes.** Montrer que deux fonctions Ad-invariantes sur un groupe de Poisson–Lie cobord commutent pour le crochet de Poisson :

$$\{f, g\} = 0.$$

(3) **Bivecteurs invariants à gauche.**

Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie réelle ou complexe, et soit

$$r \in \Lambda^2 \mathfrak{g}$$

un bivecteur antisymétrique. On note  $G$  un groupe de Lie intégrant  $\mathfrak{g}$ .

On considère le champ bivecteur invariant à gauche

$$\pi = r^L, \quad \pi(g) = (L_g)_* r.$$

(a) **Condition de Poisson.** Montrer que

$$[\pi, \pi] = 0 \iff [r, r] = 0,$$

où le crochet à gauche est le crochet de Schouten sur les champs multivecteurs de  $G$ , et à droite le crochet de Schouten induit par le crochet de Lie sur  $\mathfrak{g}$ .

En déduire que  $\pi = r^L$  est une structure de Poisson sur  $G$  si et seulement si  $r$  satisfait l'équation classique de Yang–Baxter

$$[r_{12}, r_{13}] + [r_{12}, r_{23}] + [r_{13}, r_{23}] = 0.$$

(b) **Absence de multiplicativité.** Rappeler qu'une structure de Poisson–Lie doit vérifier la condition de multiplicativité

$$\pi(gh) = (L_g)_* \pi(h) + (R_h)_* \pi(g).$$

Montrer que si  $\pi = r^L$ , alors

$$\pi(gh) = (L_g L_h)_* r,$$

tandis que

$$(L_g)_* \pi(h) + (R_h)_* \pi(g) = (L_g L_h)_* r + (R_h L_g)_* r.$$

En déduire que la condition de multiplicativité implique

$$(R_h)_* r = 0 \quad \forall h \in G,$$

et conclure que cela force

$$r = 0.$$

(c) **Conclusion.** Ainsi, un bivecteur invariant à gauche définit une structure de Poisson si et seulement si  $r$  satisfait la CYBE, mais il ne définit jamais une structure de Poisson–Lie sauf dans le cas trivial  $r = 0$ .

(4) **Condition de Manin et quasi-triangularité.** Soit  $\mathfrak{g}$  une bigèbre et  $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2)$  le triple de Manin associé. À  $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$  on associe le graphe

$$\mathfrak{a} = \{ \ell + (\text{id} \otimes \ell)(r) ; \ell \in \mathfrak{g}^* \}.$$

Montrer que  $(\mathfrak{g}, r)$  est quasi-triangulaire (resp. triangulaire) si et seulement si  $\mathfrak{a}$  est un idéal (resp. idéal lagrangien) de  $\mathfrak{p}$ .

## 7. THÉORIE DE JAUGE EN DIMENSION 2

**Bibliographie.** Voir [KN63, Ch. II], [Mic08, Sec. IV.16-19], [Aud97, Lec. 2], [Mei24, Sec 7.7], [FR93], [FR].

7.1. **Connexions  $G$ .** Soit  $G$  un groupe de Lie et  $\mathfrak{g}$  son algèbre de Lie. Soit  $\Sigma$  une surface compacte orientée et soit

$$P \rightarrow \Sigma$$

un fibré principal de groupe structural  $G$ .

**Définition.** Une *connexion* sur  $P$  est un opérateur

$$\nabla : \Gamma(\text{Ad } P) \longrightarrow \Omega^1(\Sigma, \text{Ad } P)$$

vérifiant la règle de Leibniz

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f \nabla s$$

pour toute fonction lisse  $f$  sur  $\Sigma$  et toute section

$$s \in \Gamma(\text{Ad } P).$$

Supposons que le fibré soit trivial sur un ouvert

$$U \subset \Sigma.$$

Alors

$$P|_U \simeq U \times G, \quad \text{Ad } P|_U \simeq U \times \mathfrak{g}.$$

Dans cette trivialisatation, une connexion s'écrit

$$\nabla = d + A$$

où

$$A \in \Omega^1(U, \mathfrak{g})$$

est une 1-forme à valeurs dans l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ .

Plus explicitement, pour une section

$$s : U \rightarrow \mathfrak{g}$$

on a

$$\nabla s = ds + [A, s].$$

**7.2. Courbure et systèmes locaux.** À une connexion  $\nabla$  on associe sa *courbure*. C'est l'opérateur

$$F_{\nabla} = \nabla^2 : \Gamma(\text{Ad } P) \longrightarrow \Omega^2(\Sigma, \text{Ad } P).$$

Autrement dit, pour toute section  $s \in \Gamma(\text{Ad } P)$ ,

$$F_{\nabla}(s) = \nabla(\nabla s).$$

La courbure est  $C^\infty(\Sigma)$ -linéaire, donc elle peut être vue comme une 2-forme à valeurs dans  $\text{Ad } P$  :

$$F_{\nabla} \in \Omega^2(\Sigma, \text{Ad } P).$$

Dans une trivialisatation locale où

$$\nabla = d + A, \quad A \in \Omega^1(U, \mathfrak{g}),$$

la courbure est donnée par la formule

$$F_{\nabla} = dA + \frac{1}{2}[A \wedge A].$$

Plus explicitement,

$$[A \wedge A](X, Y) = [A(X), A(Y)].$$

Ainsi

$$F_{\nabla} \in \Omega^2(U, \mathfrak{g}).$$

Une connexion est dite *plate* si

$$F_{\nabla} = 0.$$

**Définition.** Un  $G$ -système local sur  $\Sigma$  est un fibré principal muni d'une connexion plate.

Dans le cas trivial, une connexion plate correspond à une représentation du groupe fondamental

$$\rho : \pi_1(\Sigma) \rightarrow G$$

bien définie à conjugaison près.

L'espace des systèmes locaux s'identifie donc à

$$\text{Hom}(\pi_1(\Sigma), G)/G.$$

**7.3. Structure symplectique sur l'espace des connexions.** On note

$$\mathcal{A} = \Omega^1(\Sigma, \mathfrak{g})$$

l'espace des connexions.

Soit  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  une forme bilinéaire invariante sur  $\mathfrak{g}$ .

On définit une 2-forme symplectique sur  $\mathcal{A}$  par

$$\omega_{\mathcal{A}}(a, b) = \int_{\Sigma} \langle a \wedge b \rangle,$$

où

$$a, b \in T_A \mathcal{A} \simeq \Omega^1(\Sigma, \mathfrak{g}).$$

Cette forme est indépendante du point  $A$  et définit une structure symplectique sur  $\mathcal{A}$ .

**7.4. Action du groupe de jauge.** Le groupe de jauge est

$$\mathcal{G} = \text{Map}(\Sigma, G).$$

Son algèbre de Lie est

$$\text{Lie}(\mathcal{G}) = \Omega^0(\Sigma, \mathfrak{g}).$$

L'action infinitésimale est donnée par

$$\xi \mapsto d_A \xi$$

où

$$d_A \xi = d\xi + [A, \xi].$$

Ainsi le champ de vecteurs fondamental sur  $\mathcal{A}$  est

$$V_\xi(A) = d_A \xi.$$

**7.5. Application moment.** Considérons l'application

$$\mu : \mathcal{A} \rightarrow \Omega^2(\Sigma, \mathfrak{g})$$

définie par

$$\mu(A) = F_A.$$

En identifiant le dual de  $\Omega^0(\Sigma, \mathfrak{g})$  avec  $\Omega^2(\Sigma, \mathfrak{g})$  à l'aide de l'intégrale

$$\langle \eta, \xi \rangle = \int_\Sigma \langle \eta, \xi \rangle,$$

on peut voir la courbure comme une application moment.

**Théorème.** L'action du groupe de jauge sur  $\mathcal{A}$  est hamiltonienne et l'application moment est donnée par

$$\mu(A) = F_A.$$

**Esquisse de démonstration :** Soit  $\xi \in \Omega^0(\Sigma, \mathfrak{g})$ . La fonction hamiltonienne associée est

$$H_\xi(A) = \int_\Sigma \langle F_A, \xi \rangle.$$

Calculons sa différentielle.

La variation de la courbure est

$$\delta F_A = d_A(\delta A).$$

Ainsi

$$\delta H_\xi = \int_\Sigma \langle d_A(\delta A), \xi \rangle.$$

En intégrant par parties on obtient

$$\delta H_\xi = \int_\Sigma \langle \delta A, d_A \xi \rangle.$$

Or la forme symplectique donne

$$\omega_A(\delta A, d_A \xi) = \int_\Sigma \langle \delta A \wedge d_A \xi \rangle.$$

On obtient donc

$$dH_\xi(\delta A) = \omega_A(\delta A, V_\xi).$$

Ainsi  $H_\xi$  engendre le champ de vecteurs fondamental de l'action de jauge, ce qui montre que la courbure est l'application moment.

**7.6. Action du groupe de jauge et application moment pour une surface à bord.**  
Soit  $\Sigma$  une surface compacte orientée avec bord

$$\partial\Sigma = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_k.$$

On note toujours

$$\mathcal{A} = \Omega^1(\Sigma, \mathfrak{g})$$

l'espace des connexions sur le fibré trivial.

Pour

$$H_\xi(A) = \int_\Sigma \langle F_A, \xi \rangle$$

on calcule

$$\delta F_A = d_A(\delta A).$$

Ainsi

$$\delta H_\xi = \int_\Sigma \langle d_A(\delta A), \xi \rangle.$$

En intégrant par parties on obtient

$$\delta H_\xi = \int_\Sigma \langle \delta A, d_A \xi \rangle + \int_{\partial\Sigma} \langle \delta A, \xi \rangle.$$

Cela signifie que pour le sous-groupe  $\mathcal{G}_0 \subset \mathcal{G}$  du groupe de jauge, l'action est hamiltonienne et l'application moment est donnée par la courbure. Le quotient symplectique est donc l'ensemble des connexions plates munies d'une trivialisations du fibré au bord.

L'espace de modules qui nous intéresse est ensuite le quotient par le groupe des courants

$$\text{Map}(\partial\Sigma, G) = \prod_i \text{Map}(S^1, G).$$

L'application moment correspondante est donnée par la formule

$$\mu(A) = A|_{\partial\Sigma},$$

cela est bien défini, puisque la connexion est trivialisée sur le bord. Son but s'identifie au dual de l'extension centrale de l'algèbre de Lie des courants.

**7.7. Discrétisation de Fock–Rosly.** Soit  $\Sigma$  une surface orientée avec bord. L'espace des connexions plates modulo jauge peut être décrit comme

$$\text{Hom}(\pi_1(\Sigma), G)/G.$$

La construction de Fock–Rosly fournit une description symplectique explicite de cet espace en termes de variables de groupe associées à un graphe plongé dans la surface.

Un *graphe rubané* (ou *fat graph*) est un graphe  $\Gamma$  muni, en chaque sommet, d'un ordre cyclique sur les demi-arêtes incidentes. Cette donnée est équivalente à une façon d'épaissir le graphe en une surface orientée.

À chaque arête orientée  $e$  du graphe on associe un élément  $g_e \in G$  qui représente l'holonomie de la connexion le long de cette arête. Changement d'orientation d'arête correspond à l'inversion du groupe. L'espace des variables discrètes est donc  $G^{E(\Gamma)}$ , où  $E(\Gamma)$  désigne l'ensemble des arêtes du graphe.

Le groupe  $G^{V(\Gamma)}$  agit par transformations de jauge en chaque sommet :

$$g_e \mapsto h_{s(e)}^{-1} g_e h_{t(e)},$$

où  $s(e)$  et  $t(e)$  désignent la source et la cible de l'arête.

Le quotient de l'espace des solutions des contraintes par cette action reproduit l'espace des représentations

$$\mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma), G)/G.$$

La construction de Fock–Rosly introduit sur l'espace  $G^{E(\Gamma)}$  une structure de Poisson explicite (dépendant d'une  $r$ -matrice classique  $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ ) qui descend au quotient et coïncide avec la structure symplectique naturelle sur l'espace des connexions plates modulo jauge.

Pour définir la structure de Poisson, on utilise un graphe gras cilié. Pour chaque sommet  $v$ , on définit un bivecteur  $P_v$  sur le produit des copies de  $G$  :

$$P_v = \sum_{\alpha < \beta} r^{ij} X_i^\alpha \wedge X_j^\beta + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} r^{ij} X_i^\alpha \wedge X_j^\alpha,$$

où  $X_i^\alpha$  désigne le champ de vecteurs invariant à gauche sur le groupe correspondant à l'arête  $\alpha$  et au  $i$ -ème élément de l'algèbre de Lie.

La structure de Poisson globale sur  $G^{E(\Gamma)}$  est donnée par :

$$P = \sum_{v \in \mathcal{V}} P_v$$

Le champ de vecteur fondamental  $X^{(v)}$  pour l'action de jauge au sommet  $v$  est défini par :

$$X^{(v)} = \sum_{\alpha \in v} X^\alpha$$

En utilisant une base  $\mathcal{B}$ -orthonormée  $(X_1, \dots, X_N)$ , les termes de  $P_v$  peuvent être réordonnés ainsi :

$$P_v = \tilde{r}^{ij} X_i^{(v)} \otimes X_j^{(v)} + \sum_{\alpha, \beta \in v} (\alpha, \beta)_v X_i^\alpha \otimes X_j^\beta$$

Où  $\tilde{r}$  est la partie antisymétrique de  $r$  et les coefficients  $(\alpha, \beta)_v$  sont définis par :

$$(\alpha, \beta)_v = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha > \beta \\ 0 & \text{si } \alpha = \beta \\ -1 & \text{si } \alpha < \beta \end{cases}$$

### Exercices.

#### (1) Extension centrale de l'algèbre des courants au bord.

Soit  $\Sigma$  une surface orientée avec bord

$$\partial\Sigma = \bigsqcup_{i=1}^k S^1.$$

On considère l'espace des connexions

$$\mathcal{A} = \Omega^1(\Sigma, \mathfrak{g})$$

muni de la forme symplectique

$$\omega_A(a, b) = \int_{\Sigma} \langle a \wedge b \rangle.$$

Le quotient symplectique par le sous-groupe

$$\mathcal{G}_0 = \{g : \Sigma \rightarrow G \mid g|_{\partial\Sigma} = 1\}$$

est l'espace des connexions plates munies d'une trivialisations du fibré sur le bord.

Le groupe résiduel est le groupe des courants

$$\text{Map}(\partial\Sigma, G) = \prod_i \text{Map}(S^1, G).$$

Pour

$$\xi \in \Omega^0(\partial\Sigma, \mathfrak{g})$$

on considère la fonction sur l'espace des connexions plates

$$H_\xi(A) = \int_{\partial\Sigma} \langle A, \xi \rangle.$$

(a) Montrer que la variation de  $H_\xi$  est donnée par

$$\delta H_\xi = \int_{\partial\Sigma} \langle \delta A, \xi \rangle.$$

(b) En utilisant la structure symplectique

$$\omega_A(a, b) = \int_{\Sigma} \langle a \wedge b \rangle,$$

montrer que le champ hamiltonien correspondant est donné par la transformation de jauge

$$\delta_\xi A = d_A \xi.$$

(c) Montrer que

$$\{H_\xi, H_\eta\} = H_{[\xi, \eta]} + \int_{\partial\Sigma} \langle \xi, d\eta \rangle.$$

(d) Conclure que l'algèbre de Poisson des fonctions  $H_\xi$  réalise une extension centrale de l'algèbre de Lie des courants  $\text{Map}(\partial\Sigma, \mathfrak{g})$ .

## (2) Structure de Poisson de Fock–Rosly pour un graphe à une arête.

Considérons un graphe rubané  $\Gamma$  constitué d'un seul sommet et d'une seule arête bouclée. L'ordre cyclique au sommet est celui induit par l'orientation de la surface. La surface obtenue en épaississant ce graphe est un cylindre.

(a) Montrer que le bivecteur de Poisson obtenu s'écrit

$$\pi = r^{ij} L_i \wedge L_j - r^{ij} R_i \wedge R_j.$$

(b) En déduire que cette structure de Poisson coïncide avec la structure de Poisson sur  $G$  associée à la bigèbre de Lie cobord associée à la  $r$ -matrice.

## (3) Graphe rubané à deux sommets : double de Drinfeld.

Considérons un graphe rubané  $\Gamma$  constitué de deux sommets  $v_1, v_2$  reliés par deux arêtes orientées  $e_1, e_2$  allant de  $v_1$  vers  $v_2$ . Le voisinage épaissi de ce graphe est un cylindre.

Dans la construction de Fock–Rosly, on associe aux arêtes  $g_1, g_2 \in G$ . L'espace des variables discrètes est donc  $G^2$ .

(a) Montrer que le bivecteur de Poisson peut s'écrire sous la forme

$$\pi = r^{ij} (L_i^{(1)} \wedge L_j^{(1)} - R_i^{(1)} \wedge R_j^{(1)} + L_i^{(2)} \wedge L_j^{(2)} - R_i^{(2)} \wedge R_j^{(2)}) + r^{ij} L_i^{(1)} \wedge R_j^{(2)}.$$

(b) Montrer que cette structure de Poisson coïncide avec la structure de Poisson naturelle du double de Drinfeld.

## 8. GÉOMÉTRIE COMPLEXE DES COURBES ELLIPTIQUES

**Bibliographie.** Voir [GH94, Ch. 0-2].

**8.1. Variétés algébriques affines et complexes.** Soit  $k$  un corps. Une variété algébrique affine est l'ensemble des solutions d'un système d'équations polynomiales

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = \dots = f_r(x_1, \dots, x_n) = 0,$$

où  $f_i \in k[x_1, \dots, x_n]$ .

La géométrie de cet ensemble est encodée dans l'anneau de coordonnées

$$A = k[x_1, \dots, x_n]/(f_1, \dots, f_r).$$

Lorsque  $k = \mathbb{C}$ , on peut étudier ces ensembles à l'aide de l'analyse complexe. Une variété complexe de dimension  $n$  est un espace topologique muni d'un atlas de cartes à valeurs dans  $\mathbb{C}^n$  dont les changements de cartes sont holomorphes.

Toute variété algébrique complexe lisse possède naturellement une structure de variété complexe.

Une surface orientée peut parfois être munie d'une structure complexe. Une telle structure transforme la surface en variété complexe de dimension 1, appelée *surface de Riemann*.

**8.2. Courbes elliptiques.** Soit  $\Lambda \subset \mathbb{C}$  un réseau

$$\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2, \quad \omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{R}.$$

Le quotient

$$E = \mathbb{C}/\Lambda$$

est une surface compacte de Riemann de genre 1, appelée *courbe elliptique*.

Une courbe elliptique peut être décrite algébriquement par une équation

$$y^2 = x^3 + ax + b, \quad 4a^3 + 27b^2 \neq 0.$$

**8.3. Cohomologie de Dolbeault.** Soit  $X$  une variété complexe. La décomposition

$$\Omega^k(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} \Omega^{p,q}(X)$$

permet d'écrire la différentielle extérieure sous la forme

$$d = \partial + \bar{\partial},$$

où

$$\partial : \Omega^{p,q} \rightarrow \Omega^{p+1,q}, \quad \bar{\partial} : \Omega^{p,q} \rightarrow \Omega^{p,q+1}.$$

La relation  $d^2 = 0$  implique

$$\bar{\partial}^2 = 0.$$

*Cohomologie de Dolbeault.* La *cohomologie de Dolbeault* est définie par

$$H_{\bar{\partial}}^{p,q}(X) = \frac{\ker(\bar{\partial} : \Omega^{p,q} \rightarrow \Omega^{p,q+1})}{\text{im}(\bar{\partial} : \Omega^{p,q-1} \rightarrow \Omega^{p,q})}.$$

**8.4. Fibrés vectoriels holomorphes.** Soit  $E \rightarrow X$  un fibré vectoriel complexe lisse.

**Définition.** Une *structure holomorphe* sur  $E$  est un opérateur

$$\bar{\partial}_E : \Omega^0(X, E) \longrightarrow \Omega^{0,1}(X, E)$$

tel que

- (1)  $\bar{\partial}_E(fs) = \bar{\partial}f \cdot s + f \bar{\partial}_E s$ ,
- (2)  $\bar{\partial}_E^2 = 0$ .

Autrement dit, une structure holomorphe peut être vue comme une continuation de l'opérateur  $\bar{\partial}$  aux sections du fibré.

L'opérateur  $\bar{\partial}_E$  s'étend naturellement à

$$\bar{\partial}_E : \Omega^{0,q}(X, E) \rightarrow \Omega^{0,q+1}(X, E),$$

ce qui permet de définir la cohomologie de Dolbeault à valeurs dans  $E$  :

$$H^{0,q}(X, E).$$

**8.5. Déformations de fibrés.** La théorie des déformations des fibrés vectoriels holomorphes est contrôlée par les groupes d'extensions.

— Les *déformations infinitésimales* d'un fibré holomorphe  $E$  sont paramétrées par

$$H^1(X, \text{End}(E)) \simeq \text{Ext}^1(E, E).$$

— Plus généralement, les extensions de deux fibrés holomorphes  $E_1, E_2$  sont classifiées par

$$\text{Ext}^1(E_2, E_1) \simeq H^1(X, \mathcal{H}om(E_2, E_1)).$$

Une classe

$$\alpha \in \text{Ext}^1(E_2, E_1)$$

correspond à une suite exacte courte de fibrés holomorphes

$$0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow E \longrightarrow E_2 \longrightarrow 0.$$

**8.6. Dualité de Serre sur une courbe.** Soit  $C$  une courbe et  $E$  un fibré vectoriel holomorphe sur  $C$ . Alors il existe un accouplement bilinéaire naturel

$$H^0(C, E) \times H^1(C, E^* \otimes K_C) \longrightarrow \mathbb{C},$$

où  $K_C = \Omega_C^1$  est le fibré canonique de  $C$ .

Cet accouplement est parfait, ce qui donne un isomorphisme canonique

$$H^1(C, E) \simeq H^0(C, E^* \otimes K_C)^*.$$

En particulier, pour un fibré en droites  $L$ ,

$$H^1(C, L) \simeq H^0(C, K_C \otimes L^{-1})^*.$$

**8.7. Théorème de Riemann–Roch.** Si  $E$  est un fibré vectoriel holomorphe de rang  $r$  et de degré  $d$  ( $= \deg(\det E)$ ) sur une courbe compacte  $C$ , on pose

$$h^i(E) = \dim H^i(C, E).$$

On définit la caractéristique d'Euler

$$\chi(E) = h^0(E) - h^1(E) = h^0 - h^0(E^* \otimes K_C).$$

Alors

$$\chi(E) = d + r(1 - g)$$

Si  $C$  est une courbe elliptique ( $g = 1$ ), la formule devient particulièrement simple :

$$\chi(E) = d.$$

**8.8. Fibrés en droites et jacobien.** Un *diviseur* sur une courbe est une combinaison formelle

$$D = \sum n_p p.$$

Un diviseur est *principal* s'il provient d'une fonction méromorphe :

$$(f) = \sum_{p \in C} \text{ord}_p(f) p.$$

À tout diviseur  $D$  on associe un fibré en droites  $\mathcal{O}(D)$ . Deux diviseurs définissent le même fibré si leur différence est principale.

Les diviseurs principaux forment un sous-groupe

$$\text{Prin}(C) \subset \text{Div}(C).$$

**Définition.** Le *groupe de Picard* de la courbe  $C$  est le quotient

$$\text{Pic}(C) = \text{Div}(C)/\text{Prin}(C).$$

Le *jacobien* d'une courbe  $C$  est

$$\text{Jac}(C) = \text{Pic}^0(C) = \{[D] \in \text{Pic}(C) \mid \deg D = 0\}.$$

Pour une courbe elliptique  $C$ , on obtient un résultat remarquable :

$$\text{Jac}(C) \simeq C.$$

La fonction de Weierstrass

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \left( \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

est méromorphe et  $\Lambda$ -périodique :

$$\wp(z + \omega) = \wp(z), \quad \omega \in \Lambda.$$

Elle définit donc une fonction méromorphe sur la courbe elliptique  $E = \mathbb{C}/\Lambda$ . La fonction  $\wp$  possède un pôle double en 0 et aucun autre pôle sur  $E$ , ainsi que deux zéros (comptés avec multiplicité) symétriques.

Cela implique que pour tout diviseur de degré zéro

$$D = \sum n_i p_i, \quad \sum n_i = 0,$$

on a

$$D \sim \left( \sum n_i p_i \right) - (0),$$

où la somme est prise sur le tore, qui est la courbe elliptique.

**8.9. Plongement projectif associé à un diviseur.** Soit  $C$  une courbe lisse et soit  $D$  un diviseur sur  $C$ .

L'espace des sections globales de  $\mathcal{O}(D)$  est de dimension finie. On note

$$|D| = \mathbb{P}H^0(C, \mathcal{O}(D))$$

le système linéaire complet associé à  $D$ .

À un point  $p \in C$ , l'évaluation des sections définit une application rationnelle

$$\varphi_D : C \dashrightarrow \mathbb{P}H^0(C, \mathcal{O}(D))^*, \quad p \mapsto [s_0(p) : \cdots : s_n(p)],$$

où  $(s_0, \dots, s_n)$  est une base de  $H^0(C, \mathcal{O}(D))$ .

On dit que le système linéaire  $|D|$  est *sans points base* si pour tout point  $p \in C$ , il existe une section  $s \in H^0(C, \mathcal{O}(D))$  telle que  $s(p) \neq 0$ .

Si le diviseur  $D$  est sans points base, l'application  $\varphi_D$  est bien définie partout et donne un morphisme

$$\varphi_D : C \longrightarrow \mathbb{P}^n, \quad n = \dim H^0(C, \mathcal{O}(D)) - 1.$$

### Exercices.

#### (1) Loi de groupe sur une courbe elliptique plane

Soit  $E \subset \mathbb{P}^2$  une courbe projective lisse donnée par une équation cubique homogène

$$F(x, y, z) = 0.$$

On fixe un point  $O \in E$ , que l'on appellera le point à l'infini.

- (a) Montrer que toute droite  $L \subset \mathbb{P}^2$  coupe  $E$  en trois points comptés avec multiplicité.
- (b) Soient  $P, Q \in E$ . Soit  $L$  la droite passant par  $P$  et  $Q$  (ou la tangente en  $P$  si  $P = Q$ ). Noter  $R$  le troisième point d'intersection de  $L$  avec  $E$ .
- (c) Soit  $L'$  la droite passant par  $R$  et  $O$ . On note  $P + Q$  le troisième point d'intersection de  $L'$  avec  $E$ .
- (d) Montrer que cette construction définit une loi de composition

$$E \times E \rightarrow E, \quad (P, Q) \mapsto P + Q.$$

- (e) Vérifier que  $O$  est l'élément neutre et que l'inverse d'un point  $P$  est le troisième point d'intersection de la droite  $OP$  avec la courbe.
- (f) Montrer que cette loi fait de  $E$  un groupe abélien.

## 9. STRUCTURES DE POISSON DE FEIGIN–ODESSKII

**Bibliographie.** Voir [Mac63, Sec. III.1-3], [Ati57].

**9.1. Extensions de Yoneda.** Les extensions fournissent une interprétation concrète des groupes Ext en termes de suites exactes.

Soient  $E$  et  $F$  deux fibrés vectoriels holomorphes sur une courbe  $C$ . Une *extension* de  $F$  par  $E$  est une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow F \longrightarrow 0.$$

On dit alors que  $G$  est un fibré obtenu comme extension de  $F$  par  $E$ .

Deux extensions

$$0 \rightarrow E \rightarrow G \rightarrow F \rightarrow 0, \quad 0 \rightarrow E \rightarrow G' \rightarrow F \rightarrow 0$$

sont dites *isomorphes* s'il existe un isomorphisme

$$\phi : G \rightarrow G'$$

tel que le diagramme commute et que  $\phi$  induise l'identité sur  $E$  et sur  $F$ .

L'ensemble des classes d'isomorphisme d'extensions de  $F$  par  $E$  est naturellement en bijection avec  $\text{Ext}^1(F, E)$ .

L'extension

$$0 \rightarrow E \rightarrow E \oplus F \rightarrow F \rightarrow 0$$

est appelée *extension triviale*.

Une extension est dite *scindée* s'il existe un morphisme

$$s : F \rightarrow G$$

tel que la composition  $F \rightarrow G \rightarrow F$  soit l'identité. Dans ce cas on a un isomorphisme

$$G \simeq E \oplus F.$$

Une extension est scindée si et seulement si sa classe dans  $\text{Ext}^1(F, E)$  est nulle.

Soit

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

une extension représentant une classe

$$\xi \in \text{Ext}^1(F, E).$$

**Composition à gauche (pushout).**

Soit

$$u : E \rightarrow E'$$

un morphisme.

On construit le *pushout*

$$G' = G \oplus_E E'$$

défini comme le quotient de  $G \oplus E'$  par les relations

$$(e, -u(e)), \quad e \in E.$$

On obtient alors une extension

$$0 \longrightarrow E' \longrightarrow G' \longrightarrow F \longrightarrow 0,$$

appelée *image directe* de l'extension par  $u$ . Elle définit une application naturelle

$$u_* : \text{Ext}^1(F, E) \longrightarrow \text{Ext}^1(F, E').$$

**Composition à droite (pullback).**

Soit maintenant

$$v : F' \rightarrow F$$

un morphisme.

On définit le *pullback*

$$G'' = G \times_F F' = \{(g, f') \in G \times F' \mid p(g) = v(f')\},$$

où  $p : G \rightarrow F$  est la projection de l'extension.

On obtient une extension

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow G'' \longrightarrow F' \longrightarrow 0,$$

appelée *image réciproque* de l'extension par  $v$ . Elle définit une application

$$v^* : \text{Ext}^1(F, E) \longrightarrow \text{Ext}^1(F', E).$$

Ces deux constructions sont fonctorielles et correspondent au *produit de Yoneda*, qui décrit la functorialité des groupes d'extensions par rapport aux deux variables.

**9.2. Suites exactes longues.** Soit une suite exacte courte de fibrés

$$0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow E_2 \longrightarrow E_3 \longrightarrow 0$$

représentant une classe

$$\xi \in \text{Ext}^1(E_3, E_1).$$

En appliquant le foncteur  $\text{Hom}(F, -)$ , on obtient une suite exacte longue

$$0 \rightarrow \text{Hom}(F, E_1) \rightarrow \text{Hom}(F, E_2) \rightarrow \text{Hom}(F, E_3) \xrightarrow{\delta} \text{Ext}^1(F, E_1) \rightarrow \text{Ext}^1(F, E_2) \rightarrow \text{Ext}^1(F, E_3)$$

Le morphisme de connexion

$$\delta : \text{Hom}(F, E_3) \longrightarrow \text{Ext}^1(F, E_1)$$

est donné par la composition de Yoneda avec la classe de l'extension.

De même, en appliquant le foncteur contravariant  $\text{Hom}(-, F)$ , on obtient une suite exacte longue

$$0 \rightarrow \text{Hom}(E_3, F) \rightarrow \text{Hom}(E_2, F) \rightarrow \text{Hom}(E_1, F) \xrightarrow{\delta'} \text{Ext}^1(E_3, F) \rightarrow \text{Ext}^1(E_2, F) \rightarrow \text{Ext}^1(E_1, F)$$

Le morphisme de connexion

$$\delta' : \text{Hom}(E_1, F) \longrightarrow \text{Ext}^1(E_3, F)$$

est également donné par la composition de Yoneda avec la classe  $\xi$ .

**9.3. Structures de Poisson quadratiques.** Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension finie. Une *structure de Poisson quadratique* sur  $V$  est un bivecteur de Poisson

$$\pi \in \Gamma(V, \Lambda^2 TV)$$

dont les coefficients sont des polynômes homogènes de degré 2 dans les coordonnées linéaires sur  $V$ .

Autrement dit, dans des coordonnées linéaires  $x_1, \dots, x_n$ , on a

$$\pi = \sum_{i,j,k,l} c_{ij}^{kl} x_k x_l \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j},$$

où les  $c_{ij}^{kl}$  sont des constantes.

Soit  $\mathbb{P}(V)$  l'espace projectif associé à  $V$ .

On dispose de la suite exacte d'Euler

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)} \longrightarrow V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1) \longrightarrow T_{\mathbb{P}(V)} \longrightarrow 0.$$

Par dualité on obtient

$$0 \longrightarrow \Omega_{\mathbb{P}(V)}^1 \longrightarrow V^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(-1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)} \longrightarrow 0.$$

Ces suites exactes décrivent les fibrés tangent et cotangent de l'espace projectif.

Une structure de Poisson sur  $\mathbb{P}(V)$  est une section

$$\pi \in H^0(\mathbb{P}(V), \Lambda^2 T_{\mathbb{P}(V)})$$

telle que  $[\pi, \pi] = 0$ .

Une structure de Poisson quadratique sur  $V$  est homogène de degré 2. Elle est donc invariante par l'action scalaire  $x \mapsto \lambda x$ . Par conséquent elle se projette sur une structure de Poisson sur l'espace projectif  $\mathbb{P}(V)$ .

Réciproquement, toute structure de Poisson sur  $\mathbb{P}(V)$  se relève de manière canonique (par rapport à  $GL(V)$ ) en une structure de Poisson quadratique sur  $V$ .

**9.4. Structure de Poisson quadratique de Feigin–Odesskii.** Soit  $C$  une courbe elliptique et soit  $L$  un fibré en droites sur  $C$  de degré  $n > 1$ .

Par dualité de Serre on a

$$H^1(C, L^*) \simeq H^0(C, L)^*.$$

On considère l'espace projectif  $\mathbb{P}H^1(C, L^*)$ . Nous allons définir sur cet espace un champ de bivecteurs, qui donnera une structure de Poisson.

Un point de  $\mathbb{P}H^1(C, L^*)$  est donné par  $0 \neq e \in H^1(C, L^*)$ . La classe  $e$  correspond à une extension

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow E \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

Nous allons décrire certaines déformations infinitésimales de cette extension qui ne déforment pas la classe d'isomorphisme du fibré  $E$ .

Soit

$$f \in H^0(C, L).$$

On cherche à relever ce morphisme en un endomorphisme du fibré  $E$ , c'est-à-dire compléter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{O} & \longrightarrow & E & \longrightarrow & L & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow & & \searrow f & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{O} & \longrightarrow & E & \longrightarrow & L & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

La première obstruction à l'existence d'un tel relèvement est donnée par  $e \cdot f \in H^1(C, \mathcal{O})$ . Ainsi la condition

$$e \cdot f = 0$$

signifie que  $f$  appartient à l'espace cotangent de  $\mathbb{P}H^1(C, L)$  au point  $e$ .

Lorsque cette première obstruction s'annule, la seconde obstruction appartient à

$$H^1(C, L^*)/\langle e \rangle.$$

On obtient ainsi une application

$$H^0(C, L) \supset T_e^* \mathbb{P}H^1(C, L^*) \longrightarrow T_e \mathbb{P}H^1(C, L^*) = H^1(C, L^*)/\langle e \rangle.$$

Cette application dépend polynomialement du point  $e$  et définit un champ de bivecteurs sur  $\mathbb{P}H^1(C, L^*)$ .

L'image de cette application correspond aux directions le long desquelles la classe d'isomorphisme du fibré  $E$  ne change pas. Son noyau est l'espace des automorphismes sans trace du fibré  $E$ . De plus, l'algèbre de Lie conormale associée à cette structure de Poisson coïncide avec cette algèbre d'automorphismes.

Cette structure est appelée *structure de Poisson de Feigin–Odesskii*.

**9.5. Produit de Massey triple.** Les produits de Massey sont des opérations d'ordre supérieur dans la cohomologie des algèbres différentielles graduées. Ils mesurent l'obstruction à la trivialité de certains produits dans la cohomologie.

Soit  $(A, d)$  une algèbre associative différentielle graduée. On note  $H^\bullet(A)$  sa cohomologie.

Soient

$$a, b, c \in H^\bullet(A)$$

trois classes telles que

$$ab = 0, \quad bc = 0$$

dans la cohomologie.

On choisit des représentants

$$\alpha, \beta, \gamma \in A$$

tels que

$$d\alpha = d\beta = d\gamma = 0.$$

L'hypothèse  $ab = 0$  signifie que  $\alpha\beta$  est exacte, donc il existe  $x \in A$  tel que

$$dx = \alpha\beta.$$

De même,  $bc = 0$  implique l'existence de  $y \in A$  tel que

$$dy = \beta\gamma.$$

On considère alors l'élément

$$\alpha y - x\gamma.$$

Un calcul direct montre que

$$d(\alpha y - x\gamma) = 0.$$

Sa classe de cohomologie définit le *produit de Massey triple*

$$\langle a, b, c \rangle \subset H^{|a|+|b|+|c|-1}(A).$$

Ce produit n'est pas un élément unique mais un sous-ensemble affine de la cohomologie, dépendant des choix de  $x$  et  $y$ .

La construction ci-dessus peut être interprétée comme un calcul du produit de Massey  $\langle e, f, e \rangle$ . Cette approche permet de démontrer que le bivecteur ainsi construit définit une structure de Poisson.

**9.6. Classification des fibrés vectoriels sur une courbe elliptique.** Les fibrés vectoriels sur une courbe elliptique ont été classifiés par Atiyah. Soit  $C$  une courbe elliptique. Pour tout couple d'entiers naturels  $(d, r)$  premiers entre eux, il existe un fibré vectoriel  $\mathcal{E}_{d,r}$  de rang  $r$  et de degré  $d$ , unique à isomorphisme près modulo tensorisation par un fibré en droites de degré 0.

Tout fibré vectoriel sur  $C$  se décompose en somme directe de fibrés indécomposables. Chaque composante indécomposable est obtenue comme extension itérée d'un fibré simple  $\mathcal{E}_{d,r}$  par lui-même.

Dans la construction de la structure de Poisson de Feigin–Odesskii, on peut remplacer le fibré en droites  $L$  par n'importe quel fibré simple. Lorsque l'on applique la construction de Feigin–Odesskii au fibré simple  $\mathcal{E}_{d,r}$ , on obtient une structure de Poisson quadratique sur l'espace projectif des classes d'extensions  $\mathbb{P}H^1(C, \mathcal{E}_{d,r}^*)$ .

Cette structure de Poisson est appelée la *structure de Poisson de Feigin–Odesskii* associée au couple  $(d, r)$  et est notée  $q_{d,r}$ . Lorsque  $r = 1$ , on retrouve la structure de Poisson de Feigin–Odesskii comme au-dessus associée à un fibré en droites de degré  $d$ .

Une autre conséquence de cette classification est que les feuilles symplectiques de la structure de Poisson de Feigin–Odesskii correspondent aux différents types de fibrés vectoriels obtenus comme ci-dessus, c'est-à-dire aux classes d'isomorphisme des fibrés vectoriels ayant une décomposition fixée en extensions itérées de fibrés simples.

**Exercices.**

- (1) **q<sub>3,1</sub>** On considère la structure de Poisson de Feigin–Odesskii  $q_{3,1}$  sur l'espace projectif  $\mathbb{P}H^1(C, L^*)$ , où  $C$  est une courbe elliptique et  $L$  est un fibré en droites de degré 3.

Les points de cet espace correspondent aux extensions

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow E \longrightarrow L \longrightarrow 0.$$

- (a) **Feuilles de rang 0.**

Montrer que les feuilles de rang 0 correspondent aux extensions pour lesquelles le fibré  $E$  est décomposable en somme de deux fibrés de degrés 2 et 1, alors il existe un point  $p \in C$  tel que

$$E \simeq \mathcal{O}(p) \oplus L(-p).$$

- (b) **Description géométrique.**

En déduire que l'ensemble des feuilles symplectiques de rang 0 de la structure de Poisson  $q_{3,1}$  est une copie de la courbe elliptique  $C$ , plongée comme une cubique elliptique dans

$$\mathbb{P}H^1(C, L^*) \simeq PH^0(C, L)^*.$$

- (2) **q<sub>4,1</sub>** On considère la structure de Poisson elliptique de Feigin–Odesskii  $q_{4,1}$  sur l'espace projectif  $\mathbb{P}H^1(C, L^*)$ , où  $C$  est une courbe elliptique et  $L$  un fibré en droites de degré 4.

Les points de cet espace correspondent aux extensions

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow E \longrightarrow L \longrightarrow 0.$$

- (a) **Feuilles de rang 0.**

Montrer que si le fibré  $E$  est décomposable en somme de deux fibrés de degrés 3 et 1, alors il existe un point  $p \in C$  tel que

$$E \simeq \mathcal{O}(p) \oplus L(-p).$$

Montrer que les classes d'isomorphisme de ces fibrés sont paramétrées par la courbe elliptique  $C$ , et que leur image dans

$$\mathbb{P}^3 \simeq \mathbb{P}H^1(C, L^*)$$

est une quartique elliptique.

Montrer que ces points correspondent aux feuilles symplectiques de rang 0 de la structure de Poisson  $q_{4,1}$ .

- (b) **Feuilles de rang 2.**

Montrer que les feuilles symplectiques de rang 2 sont des quadriques dans  $\mathbb{P}^3$  contenant la quartique elliptique précédente.

Montrer que ces feuilles correspondent aux fibrés

$$E \simeq L_1 \oplus L_2,$$

où  $L_1$  et  $L_2$  sont des fibrés en droites de degré 2.

- (c) **Points singuliers et feuilles isolées.**

Montrer que si une quadrique possède un point singulier, alors ce point correspond à une feuille symplectique isolée de rang 0. Montrer qu'il existe exactement quatre tels points, et déterminer à quels fibrés vectoriels  $E$  ils correspondent.

## RÉFÉRENCES

- [Arn78] V. I. ARNOLD. *Mathematical methods of classical mechanics*. Translated from the Russian by K. Vogtmann and A. Weinstein, Graduate Texts in Mathematics, 60. New York : Springer-Verlag, 1978, p. x+462.
- [Ati57] M. F. ATIYAH. “Vector Bundles over an Elliptic Curve”. *Proc. London Math. Soc.* 7 (1957), p. 414-452.
- [Aud97] Michèle AUDIN. “Lectures on gauge theory and integrable systems”. *Gauge Theory and Symplectic Geometry*. Sous la dir. de Jacques HURTUBISE, François LALONDE et Gert SABIDUSSI. Dordrecht : Springer Netherlands, 1997, p. 1-48.
- [CFM21] Marius CRAINIC, Rui Loja FERNANDES et Ioan MĂRCUȚ. *Lectures on Poisson geometry*. Graduate studies in mathematics 217. Providence, Rhode Island : American Mathematical Society, 2021.
- [CP95] V. CHARI et A.N. PRESSLEY. *A Guide to Quantum Groups*. Cambridge University Press, 1995.
- [DK00] Johannes Jisse DUISTERMAAT et Johan A. C. KOLK. *Lie groups*. Universitext. Berlin : Springer, 2000, 344 pages.
- [Eti06] Pavel ETINGOF. *Lectures on Calogero-Moser systems*. <https://arxiv.org/abs/math/0606233>. 2006.
- [FR] V.V. FOCK et A. A. ROSLY. *Poisson structure on moduli of flat connections on Riemann surfaces and r-matrix*. arXiv : math/9802054 [math.QA].
- [FR93] V. V. FOCK et A. A. ROSLY. “Flat connections and polyubles”. *Theoretical and Mathematical Physics* 95.2 (mai 1993), p. 526-534.
- [GH94] Phillip A GRIFFITHS et Joseph HARRIS. *Principles of algebraic geometry*. Wiley classics library. New York, NY : Wiley, 1994.
- [Hal10] Brian C. HALL. *Lie groups, Lie algebras, and representations : an elementary introduction*. T. 222. Graduate Texts in Mathematics. New York : Springer, 2010, 351 pages.
- [Kas12] C. KASSEL. *Quantum Groups*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2012.
- [KN63] Shoshichi KOBAYASHI et Katsumi NOMIZU. *Foundations of differential geometry. Vol I*. Interscience Publishers, a division of John Wiley & Sons, New York-London, 1963, p. xi+329.
- [Mac63] Saunders MAC LANE. *Homology / by Dr. Saunders Mac Lane,...* eng. Die Grund-  
lehren der mathematischen Wissenschaften. Berlin Göttingen Heidelberg : Springer, 1963.
- [Mei24] Eckhard MEINRENKEN. *Symplectic geometry*. <https://www.math.toronto.edu/mein/teaching/LectureNotes/symplectic.pdf>. 2024.
- [Mic08] Peter W. MICHOR. *Topics in Differential Geometry*. Graduate studies in mathematics 93. American Mathematical Society, 2008, p. 494.
- [Ser92] Jean-Pierre SERRE. *Lie Algebras and Lie Groups : 1964 Lectures given at Harvard University*. Lecture Notes in Mathematics no. 1500. Springer Berlin Heidelberg, 1992.
- [Sil08] Ana Cannas da SILVA. *Lectures on symplectic geometry*. eng. Corr. 2nd print. Lecture notes in mathematics, 1764. Berlin : Springer, 2008.
- [Vai94] Izu VAISMAN. *Lectures on the geometry of Poisson manifolds*. Progress in mathematics vol. 118. Basel : Birkhäuser Verlag, 1994.