EXERCICES SUR LES FORMES DIFFÉRENTIELLES POUR LE MASTER DE MATHÉMATIQUES

2011-2012

Michèle Audin

1. Algèbre multilinéaire

Exercice 1.1. Un espace vectoriel est isomorphe à son dual. Commenter.

Exercice 1.2. Soient α, $\beta \in E^\star$. À quelle condition a-t-on $\alpha \otimes \beta = \beta \otimes \alpha$?

Exercice 1.3. Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie sur le corps $\mathbf{K}$. Montrer que l'espace des formes bilinéaires sur $E \times F$ est un espace vectoriel.

Si $\varphi \in E^\star$, $\psi \in F^\star$, on définit $\varphi \otimes \psi$ par $\varphi \otimes \psi(u,v) = \varphi(u) \cdot \psi(v)$. Montrer que c'est une forme bilinéaire sur $E \times F$ et que, si $(e_i)_i$, $(f_j)_j$ sont des bases de E, F, respectivement, alors $(e^i \otimes f^j)$ est une base de l'espace de ces formes. On note $E^\star \otimes F^\star$ cet espace. Montrez que $E^\star \otimes F^\star$ est isomorphe à l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans $F^\star$.

Exercice 1.4. Est-il vrai que tout élément de $\mathcal{L}^2(E)$ puisse s'écrire sous la forme $\alpha \otimes \beta$?

***Exercice 1.5* (Propriété universelle de l'algèbre tensorielle)**. Soit A une algèbre sur $\mathbf{R}$. On suppose que $f : E^\star \to A$ est une application linéaire. Montrer qu'il existe un unique homomorphisme d'algèbres $\widetilde{f} : T(E^\star) \to A$ qui prolonge f.

***Exercice 1.6* (Base symplectique)**. Soit φ une forme bilinéaire alternée sur un espace vectoriel E de dimension finie. On suppose φ non dégénérée. Montrer qu'il existe une base $e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n$ de E telle que

$$\varphi(e_i, f_j) = \delta_{i,j}, \qquad \varphi(e_i, e_j) = \varphi(f_i, f_j) = 0.$$

Exercice 1.7. Soit A une matrice antisymétrique carrée d'ordre impair. Montrer que le rang de A est pair.

Exercice 1.8. Soit E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbf{R}$. On fixe une base $e_1, \dots, e_n$ de E. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, il existe une unique forme n-linéaire alternée φ sur E telle que

$$\varphi(e_1, \dots, e_n) = \lambda.$$

Montrer que, si une forme n-linéaire alternée prend une valeur non nulle sur une base, elle prend une valeur non nulle sur toutes les bases.

Montrer qu'une forme n-linéaire alternée non nulle s'annule sur $(x_1, \dots, x_n)$ si et seulement si ces vecteurs sont liés.

Exercice 1.9. Soit f un endomorphisme de l'espace vectoriel E de dimension n. Identifier l'application ${}^t f : \Lambda^n E^\star \to \Lambda^n E^\star$. Comment interpréter, dans ce degré, l'égalité ${}^t(f \circ g) = {}^t g \circ {}^t f$?

Exercice 1.10. Une forme k-linéaire alternée est dite décomposable si elle peut s'écrire comme produit extérieur de k formes linéaires (dans le cas contraire, on dit qu'elle est indécomposable). On suppose que la dimension de l'espace est n.

(1) Montrer que toute forme n-linéaire alternée est décomposable.
(2) Soit ω une forme $n-1$-linéaire alternée. Que peut-on dire de l'application

$$\begin{aligned} E^\star &\longrightarrow \Lambda^n E^\star \\ \alpha &\longmapsto \alpha \wedge \omega \end{aligned}$$

En déduire que toute forme $n-1$-linéaire alternée est décomposable.

(3) Soit $\alpha \in E^\star$. Montrer qu'une forme k-linéaire alternée φ peut se décomposer comme $\varphi = \alpha \wedge \psi$ si et seulement si $\alpha \wedge \varphi = 0$.

(4) On suppose que α, β, γ et δ sont quatre formes linéaires indépendantes sur E (en particulier, $n \geq 4$). Montrer que la forme $\omega = \alpha \wedge \beta + \gamma \wedge \delta$ est indécomposable.

Exercice 1.11. Soit E un espace vectoriel de dimension n. Soit $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de dimension k. Montrer que l'algèbre extérieure ΛF est une sous-algèbre de ΛE et que cette algèbre contient (à un facteur scalaire non nul près) un unique élément de degré k.

Exercice 1.12. L'espace vectoriel E est muni d'une base $(e_1, \ldots, e_n)$. À tout élément a de ΛE, on associe un élément $\star a$ de ΛE de la manière suivante :

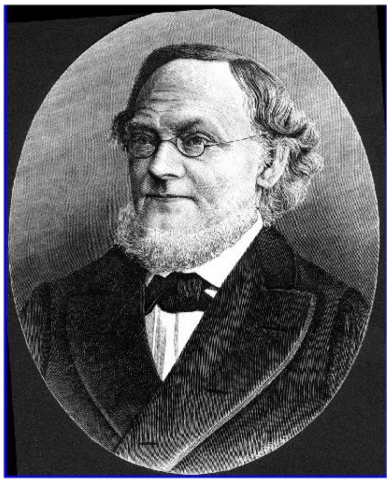
(1) Si $a = e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}$, $\star a = \pm e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_{n-k}}$, de façon que $a \wedge (\star a) = e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$,

(2) on prolonge $\star$ par linéarité.

Déterminer $\star 1$. Si $a = \sum a^i e_i$, calculer $a \wedge (\star a)$. En général, calculer $\star \star a$. La définition de $\star$ dépend du choix de la base $(e_1, \ldots, e_n)$. Quels sont les changements de base qui laissent cette transformation invariante ?

On suppose maintenant que E est euclidien et que la base $(e_1, \ldots, e_n)$ est orthonormée. Soit F un sous-espace de E, et a un élément de ΛE associé à F comme dans l'exercice 1.11. Que peut-on dire de $\star a$?

Montrer que a est décomposable si et seulement si $\star a$ est décomposable.



Hermann Grassmann
(1809–1877)

***Exercice 1.13* (Grassmannienne des plans de $\mathbf{R}^4$)**. Soit E un espace vectoriel de dimension 4, disons sur $\mathbf{R}$. Soit $F \subset E$ un sous-espace de dimension 2 (un plan). Si (u, v) est une base de F, $u \wedge v \in \Lambda^2 E$ est un (bi-)vecteur décomposable (et même décomposé).

Montrer que cette remarque permet d'associer à chaque plan F de E une droite de $\Lambda^2 E$. Autrement dit, on a une application $G_2(E) \longrightarrow P(\Lambda^2 E)$. Est-elle injective ? surjective ?

La suite vise à caractériser les éléments de $P(\Lambda^2 E)$ qui sont dans l'image.

On fixe une base (a, b, c, d) de E, on pose $\omega = \frac{1}{2} a \wedge b \wedge c \wedge d \neq 0 \in \Lambda^4 E$. La formule

$$u, v \in \Lambda^2 E, \qquad u \wedge v = B(u, v)\omega$$

définit une forme bilinéaire B sur $\Lambda^2 E$. Montrer qu'elle est symétrique. Montrer que les six vecteurs

$$a \wedge b + c \wedge d, \quad a \wedge c - b \wedge d, \quad a \wedge d + b \wedge c, \quad a \wedge b - c \wedge d, \quad a \wedge c + b \wedge d, \quad a \wedge d - b \wedge c$$

de $\Lambda^2 E$ forment une base, que celle-ci est orthogonale pour B, et que sa signature est $(3, 3)$ et en particulier que B est non dégénérée.

Montrer (voir l'exercice 1.10) que $w \in \Lambda^2 E$ s'écrit sous la forme $u \wedge v$ si et seulement si $w \wedge w = 0$. En déduire que l'image de $G_2(E)$ dans $P(\Lambda^2 E)$ est l'hypersurface d'équation

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = 0$$

(dans des coordonnées bien choisies).

Exercice 1.14. Montrer qu'il existe des bijections

$$\mathrm{GL}(n; \mathbf{R})/(\mathrm{GL}(k; \mathbf{R}) \times \mathrm{GL}(n-k; \mathbf{R})) \longrightarrow G_k(\mathbf{R}^n)$$
$$\mathrm{O}(n)/(\mathrm{O}(k) \times \mathrm{O}(n-k)) \longrightarrow G_k(\mathbf{R}^n).$$

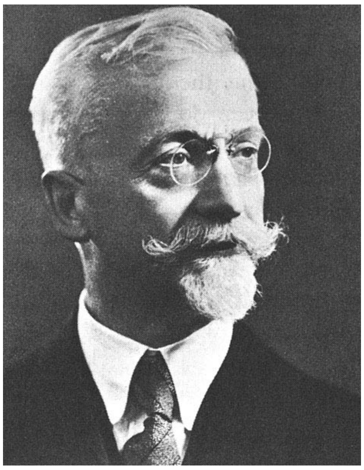
2. Formes différentielles sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$...

Exercice 2.1. Soit $\varphi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, définie par $\varphi(r, \theta) = (r \cos\theta, r \sin\theta)$. Calculer $\varphi^\star dx \wedge dy$.

Exercice 2.2. On considère la 1-forme α définie sur $\mathbf{R}^2 - \{0\}$ par
$$\alpha = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}.$$
Soit $\varphi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, définie par $\varphi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. Calculer $\varphi^\star\alpha$.

Exercice 2.3. Montrer que les deux formes
$$\alpha = x\,dx + y\,dy \qquad \beta = x\,dy - y\,dx$$
(sur $\mathbf{R}^2$) sont invariantes par le groupe des rotations SO(2). Soit ω une 1-forme sur $\mathbf{R}^2 - \{0\}$. On suppose que ω est invariante par SO(2). Montrer que ω est de la forme
$$f(r)\alpha + g(r)\beta \qquad \text{où } r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
(pour deux fonctions f et g de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$).

Exercice 2.4. Soit U un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et soient $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions définies sur U. Montrer que
$$(f_1, \ldots, f_n) : U \longrightarrow \mathbf{R}^n$$
est un difféomorphisme local au voisinage de $x \in U$ si et seulement si
$$(df_1 \wedge \cdots \wedge df_n)_x \neq 0.$$



Élie Cartan
(1869–1951)

Exercice 2.5. Calculer la différentielle de la 2-forme définie sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$ par la formule
$$\alpha = \sum_{i<j} \alpha_{i,j}\,dx^i \wedge dx^j.$$

Exercice 2.6. Calculer les différentielles $d\alpha$ et $d\omega$ des deux formes définies sur $\mathbf{R}^3$ par
$$\alpha = adx + bdy + cdz \text{ et } \omega = Ady \wedge dz + Bdz \wedge dx + Cdx \wedge dy$$
(les coefficients sont des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}^3$).

Exercice 2.7. Calculer l'intégrale, sur le cercle unité, de la forme α de l'exercice 2.2. Montrer qu'il n'existe pas de fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2 - \{0\}$ telle que $\alpha = df$.
Montrer que $d\alpha = 0$.

Exercice 2.8. Pour quelles valeurs de a la forme α définie sur $\mathbf{R}^3 - \{0\}$ par
$$\alpha = (x^2 + y^2 + z^2)^a(xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy)$$
est-elle fermée ($d\alpha = 0$) ?

Exercice 2.9. Soit α la forme différentielle définie sur $\mathbf{R}^n$ par
$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i x^i\,dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^n.$$
Montrer que, si $\varphi \in \mathrm{SL}(n; \mathbf{R})$, $\varphi^\star\alpha = \alpha$. Réciproquement, montrer que, si ω est telle que $\varphi^\star\omega = \omega$ pour tout $\varphi \in \mathrm{SL}(n; \mathbf{R})$, alors $\omega = \lambda\alpha$ pour un $\lambda \in \mathbf{R}$.

***Exercice 2.10* (Divergence, gradient, rotationnel)**. Soit X un champ de vecteurs sur un ouvert $U \subset \mathbf{R}^n$. Montrer qu'il existe une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur U, notée $\mathrm{Div}(X)$ (la *divergence* de X) et telle que
$$\mathcal{L}_X(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n) = \mathrm{Div}(X)(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n).$$
Si $X = \sum X_i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$, on appelle α_X la 1-forme *duale* à X, définie par
$$\alpha_X = \sum X_i dx^i.$$

Étant donnée une fonction f sur U, montrer qu'il existe un unique champ de vecteurs $\operatorname{grad} f$, le *gradient* de f, tel que

$$\alpha_{\operatorname{grad} f} = df.$$

Montrer que l'on a, pour tout champ de vecteurs Y,

$$df(Y) = \operatorname{grad} f \cdot Y.$$

On suppose maintenant que $n = 3$. Montrer qu'il existe un unique champ de vecteurs $\operatorname{rot}(X)$, le *rotationnel* de X, tel que

$$i_{\operatorname{rot}(X)}(dx \wedge dy \wedge dz) = d\alpha_X.$$

Déterminer $\operatorname{Div}(\operatorname{rot}(X))$, $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}(f))$, $\operatorname{Div}(\operatorname{grad} f)$ et, pour deux champs X et Y, montrer que

$$\operatorname{Div}(X \wedge Y) = -X \cdot \operatorname{rot}(Y) + Y \cdot \operatorname{rot}(X)$$

(il s'agit du produit vectoriel et du produit scalaire usuels de $\mathbf{R}^3$).

***Exercice 2.11* (Produit intérieur)**. Soient X un champ de vecteurs et $\alpha \in \Omega^k(U)$, $\beta \in \Omega^\ell(U)$ deux formes différentielles. Montrer que

$$i_X(\alpha \wedge \beta) = i_X\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge i_X\beta.$$

(Rappel : $i_X\alpha(\text{truc}) = \alpha(X, \text{truc})$.)

Exercice 2.12. Soit ω la forme définie sur $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ par

$$\omega = \sum_{i=1}^n dx^i \wedge dy^i.$$

Est-elle fermée ? Exacte ? Calculer $\omega^{\wedge n}$. Cette forme est-elle déjà apparue dans cette feuille ?

Exercice 2.13. Soit ω une 2-forme sur un ouvert de $\mathbf{R}^{2n}$. On dit qu'elle est non-dégénérée si, en tout point x, la forme bilinéaire alternée ω_x est non-dégénérée. Montrer que ω est non-dégénérée si et seulement si la $2n$-forme $\omega^{\wedge n}$ ne s'annule en aucun point.

***Exercice 2.14* (Crochet de deux champs de vecteurs)**. On suppose que X et Y sont deux champs de vecteurs sur un ouvert U (d'une variété, de $\mathbf{R}^n$...). Montrer que $f \mapsto X \cdot (Y \cdot f)$ n'est pas une dérivation sur les fonctions sur U, mais que

$$f \longmapsto X \cdot (Y \cdot f) - Y \cdot (X \cdot f)$$

en est une. On la note $f \mapsto [X, Y] \cdot f$, définissant ainsi le crochet des deux champs de vecteurs X et Y. On suppose que $(x^1, \ldots, x^n)$ sont des coordonnées sur U, dans lesquelles

$$X = \sum X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad Y = \sum Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Montrer que

$$[X, Y] = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \left(X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \right)$$

***Exercice 2.15* (Crochet et différentielle extérieure)**. Soit $\alpha \in \Omega^k(U)$ et soient $X_0, \ldots, X_k$ $k+1$ champs de vecteurs sur l'ouvert U. On veut montrer que

$$\begin{aligned} (d\alpha)(X_0, \ldots, X_k) = \sum_{i=0}^k (-1)^i X_i \cdot \alpha(X_0, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_k) \\ + \sum_{1 \leq i < j \leq k} (-1)^{i+j} \alpha([X_i, X_j], X_0, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, \widehat{X_j}, \ldots, X_k) \end{aligned}$$

Montrer que c'est vrai pour $k = 0$. Pour $k = 1$, montrer qu'il suffit de le démontrer pour les formes $f\, dg$, puis le faire. Comment faire le cas général ?

3. ... sur des sous-variétés de $\mathbf{R}^n$...

Exercice 3.1. Soit α une 1-forme sur la sphère S^2. On suppose que pour tout $\varphi \in \mathrm{SO}(3)$, $\varphi^\star\alpha = \alpha$. Montrer que $\alpha = 0$.

***Exercice 3.2* (Une 2-forme sur S^2...)**. Montrer que la formule

$$\omega_p(Y, Z) = p \cdot (Y \wedge Z)$$

($p \in S^2 \subset \mathbf{R}^3$, Y, $Z \in p^\perp \subset \mathbf{R}^3$ et $\wedge$ désigne le produit vectoriel) définit une forme différentielle de degré 2 sur la sphère S^2.

Soit X le champ de vecteurs défini sur $\mathbf{R}^3$ par la formule

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}$$

et soit α la 2-forme sur $\mathbf{R}^3$

$$\alpha = i_X(dx \wedge dy \wedge dz).$$

Montrer que

$$j^\star\alpha = \omega$$

(j désignant l'inclusion de S^2 dans $\mathbf{R}^3$). Déterminer la 2-forme $\left(\varphi_N^{-1}\right)^\star \omega$ sur $\mathbf{R}^2$.

***Exercice 3.3* (... et plus généralement une n-forme sur S^n)**. De même la formule

$$\omega_x(v_1, \ldots, v_n) = \mathrm{dét}(x, v_1, \ldots, v_n)$$

définit une n-forme sur S^n, qui vérifie $\omega = j^\star\alpha$ pour

$$\alpha = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i x^i dx^0 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx}^i \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

4. ... et sur des variétés

Exercice 4.1. Soit ω une 2-forme exacte sur une variété de dimension $2n$. Montrer que ω^n est exacte.

***Exercice 4.2* (Formes différentielles sur l'espace projectif)**. On considère la projection naturelle

$$p : \mathbf{R}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow \mathbf{P}^n(\mathbf{R})$$

et l'application linéaire

$$p^\star : \Omega(\mathbf{P}^n(\mathbf{R})) \longrightarrow \Omega(\mathbf{R}^{n+1} - \{0\}).$$

Montrer que $p^\star$ est injective et que son image est l'ensemble de toutes les formes α sur $\mathbf{R}^{n+1} - \{0\}$ qui vérifient

$$i_X\alpha = 0 \text{ et } h_\lambda^\star\alpha = \alpha \text{ pour toute homothétie } h_\lambda, \lambda \neq 0$$

où X désigne le champ de vecteurs radial $X_x = x$.

La forme α de l'exercice 3.3 provient-elle d'une forme sur $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$?

Exercice 4.3. On note (x, y) les coordonnées de $\mathbf{R}^2$. Soit $p : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2 = T^2$ la projection. Montrer qu'il existe une unique 2-forme ω sur T^2 telle que

$$p^\star\omega = dx \wedge dy.$$

Cette forme est-elle fermée ? exacte ?

***Exercice 4.4* (Forme « tautologique » sur le cotangent)**. Dans cet exercice, la variété considérée, W, est le fibré cotangent $T^\star V$ d'une variété V de dimension n (ainsi W est une variété de dimension $2n$). Elle est munie d'une projection

$$p : W = T^\star V \longrightarrow V.$$

On désigne par (x, φ) (avec $x \in V$ et $\varphi \in (T_xV)^\star$ une forme linéaire sur T_xV) les points de W. On définit $\lambda \in \Omega^1(T^\star V)$ par

$$\text{pour } (x, \varphi) \in W, \quad X \in T_{(x,\varphi)}W, \qquad \lambda(x, \varphi)(X) = \varphi\Big(T_{(x,\varphi)}p(X)\Big).$$

Soit $\alpha \in \Omega^1(V)$. Ainsi, pour $x \in V$, α_x est une forme linéaire sur T_xV, autrement dit, une application

$$\alpha : V \longrightarrow T^\star V = W.$$

Que vaut $\alpha^\star(\lambda)$?

Exercice 4.5. Sur $\mathbf{C}^{n+1}$, on utilise les vecteurs $z = (x, y)$, avec les coordonnées $z_k = x_k + iy_k = (x_k, y_k)$. On considère la sphère unité

$$S^{2n+1} = \left\{ z \in \mathbf{C}^{n+1} \mid \sum |z_k|^2 = 1 \right\},$$

la 1-forme (considérée comme une forme sur la sphère)

$$\alpha = \sum_{k=1}^{n} (x_k\, dy_k - y_k\, dx_k)$$

et le champ de vecteurs (considéré lui aussi sur la sphère)

$$X_{x,y} = (-y, x).$$

Pour $w \in S^1$, on note

$$\varphi_w : S^{2n+1} \longrightarrow S^{2n+1} \qquad \varphi_w(z) = wz.$$

Montrer que $\varphi_w^\star \alpha = \alpha$ pour tout w, que $i_X\alpha \equiv 1$ et que $\mathcal{L}_X\alpha = 0$.

On considère maintenant la projection $\pi : S^{2n+1} \to \mathbf{P}^n(\mathbf{C})$. Montrer qu'il existe une unique 2-forme ω sur $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ telle que $\pi^\star\omega = d\alpha$, et qu'elle est fermée ($d\omega = 0$).

Exercice 4.6. Montrer que la forme α de l'exercice 3.3 est une forme volume sur la sphère.

***Exercice 4.7* (Formes volumes)**. Soit α une forme volume sur la variété V de dimension n. Soit $\beta \in \Omega^n(V)$. Montrer qu'il existe une fonction $f : V \to \mathbf{R}$ telle que $\beta = f\alpha$. À quelle condition β est-elle, elle aussi, une forme volume ?

***Exercice 4.8* ((Non-)orientabilité de l'espace projectif réel)**. On considère l'application antipodique $\sigma : x \mapsto -x$ sur la sphère S^n et la projection $\pi : S^n \to \mathbf{P}^n(\mathbf{R})$. On suppose que β est une forme volume sur $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$. Montrer que $\pi^\star\beta$ est une forme volume sur S^n. En utilisant les exercices 4.6 et 4.7, il existe donc une fonction $f : S^n \to \mathbf{R}$ telle que $\pi^\star\beta = f\alpha$. En calculant $\sigma^\star(\pi^\star\beta)$, montrer que $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$ est orientable si et seulement si n est impair.

Exercice 4.9. Soit ω une 2-forme fermée sur une variété W. On suppose que, en chaque point x de W, ω_x est une forme bilinéaire alternée non-dégénérée. Montrer[(1)] que W est de dimension paire et orientée.

Exercice 4.10. On dit qu'une 2-forme différentielle ω sur une variété W est symplectique si elle est fermée et non-dégénérée (au sens de l'exercice précédent).

(1) On suppose W compacte et ω symplectique. Montrer que ω n'est pas exacte.
(2) Sous les mêmes hypothèses, avec $\dim W = 2n$, montrer que $H^{2k}(W) \neq 0$ pour $0 \leq k \leq n$.
(3) On suppose que W est une sphère. Montrer qu'elle est de dimension 2.

***Exercice 4.11* (Sous-variétés lagrangiennes)**. On dit qu'une sous-variété L d'une variété symplectique (W, ω) est *lagrangienne* si, pour tout $x \in L$, le sous-espace de T_xL de T_xW est isotrope maximal pour la forme bilinéaire alternée non dégénérée ω_x.

(1) Que peut-on dire de la dimension de L ?
(2) On suppose que $\dim W = 2$. Quelles sont les sous-variétés lagrangiennes de W ?
(3) Dans la suite, $W = \mathbf{R}^{2n}$ avec la forme $\omega = \sum dx^i \wedge dy^i$ (celle de l'exercice 2.12). Soit $j : L \to W$ l'inclusion d'une sous-variété lagrangienne.

– Montrer que la forme $j^\star(\sum x^i\, dy^i)$ est fermée. On dit que la sous-variété lagrangienne est *exacte* si cette forme est exacte.
– Maintenant, $n = 1$. Montrer qu'il n'existe pas de sous-variété lagrnagienne exacte dans $\mathbf{R}^2$.

(1) En utilisant au besoin les exercices 2.12 et 2.13.

***Exercice 4.12* (Produit de deux variétés symplectiques).** Soient (W, ω) et (W', ω') deux variétés symplectiques.

(1) Montrer que la forme notée $\omega \oplus -\omega'$ et définie par

$$(\omega \oplus -\omega')_{(x,x')}((\xi,\xi'),(\eta,\eta')) = \omega_x(\xi,\eta) - \omega'_{x'}(\xi',\eta')$$

est une forme symplectique sur $W \times W'$.

(2) On suppose maintenant que $W' = W$ et $\omega' = \omega$.

(a) Montrer que la diagonale

$$\Delta = \{(x,x) \mid x \in W\}$$

est une sous-variété lagrangienne de $(W \times W, \omega \oplus -\omega)$.

(b) Soit $\varphi : W \to W$ un difféomorphisme. Montrer que φ est symplectique (c'est-à-dire que $\varphi^\star\omega = \omega$) si et seulement si son graphe est une sous-variété lagrangienne de $W \times W$.

(c) À quoi correspondent les points d'intersection des deux sous-variétés lagrangiennes Δ et « graphe de φ » ?

***Exercice 4.13* (Cohomologie de de Rham du tore T^n).** On considère le tore $T^n = \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ et la projection naturelle (application quotient)

$$p : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n = T^n.$$

On appelle S_i le cercle image dans T^n de l'axe des x_i, c'est-à-dire de la droite engendrée par le i-ème vecteur de la base canonique.

(1) Montrer qu'il existe une unique 1-forme α_i sur T^n telle que $p^\star\alpha_i = dx_i$.

– Montrer qu'elle est fermée ($d\alpha_i = 0$).
– Calculer $\int_{S_j} \alpha_i$.
– La forme α_i est-elle exacte ?

(2) Soit α une 1-forme fermée sur T^n et soit

$$a_i = \int_{S_i} \alpha_i.$$

Montrer que

$$p^\star\alpha - \sum_{i=1}^n a_i\, dx_i = df,$$

où $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ est une fonction périodique en chacune des variables. En déduire que la classe de α dans $H^1_{DR}(T^n)$ est celle de $\sum a_i\alpha_i$. En déduire aussi que $H^1_{DR}(T^n)$ est un espace vectoriel de dimension n.

(3) Pour $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$, calculer

$$\int_{S_{i_1}\times\cdots\times S_{i_k}} \alpha_{i_1} \wedge \cdots \wedge \alpha_{i_k}.$$

Montrer que la classe de $\alpha_{i_1} \wedge \cdots \wedge \alpha_{i_k}$ n'est pas nulle dans $H^k_{DR}(T^n)$.

(4) Soit $\beta \in \Omega^k(T^n)$ une k-forme fermée sur T^n. Montrer qu'il existe des constantes $a_{i_1,\dots,i_k} \in \mathbf{R}$ et une $(k-1)$-forme γ sur T^n telles que

$$\beta = \sum a_{i_1,\dots,i_k}\, \alpha_{i_1} \wedge \cdots \wedge \alpha_{i_k} + d\gamma.$$

Quelle est la dimension de $H^k_{DR}(T^n)$?

Fin provisoire, le 30 mars 2012

Version du 30 mars 2012

MICHÈLE AUDIN, Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université de Strasbourg et CNRS
E-mail : `Michele.Audin@math.unistra.fr` • *Url :* `http://www-irma.u-strasbg.fr/~maudin`