Exercice 1

On se donne une fonction $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. Les deux méthodes suivantes servent à approcher un zéro de la fonction f.

méthode de la sécante :

$$\begin{aligned}&(1) \text{ choix d'un } x_0 \text{ et d'un } x_1 \text{ supposés proches de la solution}\\ &(2)\ x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}\end{aligned}$$

méthode de Halley :

$$\begin{aligned}&(1) \text{ choix d'un } x_0 \text{ supposé proche de la solution}\\ &(2)\ x_{n+1} = x_n - \frac{2f(x_n)f'(x_n)}{2[f'(x_n)]^2 - f(x_n)f''(x_n)}\end{aligned}$$

1) Soit $f : x \mapsto \ln|x+a|$, pour un certain $a \in \mathbb{R}$. Étudier la fonction f pour déterminer ses dérivées première et seconde ainsi que ses zéros.

2) Appliquer les méthodes de dichotomie, de la sécante, de Newton et de Halley à la recherche de zéros de la fonction f. Comparer les ordres de chacune de ces méthodes.

Exercice 2

On se donne f un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Cela signifie que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, qu'elle y est inversible, et que son inverse est aussi de classe $\mathcal{C}^1$. Ceci implique que la matrice jacobienne Jf de f est inversible.

Pour une telle fonction, la méthode de Newton est donnée par :

$$\begin{aligned}&(1) \text{ choix d'un } (x_0, y_0) \text{ supposé proche de la solution de } f(x,y) = 0;\\ &(2)\ \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - [Jf(x_n, y_n)]^{-1} f(x_n, y_n).\end{aligned}$$

Appliquer la méthode de Newton afin de :

1) déterminer les zéros de $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ x + y^3 \end{pmatrix}$ et de $g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{xy} - 1 \\ y^2 - x^2 - \ln|x| \end{pmatrix}$;

2) déterminer les points critiques de $h\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + x(y^2 - 2y + 1)$, i.e. les points où son gradient s'annule.