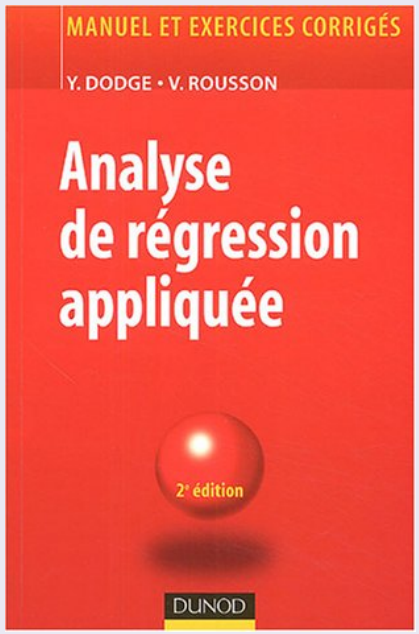
Compléments sur la régression linéaire simple
Anova et inférence sur les paramètres

Myriam Maumy-Bertrand[1]

[1]IRMA, Université de Strasbourg
France

22-11-2013

Ce chapitre s'appuie également sur ce livre :
« Analyse de régression appliquée »,
de Y. Dodge et V. Rousson,Éditions Dunod, 2004.



Sommaire

Sommaire

- Il existe plusieurs démarches pour tester la validité de la linéarité d'une régression linéaire simple.
- Nous montrons l'équivalence de ces différents tests.
- Conséquence : Cela revient à faire **le test du coefficient de corrélation linéaire**, appelé aussi le coefficient de Bravais-Pearson.

Remarque

Nous renvoyons le lecteur à un cours sur le coefficient de corrélation linéaire.

Problème

Nous souhaitons tester l'hypothèse nulle :

$$\mathcal{H}_0 : \rho(X, Y) = 0$$

contre l'hypothèse alternative :

$$\mathcal{H}_1 : \rho(X, Y) \neq 0$$

où

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var[X]\,Var[Y]}},$$

avec

$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = Cov(Y, X).$$

Solution

La méthode que nous allons employer ici est :

la méthode de l'ANOVA

utilisée par les logiciels de statistique.

Remarques

1. ANOVA pour ANalysis Of VAriance ou encore analyse de la variance.
2. Nous renvoyons le lecteur à un cours sur le test du coefficient de corrélation linéaire.

Remarque

Nous avons établi dans le cours numéro 5 :

Somme des Carrés Totale = Somme des Carrés Expliquée + Somme des Carrés Résiduelle

ce qui s'écrit mathématiquement par :

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y}_n)^2 = \sum_{i=1}^{n}(\widehat{Y}_i - \overline{Y}_n)^2 + \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \widehat{Y}_i)^2.$$

À chaque somme de carrés est associé son nombre de degrés de liberté (*ddl*). Ces *ddl* sont présents dans le tableau de l'ANOVA.

Tableau de l'ANOVA

Source de variation	sc	*ddl*	cm
expliquée sc_{reg}	$\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \overline{y}_n)^2$	1	$sc_{reg}/1$
résiduelle sc_{res}	$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2$	$n-2$	$sc_{res}/(n-2)$
totale sc_{tot}	$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y}_n)^2$	$n-1$	

Remarques

1. Le **coefficient de détermination**

$$R^2 = \frac{SC_{reg}}{SC_{tot}}$$

mesure le pourcentage d'explication du modèle par la régression linéaire.

2. Le rapport

$$cm_{res} = \frac{SC_{res}}{n-2}$$

est l'**estimation de la variance résiduelle**.

À partir du tableau de l'ANOVA, nous effectuons **le test de la linéarité de la régression** en calculant **la statistique de Fisher** F qui suit une loi de Fisher $F(1, n-2)$.

Cette variable aléatoire F se réalise en :

$$F_{obs} = \frac{SC_{reg}/1}{SC_{res}/(n-2)} = (n-2)\frac{SC_{reg}}{SC_{res}}.$$

Décision

Si

$$F_{obs} \geqslant F_{1-\alpha}(1, n-2),$$

alors nous décidons de rejeter l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ et par conséquent d'accepter l'hypothèse alternative $\mathcal{H}_1$ au risque α, c'est-à-dire qu'il existe une liaison linéaire significative entre X et Y.

Si

$$F_{obs} < F_{1-\alpha}(1, n-2),$$

alors nous décidons de ne pas rejeter l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ et par conséquent de l'accepter, c'est-à-dire nous concluons qu'il n'existe pas de liaison linéaire entre X et Y.

Remarque

En effet, si l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ est vérifiée alors cela implique que $\rho(X, Y) = 0$ c'est-à-dire $Cov(X, Y) = 0$. Donc il n'existe aucune liaison linéaire entre X et Y.

Sommaire

Sommaire

Modélisation

Le modèle de régression linéaire simple est

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$$

où les ε_i sont des variables aléatoires inobservables, appelées **les erreurs**.

Conséquence : Les variables Y_i sont aléatoires.

Première hypothèse : $\mathbb{E}[\varepsilon_i] = 0$.
Conséquence : $\mathbb{E}[Y_i] = \beta_0 + \beta_1 x_i$.

D'autre part, nous avons :

$$Var[Y_i] = Var[\varepsilon_i].$$

Les quatre hypothèses indispensables pour construire la théorie :

1. Les variables aléatoires ε_i sont indépendantes.
2. Les variables aléatoires ε_i sont normalement distribuées.
3. L'espérance des variables aléatoires ε_i est égale à 0.
4. La variance des variables aléatoires ε_i est égale à σ^2 (inconnue) ne dépendant pas de x_i.
   Nous avons donc pour tout $i = 1, \ldots, n$:

$$Var[\varepsilon_i] = Var[Y_i] = \sigma^2.$$

Cette condition s'appelle d'**homoscédasticité**.

Résumons-nous

Ces quatre hypothèses sont équivalentes à :

les variables aléatoires ε_i sont indépendantes et identiquement distribuées selon une loi normale de moyenne nulle et de variance σ^2.

Nous notons :

$$\varepsilon_i \quad \text{i.i.d.} \sim \mathcal{N}(0; \sigma^2).$$

Conséquences importantes :

1. La normalité des variables aléatoires ε_i implique la normalité des variables aléatoires Y_i.
2. L'indépendance des variables aléatoires ε_i implique l'indépendance des variables aléatoires Y_i.
   En effet, nous montrons en calculant que :

$$\begin{aligned} Cov[Y_i, Y_j] &= Cov[\beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, \beta_0 + \beta_1 x_j + \varepsilon_j] \\ &= Cov[\varepsilon_i, \varepsilon_j] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Sommaire

Résultat

Nous avons :

$$\widehat{\beta}_1 = \frac{\sum(x_i - \overline{x}_n)Y_i}{\sum(x_i - \overline{x}_n)^2}, \text{ où } \overline{x}_n = \frac{\sum x_i}{n}.$$

Conséquences

Il en résulte que :

- $\widehat{\beta}_1$ **est une variable aléatoire** car $\widehat{\beta}_1$ dépend des variables Y_i qui sont des variables aléatoires.
- $\widehat{\beta}_1$ **est une fonction linéaire des variables aléatoires** Y_i.
- Comme les variables aléatoires Y_i par hypothèse sont normalement distribuées, alors $\widehat{\beta}_1$ **est normalement distribuée**.

Il reste donc à calculer ces deux valeurs pour caractériser la loi de l'estimateur $\widehat{\beta}_1$:

1. $\mathbb{E}\left[\widehat{\beta}_1\right]$
2. $Var\left[\widehat{\beta}_1\right]$.

Calcul de l'espérance de $\widehat{\beta}_1$

D'une part, nous calculons l'espérance de $\widehat{\beta}_1$ ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\widehat{\beta}_1\right] &= \mathbb{E}\left[\frac{\sum(x_i-\overline{x}_n)Y_i}{\sum(x_i-\overline{x}_n)^2}\right] \\
&= \frac{\sum(x_i-\overline{x}_n)\mathbb{E}[Y_i]}{\sum(x_i-\overline{x}_n)^2} \\
&= \frac{\sum(x_i-\overline{x}_n)(\beta_0+\beta_1 x_i)}{\sum(x_i-\overline{x}_n)^2} \\
&= \frac{\beta_0\sum(x_i-\overline{x}_n)+\beta_1\sum(x_i-\overline{x}_n)x_i}{\sum(x_i-\overline{x}_n)^2} \\
&= \frac{0+\beta_1\sum(x_i-\overline{x}_n)x_i}{\sum(x_i-\overline{x}_n)^2}.
\end{aligned}$$

Suite et fin du calcul de l'espérance de $\widehat{\beta}_1$

En effet, nous montrons que : $\sum(x_i - \overline{x}_n) = 0$. De plus, comme nous avons :

$$\sum(x_i - \overline{x}_n)^2 = \sum(x_i - \overline{x}_n)x_i$$

alors nous obtenons :

$$\mathbb{E}\left[\widehat{\beta}_1\right] = \beta_1.$$

Remarque importante

Donc la variable aléatoire $\widehat{\beta}_1$ est **un estimateur sans biais** du coefficient β_1.

Calcul de la variance de $\widehat{\beta}_1$

D'autre part, nous calculons la variance de $\widehat{\beta}_1$ ainsi :

$$\begin{aligned}
Var\left[\widehat{\beta}_1\right] &= Var\left[\frac{\sum(x_i-\overline{x}_n)Y_i}{\sum(x_i-\overline{x}_n)^2}\right] \\
&= \frac{\sum(x_i-\overline{x}_n)^2 Var[Y_i]}{\left(\sum(x_i-\overline{x}_n)^2\right)^2} \\
&= \frac{\sum(x_i-\overline{x}_n)^2\sigma^2}{\left(\sum(x_i-\overline{x}_n)^2\right)^2} \\
Var\left[\widehat{\beta}_1\right] &= \frac{\sigma^2}{\sum(x_i-\overline{x}_n)^2}.
\end{aligned}$$

Sommaire

Nous avons :

$$\widehat{\beta}_0 = \overline{Y}_n - \widehat{\beta}_1 \overline{x}_n$$

où

$$\overline{x}_n = \frac{\sum x_i}{n} \quad \text{et} \quad \overline{Y}_n = \frac{\sum Y_i}{n}.$$

- $\widehat{\beta}_0$ **est une variable aléatoire** car $\widehat{\beta}_0$ dépend de $\widehat{\beta}_1$ qui est une variable aléatoire.
- $\widehat{\beta}_0$ **est une fonction linéaire de** $\widehat{\beta}_1$.
- Comme $\widehat{\beta}_1$ est normalement distribuée, alors $\widehat{\beta}_0$ **est normalement distribuée**.

Il reste donc à calculer ces deux valeurs pour caractériser l'estimateur $\widehat{\beta}_0$:

1. $\mathbb{E}\left[\widehat{\beta}_0\right]$
2. $Var\left[\widehat{\beta}_0\right]$.

Calcul de l'espérance de $\widehat{\beta}_0$

D'une part, nous calculons l'espérance de $\widehat{\beta}_0$ ainsi :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\widehat{\beta}_0\right] &= \mathbb{E}\left[\overline{Y}_n - \widehat{\beta}_1\overline{x}_n\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\overline{Y}_n\right] - \overline{x}_n\,\mathbb{E}\left[\widehat{\beta}_1\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\overline{Y}_n\right] - \overline{x}_n\beta_1,\end{aligned}$$

car nous venons de démontrer que $\widehat{\beta}_1$ est un estimateur sans biais du coefficient β_1.
Il reste à calculer la valeur :

$$\mathbb{E}\left[\overline{Y}_n\right].$$

Suite du calcul de l'espérance de $\widehat{\beta}_0$

Or nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\overline{Y}_n\right] &= \mathbb{E}\left[\frac{\sum Y_i}{n}\right] \\
&= \frac{\sum \mathbb{E}[Y_i]}{n} \\
&= \frac{\sum(\beta_0 + \beta_1 x_i)}{n} \\
&= \frac{n\beta_0 + \beta_1 \sum x_i}{n} \\
&= \beta_0 + \overline{x}_n \beta_1 .
\end{aligned}$$

Fin du calcul de l'espérance de $\widehat{\beta}_0$

Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\widehat{\beta}_0\right] &= \mathbb{E}\left[\overline{Y}_n\right] - \overline{x}_n\beta_1 \\ &= (\beta_0 + \overline{x}_n\beta_1) - \overline{x}_n\beta_1 \\ &= \beta_0.\end{aligned}$$

Remarque

Donc la variable aléatoire $\widehat{\beta}_0$ est **un estimateur sans biais** du coefficient β_0.

Calcul de la variance de $\widehat{\beta}_0$

D'autre part, nous calculons la variance de $\widehat{\beta}_0$ ainsi :

$$\begin{aligned} Var\left[\widehat{\beta}_0\right] &= Var\left[\overline{Y}_n - \widehat{\beta}_1 \overline{x}_n\right] \\ &= Var\left[\overline{Y}_n\right] + \overline{x}_n^2\, Var\left[\widehat{\beta}_1\right] - 2\,\overline{x}_n\, Cov\left[\overline{Y}_n, \widehat{\beta}_1\right]. \end{aligned}$$

Il reste donc à calculer la valeur :

$$Cov\left[\overline{Y}_n, \widehat{\beta}_1\right].$$

Suite du calcul de la variance de $\widehat{\beta}_0$

Par les calculs, nous montrons que :

$$\begin{aligned} Cov\left[\overline{Y}_n, \widehat{\beta}_1\right] &= Cov\left[\frac{\sum Y_i}{n}, \frac{\sum (x_j - \overline{x}_n) Y_j}{\sum (x_i - \overline{x}_n)^2}\right] \\ &= \frac{\sum_i \sum_j (x_j - \overline{x}_n) Cov[Y_i, Y_j]}{n \sum (x_i - \overline{x}_n)^2} \\ &= \frac{\sum_i (x_i - \overline{x}_n) Var[Y_i]}{n \sum (x_i - \overline{x}_n)^2} \\ &= \frac{\sigma^2 \sum_i (x_i - \overline{x}_n)}{n \sum (x_i - \overline{x}_n)^2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Suite du calcul de la variance de $\widehat{\beta}_0$

Comme nous avons que

$$Var\left[\overline{Y}_n\right] = \frac{\sigma^2}{n},$$

nous obtenons, alors :

$$\begin{aligned} Var\left[\widehat{\beta}_0\right] &= Var\left[\overline{Y}_n\right] + \overline{x}_n^2 Var\left[\widehat{\beta}_1\right] \\ &= \frac{\sigma^2}{n} + \frac{\overline{x}_n^2\sigma^2}{\sum(x_i - \overline{x}_n)^2} \\ &= \frac{\sigma^2\left(\sum(x_i - \overline{x}_n)^2 + n\overline{x}_n^2\right)}{n\sum(x_i - \overline{x}_n)^2}. \end{aligned}$$

Fin du calcul de la variance de $\widehat{\beta}_0$

En rappelant que :

$$\sum (x_i - \overline{x}_n)^2 = \sum x_i^2 - n\overline{x}_n^2,$$

nous avons finalement :

$$Var\left[\widehat{\beta}_0\right] = \frac{\sigma^2 \sum x_i^2}{n \sum (x_i - \overline{x}_n)^2}.$$

Sommaire

Sommaire

Rappel

Nous rappelons que :

$$\widehat{\beta}_1 \sim \mathcal{N}(\beta_1; \sigma^2(\widehat{\beta}_1))$$

où

$$\sigma^2(\widehat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{\sum(x_i - \overline{x}_n)^2}.$$

Nous obtenons alors :

$$\frac{\widehat{\beta}_1 - \beta_1}{\sigma(\widehat{\beta}_1)} \sim \mathcal{N}(0; 1).$$

Problème

Nous ne connaissons pas le paramètre σ^2, c'est-à-dire la variance des variables aléatoires ε_i.

Que pouvons-nous faire alors pour résoudre ce problème ?

Proposition

Estimer ce paramètre ! Oui, mais comment ?

Solution

- Nous estimons d'abord σ^2 par CM_{res} l'estimateur sans biais de σ^2 :

$$CM_{res} = \frac{||\varepsilon||^2}{n-2} = \frac{\sum(Y_i - \widehat{Y}_i)^2}{n-2}.$$

- Nous estimons ensuite $\sigma^2(\widehat{\beta}_1)$ par :

$$s^2(\widehat{\beta}_1) = \frac{CM_{res}}{\sum(x_i - \overline{x}_n)^2}.$$

Fin de la solution

- Nous montrons alors que :

$$\frac{\widehat{\beta}_1 - \beta_1}{s(\widehat{\beta}_1)} \sim T_{n-2},$$

où la variable aléatoire T_{n-2} désigne une variable de Student avec $(n-2)$ degrés de liberté.

Mise en place du test sur la pente

Nous souhaitons tester l'hypothèse nulle :

$$\mathcal{H}_0 : \beta_1 = 0$$

contre l'hypothèse alternative :

$$\mathcal{H}_1 : \beta_1 \neq 0.$$

Nous utilisons alors la statistique de Student suivante :

$$t_{obs} = \frac{\widehat{\beta}_1}{s(\widehat{\beta}_1)}$$

pour décider de l'acceptation ou du rejet de $\mathcal{H}_0$.

Décision

Nous décidons de rejeter l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ et donc d'accepter l'hypothèse alternative $\mathcal{H}_1$ au seuil de signification α si

$$|t_{obs}| \geqslant t_{n-2;1-\alpha/2}$$

où la valeur critique $t_{n-2;1-\alpha/2}$ est le $(1-\alpha/2)$-quantile d'une loi de Student avec $(n-2)$ *ddl*.

Dans ce cas, nous disons que la relation linéaire entre X et Y est significative au seuil α.

Décision - Suite et fin

Nous décidons d'accepter l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ au seuil de signification α si

$$|t_{obs}| < t_{n-2;1-\alpha/2}$$

où la valeur $t_{n-2;1-\alpha/2}$ est le $(1-\alpha/2)$-quantile d'une loi de Student avec $(n-2)$ *ddl*.

Dans ce cas, Y ne dépend pas linéairement de X. Le modèle devient alors :

$$Y_i = \beta_0 + \varepsilon_i$$

Le modèle proposé $\widehat{Y}_i = \widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 x_i$ est inadéquat. Nous testons alors un nouveau modèle.

Sommaire

IC pour β_1

Un intervalle de confiance au niveau $(1-\alpha)$ pour le coefficient inconnu β_1 est défini par

$$\left]\widehat{\beta}_1 - t_{n-2;1-\alpha/2} \times s(\widehat{\beta}_1)\,;\, \widehat{\beta}_1 + t_{n-2;1-\alpha/2} \times s(\widehat{\beta}_1)\right[.$$

Cet intervalle de confiance est construit pour contenir, dans $(1-\alpha)$% des cas, la vraie valeur inconnue du coefficient β_1.

Sommaire

Rappel

Nous rappelons que :

$$\widehat{\beta}_0 \sim \mathcal{N}(\beta_0; \sigma^2(\widehat{\beta}_0))$$

où

$$\sigma^2(\widehat{\beta}_0) = \frac{\sigma^2 \sum x_i^2}{n \sum (x_i - \overline{x}_n)^2}.$$

Nous obtenons alors :

$$\frac{\widehat{\beta}_0 - \beta_0}{\sigma(\widehat{\beta}_0)} \sim \mathcal{N}(0; 1).$$

Problème

Nous ne connaissons pas le paramètre σ^2, c'est-à-dire la variance des variables aléatoires ε_i.

Que pouvons-nous faire alors pour résoudre ce problème ?

Solution

Estimer ce paramètre !

Solution

- Nous estimons d'abord σ^2 par CM_{res} l'estimateur sans biais de σ^2 :

$$CM_{res} = \frac{||\varepsilon||^2}{n-2} = \frac{\sum(Y_i - \widehat{Y}_i)^2}{n-2}.$$

- Nous estimons ensuite $\sigma^2(\widehat{\beta}_0)$ par :

$$s^2(\widehat{\beta}_0) = \frac{CM_{res}\sum x_i^2}{n\sum(x_i - \overline{x}_n)^2}.$$

Suite de la solution

- Nous montrons alors que :

$$\frac{\widehat{\beta}_0 - \beta_0}{s(\widehat{\beta}_0)} \sim T_{n-2},$$

où T_{n-2} désigne une v.a. de Student avec $(n-2)$ *ddl*.

Mise en place du test sur l'ordonnée à l'origine

Nous souhaitons tester l'hypothèse nulle

$$\mathcal{H}_0 : \beta_0 = 0$$

contre l'hypothèse alternative

$$\mathcal{H}_1 : \beta_0 \neq 0.$$

Nous utilisons la statistique de Student suivante :

$$t_{obs} = \frac{\widehat{\beta}_0}{s(\widehat{\beta}_0)}$$

pour décider de l'acceptation ou du rejet de $\mathcal{H}_0$.

Décision

Nous décidons de refuser l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ et d'accepter l'hypothèse alternative $\mathcal{H}_1$ au seuil de signification α si :

$$|t_{obs}| \geqslant t_{n-2;1-\alpha/2}$$

où la valeur critique $t_{n-2;1-\alpha/2}$ est le $(1-\alpha/2)$-quantile d'une loi de Student avec $(n-2)$ ddl.

Dans ce cas, le coefficient β_0 du modèle est dit significatif au seuil α.

Décision - Suite et fin

Nous décidons de ne pas refuser et donc d'accepter l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ au seuil de signification α si

$$|t_{obs}| < t_{n-2;1-\alpha/2}$$

où la valeur critique $t_{n-2;1-\alpha/2}$ est le $(1-\alpha/2)$-quantile d'une loi de Student avec $(n-2)$ *ddl*.

Dans ce cas, l'ordonnée de la droite de régression passe par l'origine :

$$Y_i = \beta_1 x_i + \varepsilon_i.$$

Sommaire

IC pour β_0

Un intervalle de confiance au niveau $(1-\alpha)$ pour le coefficient inconnu β_0 est défini par :

$$\left]\widehat{\beta}_0 - t_{n-2;1-\alpha/2} \times s(\widehat{\beta}_0)\,;\, \widehat{\beta}_0 + t_{n-2;1-\alpha/2} \times s(\widehat{\beta}_0)\right[.$$

Cet intervalle de confiance est construit pour contenir, dans $(1-\alpha)$% des cas, la vraie valeur inconnue du coefficient β_0.

Sommaire

Construction de l'intervalle de confiance pour une valeur moyenne

Nous allons voir comment trouver un intervalle de confiance pour la valeur moyenne x :

$$\mu_Y(x) = \beta_0 + \beta_1 x,$$

c'est-à-dire pour l'ordonnée du point d'abscisse x se trouvant sur la droite des moindres carrés ordinaire.

L'estimateur de $\beta_0 + \beta_1 x$ est donné par la droite des moindres carrés ordinaire :

$$\widehat{Y}(x) = \widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 x,$$

où

$$\widehat{Y}(x) \sim \mathcal{N}\left(\beta_0 + \beta_1 x; \sigma^2\left(\widehat{Y}(x)\right)\right)$$

et

$$\sigma^2\left(\widehat{Y}(x)\right) = \sigma^2\left(\frac{1}{n} + \frac{(x-\bar{x})^2}{\sum(x_i - \bar{x})^2}\right).$$

Ce qui peut s'écrire aussi :

$$\frac{\widehat{Y}(x) - \mu_Y(x)}{\sigma\left(\widehat{Y}(x)\right)} \sim \mathcal{N}(0;1).$$

Problème

La variance σ^2 est inconnue.

Solution

- Nous estimons d'abord σ^2 par l'estimateur CM_{res}.
- Nous estimons ensuite $\sigma^2\left(\widehat{Y}(x)\right)$ par :

$$s^2\left(\widehat{Y}(x)\right) = cm_{res}\left(\frac{1}{n} + \frac{(x-\overline{x}_n)^2}{\sum(x_i-\overline{x}_n)^2}\right).$$

- Ainsi nous obtenons :

$$\frac{\widehat{Y}(x) - \mu_Y(x)}{s\left(\widehat{Y}(x)\right)} \sim T_{n-2}.$$

Intervalle de confiance pour une valeur moyenne

Il est possible de construire une intervalle de confiance de la valeur moyenne de Y sachant que $X = x_0$. L'estimation ponctuelle pour cette valeur de x_0 est alors égale à $\widehat{y}(x_0) = \widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 x_0$.
L'intervalle de confiance de la valeur moyenne prise par la variable Y lorsque $X = x_0$ est égal à :

$$\left]\widehat{y}(x_0) - t_{n-2;1-\alpha/2} \times s\left(\widehat{y}(x_0)\right) ; \widehat{y}(x_0) + t_{n-2;1-\alpha/2} \times s\left(\widehat{y}(x_0)\right)\right[.$$

Remarque

Cet intervalle de confiance est construit pour contenir, dans $(1-\alpha)$% des cas, la vraie valeur moyenne inconnue $\mu_Y(x_0)$.

L'ajustement affine peut servir à prévoir une valeur attendue pour la variable Y quand nous fixons $X = x_0$. L'estimation ponctuelle de cette valeur est alors égale à $\widehat{y}(x_0) = \widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 x_0$.

Intervalle de prévision d'une valeur individuelle

Un intervalle de prévision au niveau $(1 - \alpha)$ pour la variable Y sachant que $X = x_0$ est égal à :

$$\left]\widehat{y}(x_0) - t_{n-2;1-\alpha/2}\sqrt{cm_{res} + s^2\left(\widehat{y}(x_0)\right)};\right.$$
$$\left.\widehat{y}(x_0) + t_{n-2;1-\alpha/2}\sqrt{cm_{res} + s^2\left(\widehat{y}(x_0)\right)}\right[.$$

Remarques

1. Cet intervalle de prévision est construit pour contenir, dans $(1-\alpha)\%$ des cas, la vraie valeur individuelle inconnue $Y(x_0)$.
2. L'utilisation d'une valeur estimée $\widehat{y}(x_0)$ n'est justifiée que si R^2 est proche de 1.
3. Notez que l'intervalle de confiance va produire une étendue de valeurs plus petite, parce qu'il s'agit d'une estimation d'un intervalle pour une moyenne plutôt que de l'estimation d'un intervalle pour une seule observation.

Sommaire

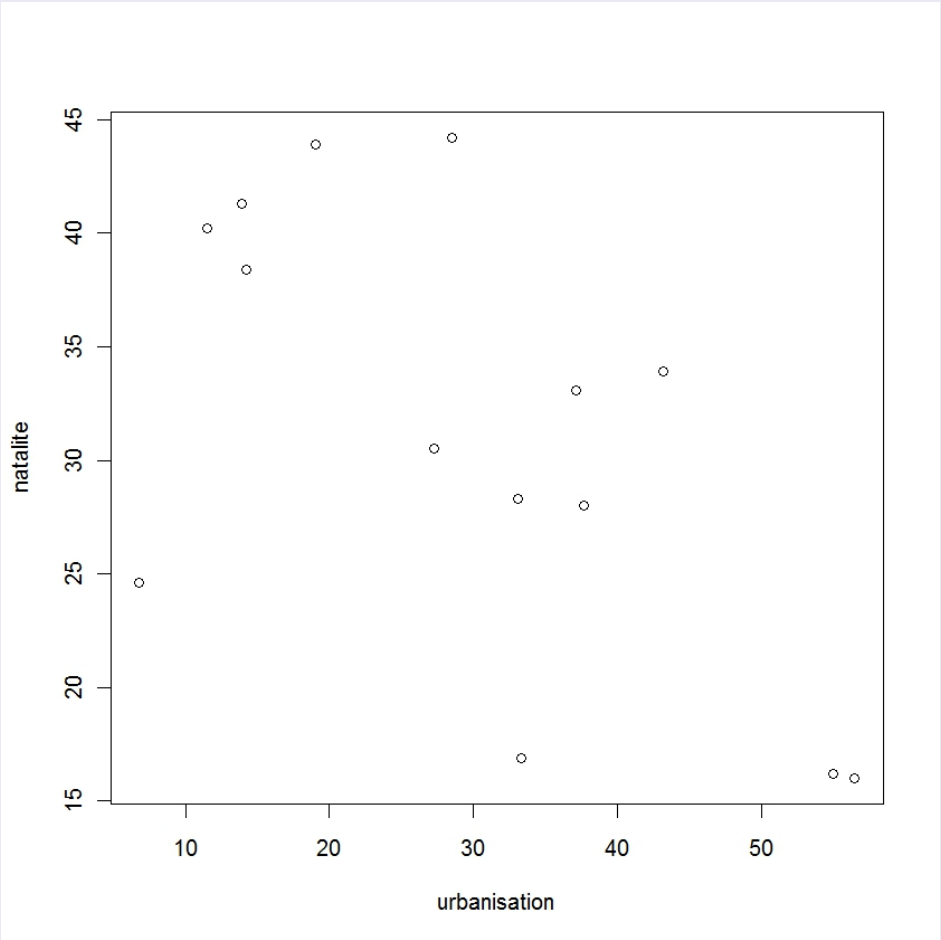
Exemple : le tableau de données. D'après Birkes et Dodge (1993)

Pays	Taux d'urbanisation x_i	Taux de natalité y_i
Canada	55,0	16,2
Costa Rica	27,3	30,5
Cuba	33,3	16,9
E.U.	56,5	16,0
El Salvador	11,5	40,2
Guatemala	14,2	38,4
Haïti	13,9	41,3

Suite des données

Pays	Taux d'urbanisation x_i	Taux de natalité y_i
Honduras	19,0	43,9
Jamaïque	33,1	28,3
Mexique	43,2	33,9
Nicaragua	28,5	44,2
Trinité-et-Tobago	6,8	24,6
Panama	37,7	28,0
Rép. Dom.	37,1	33,1

Nuage de points



Analyse : calcul du coefficient de corrélation linéaire

Nous souhaitons modéliser la relation entre le taux de natalité et le taux d'urbanisation.
La première question à se poser est : « existe-t-il une relation linéaire entre les deux variables ? »
Pour y répondre, calculons le coefficient de corrélation linéaire de Bravais-Pearson à l'aide de `R`.

```
> cor(natalite,urbanisation)
  [1] -0.6211854
```

Comment interprétons-nous cette valeur ? Il semblerait qu'il puisse exister une relation linéaire entre les deux variables. Il reste donc à réaliser le test du coefficient de corrélation linéaire.

Suite de l'analyse : test de corrélation linéaire

Mais pour cela, il faut savoir si le couple (X, Y) suit une loi normale bivariée. Utilisons R.

```
> exemple<-data.frame(urbanisation,natalite)
> transpose<-t(exemple)
> mshapiro.test(transpose)
Shapiro-Wilk normality test
data: Z
W = 0.927, p-value = 0.2771
```

La *p*-valeur (*p*-value = 0,2771) étant supérieure à $\alpha = 5\%$, nous décidons de ne pas rejeter et donc d'accepter l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ au seuil $\alpha = 5\%$.

Suite de l'analyse : test de corrélation linéaire

Maintenant que l'hypothèse fondamentale est vérifiée, nous pouvons réaliser le test de corrélation linéaire.

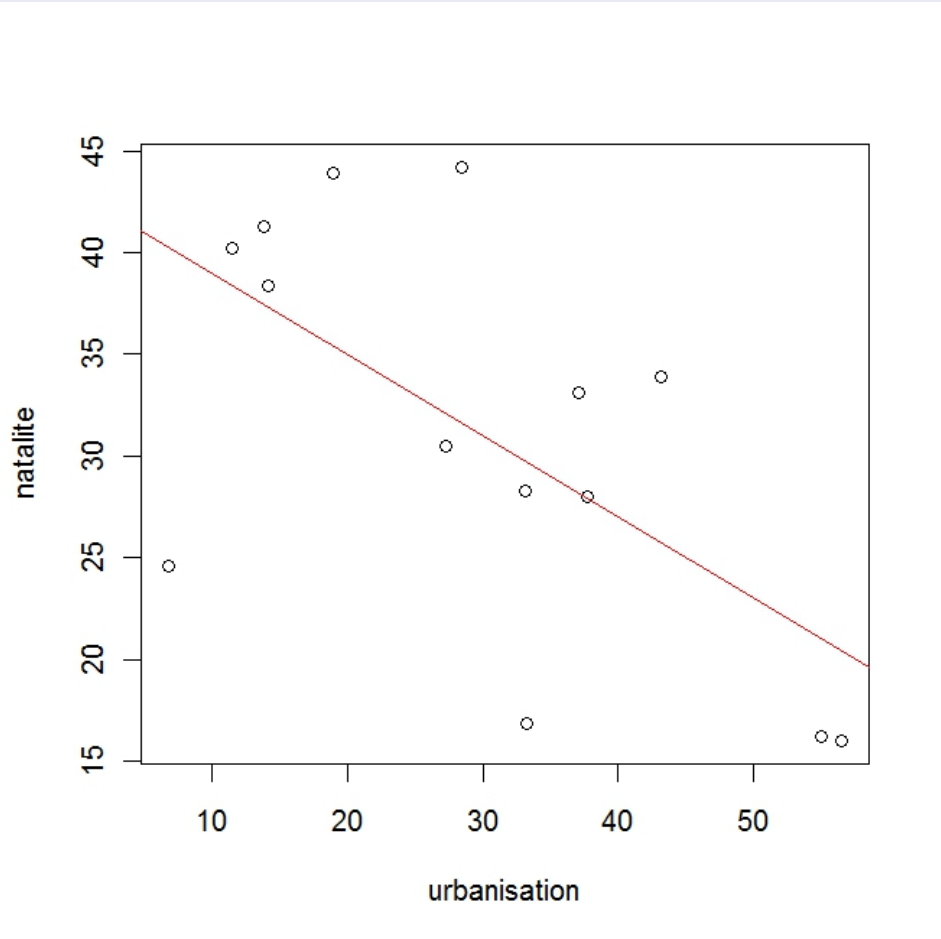
```
> cor.test(urbanisation,natalite)
Pearson's product-moment correlation
data: urbanisation and natalite
t = -2.7459, df = 12, p-value = 0.01774
alternative hypothesis: true correlation is
not equal to 0
95 percent confidence interval:
-0.8662568 -0.1351496
sample estimates:
cor
-0.6211854
```

Suite et fin de l'analyse : test de corrélation linéaire

La *p*-valeur (*p*-value = 0,01774) étant inférieure à $\alpha = 5\%$, nous décidons de rejeter l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ et donc d'accepter l'hypothèse alternative $\mathcal{H}_1$ au seuil de signification $\alpha = 5\%$. Il existe donc une relation linéaire entre les deux variables. Maintenant, déterminons les coefficients de la droite les moindres carrés avec `R` et traçons-la.

```
> modele<-lm(natalite urbanisation)
> coef(modele)
(Intercept) urbanisation
42.9905457 -0.3988675
> abline(coef(modele),col="red")
```

Nuage des points et droite des MCO



Calcul des résidus

Pour réaliser les tests sur la pente et sur l'ordonnée, il faut vérifier la normalité des résidus. Nous allons les calculer avec R.

```
> residus<-residuals(modele)
```

et les placer dans le tableau des données.

Tableau de données avec résidus

Pays	Taux d'urbanisation x_i	Taux de natalité y_i	Valeurs estimées $\hat{y}_i$	Résidus e_i
Canada	55,0	16,2	21,05	−4,85
Costa Rica	27,3	30,5	32,10	−1,60
Cuba	33,3	16,9	29,71	−12,81
E.U.	56,5	16,0	20,45	−4,45
El Salvador	11,5	40,2	38,40	1,80
Guatemala	14,2	38,4	37,33	1,07
Haïti	13,9	41,3	37,45	3,85

Suite des données avec résidus

Pays	Taux d'urbanisation x_i	Taux de natalité y_i	Valeurs estimées $\hat{y}_i$	Résidus e_i
Honduras	19,0	43,9	35,41	8,49
Jamaïque	33,1	28,3	29,79	−1,49
Mexique	43,2	33,9	25,76	8,14
Nicaragua	28,5	44,2	31,62	12,58
Trinité-et-Tobago	6,8	24,6	40,28	−15,68
Panama	37,7	28,0	27,95	0,05
Rép. Dom.	37,1	33,1	28,19	4,91

Normalité des résidus

Réalisons donc le test de normalité, le test de Shapiro-Wilk avec `R`.

```
> shapiro.test(residus)
Shapiro-Wilk normality test
data: residus W = 0.9635, p-value = 0.7797
```

La *p*-valeur (*p*-value = 0,7797) étant supérieure à $\alpha = 5\%$, nous décidons de ne pas rejeter et donc d'accepter l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$ au seuil de signification $\alpha = 5\%$. Nous commettons une erreur de deuxième espèce β qu'il faudrait évaluer.

Test sur la pente β_1.

Nous testons

$$\mathcal{H}_0 : \beta_1 = 0$$

contre

$$\mathcal{H}_1 : \beta_1 \neq 0.$$

Nous calculons

$$t_{obs} = \frac{\widehat{\beta}_1}{s(\widehat{\beta}_1)} = \frac{-0,3989}{0,1453} = -2,746.$$

Or la valeur critique est égale à pour un seuil $\alpha = 0,05$:

$$t_{(12;0,975)} \simeq 2,179.$$

Décision

Comme

$$|t_{obs}| > t_{n-2;1-\alpha/2},$$

nous décidons de refuser l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$. Par conséquent, nous décidons d'accepter l'hypothèse alternative $\mathcal{H}_1$, au seuil de signification $\alpha = 5\%$. Nous commettons une erreur de première espèce qui vaut $\alpha = 5\%$.
En conclusion, la relation linéaire entre le taux de natalité et le taux d'urbanisation est significative au seuil $\alpha = 5\%$.

Remarque

En se servant de la sortie du logiciel R et en raisonnant en terme de *p*-valeur, nous retrouvons cette conclusion.

```
Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 42.9905 4.8454 8.872 1.28e-06
            xi -0.3989 0.1453 -2.746 0.0177
--
Residual standard error: 8.154 on 12 degrees
of freedom
Multiple R-squared: 0.3859, Adjusted
R-squared: 0.3347
F-statistic: 7.54 on 1 and 12 DF, p-value:
0.01774
```

IC pour β_1

Un intervalle de confiance pour le coefficient inconnu β_1 au niveau $(1-\alpha) = 0,95$ s'obtient en calculant :

$$\widehat{\beta}_1 \pm t_{n-2;1-\alpha/2} \times s(\widehat{\beta}_1) = -0,3989 \pm 2,179 \times 0,1453.$$

Nous avons donc après simplification :

$$]-0,716; -0,082[$$

qui contient la vraie valeur du coefficient inconnu β_1 avec une probabilité de $0,95$.

Remarque

Nous remarquons que 0 n'est pas compris dans l'intervalle.

Remarque

En se servant de la sortie du logiciel R et en raisonnant en terme de *p*-valeur, nous retrouvons cette conclusion.

```
> confint(modele1)
                  2.5 % 97.5%
(Intercept) 32.4332596 53.54783182
         xi -0.7153622 -0.08237281
```

Test sur l'ordonnée β_0

$$\mathcal{H}_0 : \beta_0 = 0$$

contre

$$\mathcal{H}_1 : \beta_0 \neq 0.$$

Nous calculons

$$t_{obs} = \frac{\widehat{\beta}_0}{s(\widehat{\beta}_0)} = \frac{42,9905}{4,8454} = 8,872.$$

Or la valeur critique est égale à pour un seuil $\alpha = 0,05$:

$$t_{0,975;12} = 2,179.$$

Décision

Comme

$$|t_{obs}| > t_{n-2;1-\alpha/2},$$

nous décidons de refuser l'hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$. Par conséquent nous décidons d'accepter l'hypothèse alternative $\mathcal{H}_1$, au seuil de signification $\alpha = 5\%$. Nous commettons une erreur de première espèce qui vaut $\alpha = 5\%$.

En conclusion, la droite des moindres carrés ordinaire ne passe pas par l'origine.

Remarque

En se servant de la sortie du logiciel R et en raisonnant en terme de *p*-valeur, nous retrouvons cette conclusion.

```
Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 42.9905 4.8454 8.872 1.28e-06
            xi -0.3989 0.1453 -2.746 0.0177
--
Residual standard error: 8.154 on 12 degrees
of freedom
Multiple R-squared: 0.3859, Adjusted
R-squared: 0.3347
F-statistic: 7.54 on 1 and 12 DF, p-value:
0.01774
```

IC pour β_0

Un intervalle de confiance pour le coefficient inconnu β_0 au niveau $(1-\alpha) = 0,95$ s'obtient en calculant :

$$\widehat{\beta}_0 \pm t_{n-2;1-\alpha/2,} \times s(\widehat{\beta}_0) = 42,9905 \pm 2,179 \times 4,8454.$$

Nous avons donc après simplification :

$$]32,433; 53,548[$$

qui contient la vraie valeur du coefficient inconnu β_0 avec une probabilité de $0,95$.

Remarque

Nous remarquons que 0 n'est pas compris dans l'intervalle.

Remarque

En se servant de la sortie du logiciel R et en raisonnant en terme de *p*-valeur, nous retrouvons cette conclusion.

```
> confint(modele1)
                  2.5 %    97.5%
(Intercept) 32.4332596 53.54783182
xi          -0.7153622 -0.08237281
```