

**Master d'Actuariat 2<sup>ème</sup> année**  
**Master de Statistique et Applications 2<sup>ème</sup> année**

UE : Applications de la Statistique  
Session de janvier 2008 - Durée 4 heures  
Enseignants Responsables : A. Guillou, M. Maumy et Ph. Nobelis

---

Aucun document n'est autorisé. Chacune des quatre parties sera rédigée sur une copie séparée. Chaque réponse devra être justifiée précisément. En annexe sont données les tables de la loi normale centrée réduite et le journal et la sortie d'un traitement avec le logiciel SAS.

---

**Partie I : Statistique des extrêmes.**

**Partie II : Enquêtes et Sondages.**

Ces deux exercices sont issus du fascicule d'exercices de Anne Ruiz-Gazen.

**Exercice 1.**

On considère une population  $U$  de 5 individus, pour lesquels on connaît les valeurs de la variable d'intérêt  $Y$  :

$$Y_1 = 3, \quad Y_2 = 1, \quad Y_3 = 0, \quad Y_4 = 1, \quad Y_5 = 5.$$

On choisit un plan simple à PESR avec une taille d'échantillon  $n = 3$ .

- 1.) Donner les valeurs de la moyenne, de la médiane, de la variance et de l'écart-type de la variable  $Y$  dans la population  $U$ .
- 2.) Lister tous les échantillons possibles de taille  $n = 3$ . Quelle est la probabilité de sélection de chaque échantillon ?
- 3.) Pour un échantillon donné, on estime la moyenne, respectivement la médiane de la population  $U$ . Calculer les valeurs de ces deux estimateurs pour chaque échantillon listé à la question précédente. L'estimateur de la moyenne est-il sans biais ? Justifier votre réponse. L'estimateur de la médiane est-il sans biais ? Justifier votre réponse.
- 4.) Pour chaque échantillon, proposer un estimateur de la variance de la variable  $Y$  et calculer la valeur de cet estimateur. Montrer que l'estimateur que vous avez choisi est sans biais.

5.) Pour chaque échantillon, proposer un estimateur de l'écart-type de la variable  $Y$  et calculer la valeur de cet estimateur. L'estimateur que vous avez choisi est-il sans biais? Dans le cas où vous auriez répondu par le non à la dernière question, sauriez-vous proposer un estimateur sans biais de l'écart-type de la variable  $Y$ ?

**Exercice 2.**

Un quartier dans une certaine ville est formé de 3000 ménages rassemblant 10 000 personnes. Pour étudier l'intérêt d'installer un dispensaire médical dans le quartier, on veut estimer le nombre total de consultations qu'ont eu les personnes de ce quartier l'an dernier. On veut un résultat à 10% maximum, de la vraie valeur, avec un niveau de confiance de 95%. Un sondage préliminaire portant sur 10 ménages donne les résultats rassemblés dans le tableau ci-dessous.

Déterminer la taille d'échantillon nécessaire pour faire l'étude avec la précision requise.

Ménage	Nombre de personnes dans le ménage	Nombre de consultations par personne durant l'année précédente
1	3	4,0
2	6	4,5
3	2	8,0
4	5	3,4
5	2	0,5
6	3	7,0
7	4	8,5
8	2	6,0
9	6	4,0
10	4	7,5

**Indication :** Le sondage porte sur des ménages et non sur des personnes.

Pour répondre à la question posée, une démarche est proposée.

1.) Exprimer le total de la variable d'intérêt  $Y$ , noté  $T_Y$  qu'on doit estimer en fonction des données qu'on peut collecter. Pour cela, nous introduirons les trois quantités suivantes :

$$z_k, \quad v_k, \quad y_k = z_k \times v_k$$

qui désignent respectivement le nombre de personnes, le nombre de consultations par personne et le nombre de consultations dans le ménage  $k$ .

2.) Les données permettent d'estimer un ratio. Définir ce ratio noté  $R$ , donner un estimateur de ce ratio, noté  $\hat{R}$  et sa valeur.

3.) Calculer la quantité  $S^2_{y-\hat{R}z,s}$  puis la variance de  $\hat{R}$ . Nous rappelons qu'un estimateur de la variance de  $\hat{R}$  est égal à

$$\widehat{\text{Var}} [\hat{R}] = \frac{1}{z_s^2} (1 - f) \frac{1}{n} S^2_{y-\hat{R}z,s}$$

où  $\hat{R} = \frac{\bar{y}_s}{\bar{z}_s}$  et  $s$  désigne l'échantillon.

4.) Définir le nombre total de personnes, noté  $M$ . Relier  $T_Y$  et  $M$  par une relation simple. Par conséquent, déduire un estimateur de  $T_Y$ .

5.) Calculer autrement la marge d'erreur, à savoir en utilisant une formule. Conclure.

Partie III : Contrôle de la qualité.

Partie IV : Analyse des Données.

---