
La déraisonnable efficacité des mathématiques dans les sciences naturelles

Eugene Wigner

Pierre-Yves Bienvenu

Initiation à la philosophie des sciences • Ecole Normale Supérieure • 16 février 2010

INTRODUCTION

Eugene Wigner (1902-1995), physicien hongrois - il s'appelait alors Jenő Pal Wigner - puis américain, fut un des grands physiciens de l'atome du XX^e siècle. Notons par ailleurs que sa sœur a épousé Paul Dirac. En 1960, trois ans avant de recevoir le prix Nobel, il publie dans *Communications on pure and applied mathematics*, un article qui fera date et que nous étudions ici.

Il commence son article par deux anecdotes frappantes. La première consiste en une discussion entre deux anciens camarades de classe dont l'un, devenu statisticien, s'est mis en tête de présenter sa passion à l'autre. Au cours de l'exposé, le profane devient de plus en plus sceptique face à la mathématisation d'un groupe humain ; la goutte d'eau qui fait déborder le vase est l'apparition du nombre π . Comment ne pas partager son incrédulité ? Pourtant, ce n'est pas la seule fois que cette constante mathématique se manifeste là où on ne l'attend pas. Par exemple,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

ce qui n'aurait pas manqué de provoquer la circonspection du quidam. La deuxième histoire narrée par Wigner est une question troublante que lui a posée un non-physicien : vu le faible nombre de faits expérimentaux pris en compte par les théories actuelles, comment peut-on être sûr qu'il n'y ait pas d'autres théories très différentes mais qui expliquent tout aussi bien ces mêmes faits ? On n'en est pas sûr, doit avouer notre scientifique chevronné.

L'article, où transpire un réel malaise - contagieux - de l'auteur, vise à montrer que l'efficacité des mathématiques relève du «miracle», que «nous ne comprenons ni ne méritons».

I. UNE EFFICACITÉ DIABOLIQUE

1. Les mathématiques comme outil

Il n'est pas étonnant que les sciences aient toujours fait appel à des notions mathématiques élémentaires. En effet, le commerçant, comme le physicien, a besoin tout simplement de compter. Savoir faire des additions, des multiplications correctement, puis des divisions - plus difficile - est indispensable à toute science même primitive. La résolution d'équations du premier ou deuxième degré, exposée par Al-Khwarizmi pour résoudre des problèmes d'héritage rendus ardu par le complexe droit musulman, relève de la même logique.

De même, l'intervention fréquente de la géométrie depuis l'Antiquité et l'éclosion des mathématiques grecques n'est pas faite pour nous étonner. Pour représenter une situation physique, il est naturel de symboliser les corps par des points, les trajectoires par des lignes, des cercles notamment. Ainsi, l'astronomie, à partir de Ptolémée (II^e siècle de notre ère) et de son œuvre majeure, *l'Almageste*, dont le titre original avant arabisation était précisément Μαθηματικη συνταξις, est faite de figures géométriques. La trigonométrie est très utilisée aussi, et avant même que la notion de fonction ne soit dégagée, des tables de sinus apparaissent.

Mais comme le remarque Wigner, tant qu'on reste à ce niveau, les mathématiques sont largement inspirées par le monde réel : *«the concepts of elementary mathematics and particularly elementary geometry were formulated to describe entities which are suggested by the actual world»*.

Plus tard, les physiciens emploient des concepts beaucoup moins naturels mais qui n'ont encore qu'un rôle opératoire. Le logarithme de Néper n'est pas introduit dans le but contemplatif qui lui est prêté plus tard (quadrature de l'hyperbole), mais simplement pour transformer les produits en sommes et soulager les astronomes submergés de calculs. Ces mathématiques ne sont qu'une commodité de calcul, et leur efficacité n'est pas mystérieuse : elles sont faites pour.

2. Formulation mathématique de lois

Le stade suivant consiste à exprimer mathématiquement les régularités observées dans le monde inanimé, voire vivant. Déjà, l'existence de telles régularités est considérée comme précisément *non naturelle* par Wigner ; nous y sommes cependant tellement habitués («les mêmes causes produisent les mêmes effets» dit la sagesse populaire) que nous oublions de nous en étonner. Mais ce n'est pas ce mystère que je veux traiter ici.

L'*Almageste*, déjà citée, peut être considérée comme un premier exemple monumental de formulation mathématique de lois. Chaque planète est astreinte à décrire un cercle de tel rayon autour d'un point lui-même en mouvement circulaire autour de la Terre. Il s'agit probablement des premières tentatives de lois mathématiques sérieuses du monde. Ensuite, la science arabe apporte sa pierre à l'édifice ; Ibn Sahl (940-1000), bien avant Snell et Descartes, semble avoir compris la loi mathématique de la réfraction.

Mais la vraie révolution mathématique de la physique se produit en occident, avec notamment Kepler, Galilée et Newton. La confiance en l'aptitude des mathématiques à décrire le monde est entière. Tout le monde connaît la célèbre phrase de Galilée qui résume cette attitude, discutée plus loin. Ce qu'il y a de révolutionnaire, c'est qu'apparaissent ici des concepts mathématiques fort peu naturels, la dérivée seconde par exemple, les coniques, ou le rapport T^2/a^3 . Il ne s'agit plus de cercles ou de triangles.

Plus fort encore, comme le raconte notre auteur, Newton a élaboré, presque à contrecœur, sa théorie de la gravitation sur la base de seulement deux observations : la trajectoire elliptique de la Lune et la trajectoire parabolique d'un corps lancé sur Terre. Eugene Wigner ne manque pas de souligner que le succès hallucinant de cette formule relève encore une fois de miracle.

Néanmoins, il n'est pas très surprenant que les lois que nous croyons déceler se mettent sous forme mathématique ou au moins sous forme de phrase logique. En effet, comment exprimer autrement une relation universelle, surtout si elle est quantitative ? Par exemple, la régularité des chutes de graves observée par Galilée s'écrit exactement «il existe un nombre g tel que pour tout corps qui effectue une chute libre de hauteur h en un temps t , $2h=gt^2$ ».

Une autre théorie est à ranger dans cette ère d'établissement de lois mathématiques, la thermodynamique. Elle naît dans des réflexions de Sadi Carnot sur la *puissance motrice du feu*. Il constate l'impossibilité de moteurs thermiques liés à un seul thermostat et d'autres faits généraux. Deux grands principes (voire trois) viendront rassembler en un seul édifice ces diverses expériences. Ils font appel à des fonctions d'état, l'énergie et l'entropie, attribué à chaque système. On peut alors écrire des «identités thermodynamiques», des relations différentielles entre les fonctions et variables d'état. Ces relations absolument générales, combinées à des hypothèses particulières (gaz parfait par exemple), débouchent sur des prédictions très souvent correctes. Ainsi, nous réussissons à prédire le comportement global de systèmes comportant un nombre astronomique de particules.

3. La physique mathématique

Le XXⁱè siècle a vu la physique confier aux mathématiques un rôle autrement plus important que par le passé. Certes, dans tous les domaines de la physique classique (mécanique, optique, thermodynamique, hydrodynamique), des lois mathématiques ont pu être dégagées par l'observation attentive de la nature et l'adoption de nouveautés mathématiques fort commodes ont souvent donné une impulsion à la physique, comme les dérivées partielles en hydrodynamique. Mais enfin, si le rôle des mathématiques est essentiel en pratique, conceptuellement, il est secondaire. La physique ne parle toujours que de masses, de corps, de courant, de fluide, de chaleur, d'énergie et ne lui applique les mathématiques que par commodité, pour aller plus vite et faire des prédictions quantitatives. Il n'en sera plus ainsi au XXI^e siècle.

Déjà, les équations de Maxwell nous alertent sur une mutation possible du rôle des mathématiques dans la physique. Elles mettent à l'honneur la notion de «champ», qui rencontrera un grand succès. Elles consistent en des relations différentielles abstraites entre ces champs. Aujourd'hui, Lorentz étant passé par là, nous en considérons quatre, dont trois sont des retranscriptions de lois expérimentales déjà bien connues à l'époque de Maxwell, le théorème de Gauss, celui de Faraday, et la conservativité du flux du champ électromagnétique, alors que la quatrième contredit le célèbre théorème d'Ampère. Maxwell sacrifie ce théorème à son hypothèse de conservation de la charge. Ainsi, des conceptions mathématiques *a priori* prennent le dessus sur des faits expérimentaux.

Mais Wigner s'appesantit surtout, à raison, sur la mécanique quantique qui accomplit une révolution épistémologique. Les êtres essentiels de cette théorie ne sont plus les corps ou les forces, ce sont des vecteurs d'état, des matrices, des fonctions d'onde, des nombres complexes ! Et il ne s'agit plus là d'astuces de calculs ou de raccourcis symboliques. La relativité générale participe aussi de ce bouleversement. Plus question de force gravitationnelle, de trajectoire et de masse, ni même d'espace euclidien et de temps, il s'agit d'une «variété» au sens de Riemann, à quatre dimensions, de courbure variable, où vivent divers tenseurs...

Et là les miracles se multiplient. Le modèle de Bohr, ridiculement simple et purement heuristique, fournit des prédictions sidérantes sur le spectre de l'atome d'hydrogène. L'électrodynamique quantique naît sur papier de l'imagination féconde de quelques physico-mathématiciens pour finalement prédire sans erreur des phénomènes physiques.

Wigner en oublie quelques uns des plus significatifs. Par exemple, encore plus stupéfiante est la prédiction par Dirac, après observation attentive de ses équations, de

l'existence de l'antimatière qui ne manquera pas d'être observée. Que dire aussi du calcul remarquable du déplacement du périhélie de Mercure par la relativité générale, alors que ce phénomène tracassait les physiciens depuis plus de 50 ans ? Notons que deux des acteurs majeurs de ce bouleversement, Einstein et Dirac, se revendiquaient esthètes. Ils étaient convaincus de la *vérité* de toute *belle* théorie.

Evoquons aussi le théorème de Noether, un des monuments les plus splendides de la physique mathématique, élaboré à l'occasion des réflexions de la brillante algébriste des invariants sur la mécanique quantique. Il établit un lien profond entre les invariants mathématiques et des lois de conservation. Plus généralement, la recherche d'invariants constitue une des caractéristiques majeures de la physique mathématique de l'époque. La relativité restreinte est précisément la construction d'une physique invariante par des transformations plus larges que celles de Galilée. Ainsi, des théories mathématiques fertiles en invariants apparaissent presque naturellement en physique : l'algèbre des groupes (groupes de Lie notamment), une des constructions de l'algèbre dite «abstraite», s'avère utile pour rassembler l'ensemble des changements de repère admissibles dans une structure autorisant la composition de transformations et leurs inversions.

II. LES MATHÉMATIQUES SONT-ELLES «LE» BON LANGAGE ?

Nous avons vu le summum de l'efficacité des mathématiques en physique. C'est alors que Dirac est conduit à écrire qu' *il devient de plus en plus évident que les formalismes que les mathématiciens trouvent les plus intéressants sont aussi ceux que la Nature a choisis pour elle-même*. Le beau frère de Wigner est loin d'avoir été le seul à développer ce genre de pensée.

1. La nature parle mathématiques : histoire de cette idée

Cette idée, très ancienne, semble avoir l'accord d'Eugene Wigner. *The mathematical language is, in a very real sense, the correct language*, écrit le savant américain, ou plus fort encore : *the statement that the laws of nature are written in the language of mathematics is now more true than ever*. On peut faire remonter une première version de cet énoncé à la secte pythagoricienne. Le quasi-mythique Pythagore (580-497 avant J.-C.) aurait développé une pensée mystique articulée autour de l'intuition que tout est nombre - nombre entier bien sûr. Le nombre serait la structure fondamentale du monde réel, c'est-à-dire que tous les rapports entre les choses du monde physique seraient régies par les rapports entre nombres. La connaissance de l'arithmétique, enseignée à ses disciples, est une condition nécessaire et suffisante pour comprendre profondément la nature. De telles considérations lui auraient été suggérées par la musique, où l'harmonie naît des proportions entre les hauteurs des sons.

Pythagore attribue une valeur métaphorique à chaque nombre (ainsi, le 4 représente la justice).

Mais c'est la célébrisissime citation de Galilée, évoquée dans notre article, qui constitue vraiment la doctrine étudiée ici. *La philosophie est écrite dans ce vaste livre qui constamment se tient ouvert devant nos yeux (je veux dire l'Univers), et on ne peut le comprendre si d'abord on n'apprend pas à connaître la langue et les caractères dans lesquels il est écrit. Or il est écrit en langue mathématique, et ses caractères sont les triangles, les cercles et autres figures géométriques, sans lesquelles il est humainement impossible d'en comprendre un seul mot, sans lesquelles on erre vraiment dans un labyrinthe obscur.*

Ainsi, les lois physiques «rédigées» par la nature elle-même en langage mathématique, et les hommes qui s'efforcent de la comprendre échoueront nécessairement s'ils ne sont point familiers avec cette langue ardue. Bien entendu, Galilée ne pense ici les mathématiques que comme géométrie, la seule partie de cette science à même de décrire la nature. Comme le montre Wigner, cette limitation n'est plus d'actualité.

Il faudrait croire alors que la nature connaît en un certain sens l'algèbre, les nombres complexes, les espaces préhilbertiens... Cela est difficilement acceptable, et semble-t-il incohérent avec une autre idée soutenue par Wigner : le mathématicien invente librement les concepts avec lesquels il veut jouer et faire étalage de toute son adresse intellectuelle. La nature n'a alors pas de rapport avec les mathématiques.

Une idée à la fois similaire et inverse à celle de Galilée et Wigner, peut-être liée au platonisme, traverse l'histoire des mathématiques pour s'incarner le plus parfaitement dans l'esprit de Charles Hermite : la science mathématique serait une science de la nature. *Je vous ferais bondir, si j'osais vous avouer que je n'admets aucune solution de continuité, aucune coupure entre les mathématiques et la physique, et que les nombres entiers me semblent exister en dehors de nous et en s'imposant avec la même nécessité, la même fatalité que le sodium, le potassium, etc.* écrivait cet illustre savant à son collègue néerlandais Stieltjes. Cette fois, ce n'est plus la nature qui parle maths, ce sont les mathématiques qui parlent de la nature, d'objets existant indépendamment d'elles. Fondamentalement, un concept mathématique est exactement comme un concept de physique, une abstraction issue de l'expérience du scientifique.

2. Une «raison» à l'œuvre

Admettre au sens propre l'énoncé de Galilée, repris avec conviction par notre physicien atomiste, c'est tenir au sujet de la nature un discours métaphysique étonnant dans la

bouche d'un scientifique du XX^e siècle. Comment prêter une intelligence à la nature, comment la considérer comme une entité législatrice apte aux langages mathématiques ? La stupéfaction permanente de Wigner devant les miracles qui se succèdent en physique le conduisent peut-être à des considérations religieuses.

D'ailleurs, l'harmonie mathématique du monde a toujours été considérée comme une preuve de l'existence de Dieu, dans l'Antiquité grecque bien sûr, où les cinq solides platoniciens, divins, constituent les éléments de base du monde, mais aussi depuis la Renaissance (chez Kepler par exemple), et même encore au XX^e siècle. On prête au pape Pie XI la citation *L'Univers n'est si resplendissant de divine poésie que parce qu'une divine mathématique, une divine combinaison de nombres règle ses mouvements*. Dirac lui-même ne manquait pas de prêter un caractère un divin à l'adéquation des mathématiques à l'étude de la nature : *Dieu est un mathématicien de tout premier ordre, et il a utilisé des mathématiques très élaborées pour construire l'univers*. Cette phrase a de quoi surprendre, car seuls les hommes ont à faire des maths car leur intelligence n'est pas suffisante qu'ils puissent embrasser d'un coup toutes les propositions d'une théorie. A Dieu, les mathématiques devraient apparaître comme une vaste tautologie. Mais ce que veut dire Paul Dirac, c'est que le Créateur a laissé dans la création des traces de perfection mathématique.

Cependant, je ne prétends pas régler ici la question de l'existence de Dieu, et me contente de rejeter tout anthropomorphisme et tout caractère rationnel de la nature d'une discussion sur la physique.

3. Une théorie du tout (ou *ultimate truth*) est-elle possible ?

Si l'on admet en tout cas que le langage mathématique est le plus approprié à décrire la nature, l'on peut se demander, comme Wigner, si la science a vocation à tendre vers un nombre de plus en plus restreint de lois mathématiques indépendantes. La physique fondamentale ne repose déjà plus que sur deux piliers principaux et pour le moment inconciliables, la relativité générale et la mécanique quantique (dont le modèle standard). Mais il y a bien d'autres lois physiques qui ne sont à première vue pas contenues dans ces deux théories : les lois de la thermodynamique (et notamment la physique statistique), de la mécanique des solides, de la mécanique des fluides, de l'optique. Ces «lois» ont ceci en commun qu'elles sont essentiellement empiriques ; que l'on songe par exemple à la loi de Fick, à la loi de Fourier, à la loi de Coulomb sur le frottement des solides, à la loi de Reynolds, à la loi de Malus. Cependant cela ne gêne personne, car ces lois ne sont pas des lois fondamentales, en ce sens qu'en principe, si l'on savait manier des systèmes de N équations, on constaterait qu'elles se déduisent des lois essentielles. Il en va de même pour la chimie ;

personne ne tient à déduire rigoureusement les règles de Holleman sur les substitutions électrophiles aromatiques des postulats de la mécanique quantiques, car cela n'a pas d'intérêt. Ainsi, l'on garde des très nombreux systèmes de lois diverses, mais en principe, il n'y en a que deux en physique.

Eugene Wigner revient avec insistance sur le cas de la biologie, en particulier sur les lois de l'hérédité ou de la conscience. Il craint que, si l'on parvient un jour à construire une théorie mathématique aussi complète de ces phénomènes biologiques que des phénomènes du monde inorganique, une incompatibilité profonde apparaisse entre les deux descriptions, un conflit que l'on ne saurait nullement apaiser. Ceci serait un coup d'arrêt à ce vieux rêve d'une «théorie de tout». Et après la chimie et la biologie, nous pourrions aussi établir des lois concernant ce qu'il est convenu d'appeler la physique sociale, problème abordé en introduction par l'auteur, qui à leur tour seraient radicalement contradictoires avec le reste.

Une autre source de danger pour le rêve de la théorie de tout réside dans la physique elle-même, nous révèle Wigner. En effet, nombre d'idées longtemps en accord avec les faits expérimentaux se sont vues déclarer fausses, c'est-à-dire comme l'explique l'auteur, se sont avérées logiquement incompatibles avec d'autres théories plus complètes et satisfaisantes. Des conflits sont donc constamment à craindre entre les théories physiques. La possibilité d'une théorie unique du monde apparaît ainsi bien illusoire. Et l'histoire ruine aussi le rêve d'unicité de cette hypothétique théorie de tout : la mécanique des matrices de Heisenberg et la mécanique ondulatoire de Schrödinger, ou plus simplement la mécanique de Newton et la mécanique analytique de Lagrange nous fournissent un exemple éclatant d'un couple de théories apparemment différentes mais qui signifient la même chose.

D'autre part, une analyse de Pierre Duhem dans *la Théorie physique* nous montre que, si des qualités anciennement jugées premières, irréductibles, sont souvent déçues de ce titre, d'autres au contraire sont constamment suggérées au physicien, de sorte que le nombre de qualités premières n'a pas tendance à diminuer.

III. LA DÉRAISONNABLE EFFICACITÉ, UNE ILLUSION ?

1. Une théorie physique s'améliore sans cesse

Croire que les mathématiques sont «le» bon langage pour décrire la nature, et crier au miracle devant la précision ahurissante des prédictions de la mécanique quantique par exemple, c'est estimer que nous avons trouvé la théorie définitive de la nature. L'histoire ne cesse de nous montrer qu'on aurait bien tort de porter un jugement si péremptoire sur nos théories. Pierre Duhem, dans l'ouvrage classique déjà cité, insiste au contraire sur l'idée

qu'une théorie n'est ni vraie ni fausse, car elle est provisoire. A chaque instant de l'histoire, les théories admises sont les meilleures disponibles, c'est-à-dire celles qui rendent compte le plus exactement des faits expérimentaux. Dans cette conception de la science, il n'est pas question de prétendre détenir la vérité sur la nature, encore moins de l'expliquer, mais d'en donner une représentation efficace, susceptible de prédire correctement les résultats de futures expériences. Le progrès de la théorie consiste alors à sans cesse raffiner cette image pour qu'elle «colle» mieux aux faits observés, de même que l'on sculpte une armure pour qu'elle épouse au mieux le corps du chevalier, tout en sachant que cette adéquation ne saurait être parfaite. Les exemples fourmillent ; le plus monumental est bien sûr l'amélioration des lois de Newton par la relativité restreinte, à son tour changée en relativité générale. Songeons aussi au «théorème» d'Ampère, avantageusement remplacé par l'équation de Maxwell sur le rotationnel du champ magnétique.

Prenons un exemple concret dans la théorie la plus stupéfiante pour Wigner, l'électrodynamique quantique. On appelle facteur de Landé le rapport gyromagnétique de l'électron divisé par le rapport e/m . L'équation de Dirac, tenant compte d'effets quantiques et relativistes lui attribue la valeur entière 2. La valeur observée est 2,002 319 304 3718. Il y aurait déjà de quoi s'extasier ! La valeur 2 a d'ailleurs longtemps été considérée comme la valeur exacte. Mais avec la précision croissante des appareils de mesure, elle n'a pas pu le rester (à partir de 1947). C'est alors que l'électrodynamique quantique entre en scène ; tenant compte de perturbations de plus en plus fines, elle fournit (au 4^è ordre) une valeur affolante, correcte sur 8 décimales. On pourrait penser qu'en principe, c'est-à-dire en faisant comme si nous étions capable de mener le développement limité proposé par l'électrodynamique quantique jusqu'à un un ordre infini, nous tenons la valeur exacte de cette grandeur. Ainsi, nous sommes tentés de croire que nous possédons la théorie ultime dans son domaine, et que le seul frein à nos prédictions est l'état des techniques de calcul. C'est sans compter l'existence plausible d'autres sources de perturbations que celle prise en compte par l'électrodynamique, de même que Dirac n'avait pas pensé à l'électrodynamique...

2. Les mathématiques à défaut de mieux ?

Richard Feynman est l'un des héros de l'épopée de la physique au XX^e siècle, très célèbre même auprès d'un public large pour diverses citations amusantes sur la physique, mais surtout reconnu parmi ses pairs comme un génie majeur. Il est le principal fondateur de cette fameuse électrodynamique quantique, ce qui lui valut un prix Nobel de physique peu après Eugene Wigner. Loin de verser dans le triomphalisme, ni dans la fascination pour le succès diabolique en physique de son édifice presque purement mathématique, il estime que si la physique est mathématique, c'est parce que c'est le langage

le plus adapté à l'homme. Il retire alors à la nature la faculté de parler math. Il rejoint au passage la pensée de Duhem de la physique mathématique comme fournissant en général la meilleure image du monde, mais qui n'est pas le langage dans lequel la nature nous livre ses plus précieux secrets.

Nous faisons de la physique mathématique parce que nous sommes modestes et pragmatiques. Les discours primitifs sur la nature invoquant des divinités ne font pas avancer la science, ils sont au contraire un aveu d'impuissance. La physique qui se contente d'utiliser le langage courant se montre imprécise et stérile. Elle ne dépasse pas en fait le stade de ce que Duhem appelle l'expérience vulgaire. Nous constatons que la physique philosophique, celle d'Aristote par exemple, n'a pas produit de résultats très satisfaisants. Songeons aux principes à la mode au 17^e et 18^e siècle : le principe de Fermat, le principe de moindre action, le principe de D'Alembert. *L'Action est proportionnelle au produit de la masse par la vitesse et par l'espace. Maintenant, voici ce principe, si sage, si digne de l'Être suprême : lorsqu'il arrive quelque changement dans la Nature, la quantité d'Action employée pour ce changement est toujours la plus petite qu'il soit possible.* Cette intuition intéressante ne mène à rien si l'on en reste à cet énoncé métaphysique, il n'acquière une vraie efficacité que dans le formalisme de Lagrange. La physique qui se fait des représentations graphiques de la nature ne fonctionne pas très bien non plus : ainsi, le système de Ptolémée, ou beaucoup plus tard, le modèle dit du *pudding* de l'atome ne sauraient donner plus qu'une explication heuristique de la nature. Les physiciens savent que leur intelligence n'est capable de saisir de manière fiable que des idées mathématiques, et que le langage le plus précis qu'ils puissent utiliser est celui des nombres.

Il est frappant de constater que finalement, cette conception de la physique est très proche de la citation de Galilée, à condition de l'interpréter d'une autre manière que tout à l'heure. Manifestement, Feynman dit qu'il est *humainement impossible* ou au moins très difficile de comprendre le moindre mot du livre de la nature sans connaissances mathématiques.

3. La déraisonnable efficacité des mathématiques... en mathématiques

Une fois que nous décidons que ce que nous avons de mieux à faire est de bâtir une théorie mathématique de la nature, une fois que nous fixons quelques hypothèses qui nous paraissent raisonnables, ou suggérées par l'expérience, il reste aux physico-mathématiciens à démontrer diverses conséquences de ces axiomes et à les interpréter. C'est alors que la puissance des maths se met en marche.

Eugene Wigner écrit dans la première page de l'article que *des concepts mathématiques surgissent de manière inattendue*. En effet, que π apparaisse en statistique a de

quoi surprendre. Mais il est tout aussi inattendu qu'il se manifeste dans la série citée en introduction. En fait, c'est l'efficacité universelle des mathématiques, leur profonde unité dans l'immense étendue bigarrée du paysage mathématique qui est proprement surprenante. Citons quelques exemples.

L'analyse complexe est un magnifique édifice élevé principalement par Cauchy à partir de 1820 alors que les nombres complexes avaient encore un statut incertain. Il s'agit d'étudier les fonctions d'une variable complexe, à valeurs complexes, et plus particulièrement une certaine classe de fonctions, les fonctions holomorphes. Nous obtenons rapidement quelques résultats spectaculaires, mais a priori internes à la théorie. Puis Peter Gustav Lejeune-Dirichlet accomplit un exploit mémorable : prouver un résultat difficile (théorème dit de la progression arithmétique) de théorie des nombres par le biais de l'analyse complexe et harmonique. Son contemporain Jacobi écrit de lui : *En appliquant les séries de Fourier à la théorie des nombres, Dirichlet a récemment trouvé des résultats atteignant les sommets de la perspicacité humaine*. S'il est certainement le premier, Dirichlet ne sera pas le dernier. Contentons-nous de citer le plus illustre problème mathématique encore ouvert, l'hypothèse de Riemann, qui est à première vue un résultat d'analyse complexe, mais qui intéresse les mathématiciens pour l'information importante qu'elle donne en arithmétique sur la répartition des nombres premiers. Ou remarquons plus simplement que les démonstrations les plus efficaces du théorème fondamental de l'algèbre font toutes appel à l'analyse, un domaine pourtant très distinct de l'algèbre.

La théorie axiomatique des probabilités est née sous la plume d'Andreï Kolmogorov en 1933. Il est édifiant de constater qu'elle reprend exactement, en ne faisant que changer les termes, la théorie de la mesure due à Lebesgue et Borel, apparue à l'aube du siècle. Ainsi, les mesures deviennent des probabilités, les boréliens des événements, les fonctions mesurables des variables aléatoires. Mais les axiomes employés sont rigoureusement les mêmes. Alors qu'ils n'ont pas été choisis par Lebesgue pour décrire des probabilités, ils se révèlent tout à fait adéquat, de manière presque accidentelle.

Quand on médite ces exemples, l'heureux débouché trouvé par l'analyse fonctionnelle, en particulier l'analyse des espaces de Hilbert, dans la physique (problèmes variationnels, équations aux dérivées partielles) ne paraît plus si surnaturel. En tout cas pas plus que le triomphe de la théorie axiomatique des probabilités ou de l'analyse complexe. L'efficacité des mathématiques n'est plus alors qu'une de leurs propriétés intrinsèques.

CONCLUSION

Quiconque fait de la physique est frappé par le succès formidable de très diverses notions mathématiques abstraites qu'on y rencontre. Certaines prédictions numériques semblent magiques. Cependant, il est hasardeux d'écrire comme notre auguste auteur que le langage mathématique est le bon, celui par lequel la nature se livre. Il est plus prudent d'écrire que le stade atteint par la physique mathématique au XX^e siècle est la conséquence d'une longue expérience des hommes qui ont trouvé dans les ressources mathématiques de leurs temps de quoi construire un solide modèle de phénomènes naturels.

Cependant, le titre de l'article fait état d'une efficacité des mathématiques dans les sciences de la nature en général. Comme le reconnaît Eugene Wigner, en pratique, elle est loin d'être réalisée en biologie. Il relève l'exemple des lois de Mendel, trois énoncés abstraits ayant un certain succès en génétique. Aujourd'hui, il pourrait commenter l'explosion des biomathématiques et de la bioinformatique. Citons les équations de Cherruault (1998) en biologie des populations, les modèles de la dérive génétique, voire la découverte de lois de Zipf ou Pareto en linguistique par exemple. Des modèles statistiques et probabilistes réussissent assez bien à décrire des phénomènes biologiques ou sociaux. Cependant, nous sommes loin d'avoir un système cohérent et général de lois de la vie, et il n'y a pas de raison de penser que nous en découvrirons un un jour.