COURS M2 “GÉOMÉTRIE RIEMANNIENNE” NOVEMBRE – DÉCEMBRE 2013 *COMPLÉMENT DE COURS NO. 1*

ALEXANDRU OANCEA

Autour des symboles de Christoffel. Soit $(x^1, \ldots, x^n)$ une carte locale sur (M, g) et $g_{ij} dx^i \otimes dx^j$ l'expression du tenseur de courbure dans cette carte. On rappelle que les quantités

$$\Gamma^\ell_{ij} := \frac{1}{2} g^{\ell k} \big(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \big)$$

sont appelées *symboles de Christoffel* et que l'équation des géodésiques est

$$\ddot{c}^\ell + \Gamma^\ell_{ij} \dot{c}^i \dot{c}^j = 0.$$

(Les indices i et j sont répétés et on sous-entend que l'on somme sur i, j.) Vérifier que l'équation des géodésiques est indépendante du choix de carte. L'on pourra d'abord montrer que les symboles de Christoffel se transforment selon la règle suivante : si $(y^1, \ldots, y^n)$ est une autre carte et $\tilde{\Gamma}^t_{ij}$ sont les symboles de Christoffel dans cette carte, alors

$$\tilde{\Gamma}^t_{ij} = \Gamma^p_{s\ell} \frac{\partial x^s}{\partial y^i} \frac{\partial x^\ell}{\partial y^j} \frac{\partial y^t}{\partial x^p} + \frac{\partial^2 x^p}{\partial y^i \partial y^j} \frac{\partial y^t}{\partial x^p}.$$

En quels points est-ce que les différents termes de cette expression sont-ils évalués ? Vérifier que l'on obtient la même expression si l'on définit les symboles de Christoffel à partir de la connexion de Levi-Civita par la formule

$$D_{\partial/\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma^\ell_{ij} \frac{\partial}{\partial x^\ell}.$$

Invariance de l'équation des géodésiques par rapport au choix de carte. Soit (M, g) une variété riemannienne et $\gamma : I \to U \subset M$ une courbe contenue dans un domaine de carte $(U, \varphi = (x^1, \ldots, x^n))$. Posons $c := \varphi \circ \gamma$, ayant comme composantes $c^i := x^i \circ \gamma$. Soit $\psi = (y^1, \ldots, y^n)$ une autre carte sur U et posons $\tilde{c} := \psi \circ \gamma$, ayant comme composantes $\tilde{c}^i := y^i \circ \gamma$. L'on a en particulier $\tilde{c}^i = (y^i \circ \varphi^{-1}) \circ c$ et, par un abus de notation, l'on écrit $\tilde{c}^i = y^i \circ c$.

— Montrer que

$$\dot{\tilde{c}}^i = \frac{\partial y^i}{x^s} \dot{c}^s, \qquad \ddot{\tilde{c}}^i = \frac{\partial^2 y^i}{\partial x^s \partial x^t} \dot{c}^t \dot{c}^s + \frac{\partial y^i}{\partial x^s} \ddot{c}^s.$$

— En supposant que c vérifie l'équation des géodésiques, montrer que $\tilde{c}$ la vérifie aussi (faire attention à la règle de transformation des symboles de Christoffel).

Date: 5 Novembre 2013.