9/12/2013

COMPLÉMENT DE COURS (12 pages)

Contenu :

- dérivée covariante sur les tenseurs

  relation avec la différentielle extérieure & avec la dérivée de Lie

- adjoint formel de la différentielle extérieure est

$$\boxed{d^*\omega = -\mathrm{tr}_{12} D\omega}, \quad \omega \in \Omega^1(M)$$

Autre formule remarquable :

$$\boxed{D^* D\omega = -\mathrm{tr}_{12} D^2\omega}, \quad \omega \in \Gamma((T^*M)^{\otimes k}).$$

- preuve de la formule de Bochner – Weitzenböck

$$\boxed{\Delta\alpha = D^* D\alpha + \mathrm{Ric}(\alpha)}, \quad \alpha \in \Omega^1(M)$$

- compléments sur des généralisations de la formule de Bochner, à la Weitzenböck – Lichnerowicz : consulter par exemple le livre de P. Petersen, Riemannian Geometry, GTM 171, Springer 2006.

§1. Dérivée covariante sur les tenseurs

Soit $D : \Gamma(TM) \longrightarrow \Gamma(T^*M \otimes TM)$ une connexion linéaire

$\rightsquigarrow$ extension $D : \Gamma(T^*M^{\otimes p} \otimes TM^{\otimes q}) \longrightarrow \Gamma(T^*M^{\otimes p+1} \otimes TM^{\otimes q})$

- Leibniz : $D(S \otimes T) = DS \otimes T + S \otimes DT$
- contractions : pour toute contraction

$$c_{ij} : \Gamma(T^*M^{\otimes p} \otimes TM^{\otimes q}) \longrightarrow \Gamma(T^*M^{\otimes p-1} \otimes TM^{\otimes q-1})$$

$$1 \leq i \leq p \,, \quad 1 \leq j \leq q$$

$$\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_p \otimes X_1 \otimes \cdots \otimes X_q \longmapsto \alpha_i(X_j)\, \alpha_1 \ldots \hat{\alpha}_i \ldots \alpha_p \otimes X_1 \ldots \hat{X}_j \ldots X_q$$

l'on a $D(c_{ij} S) = c_{ij} DS$

& par convention
$D : C^\infty(M) \longrightarrow \Gamma(T^*M)$
$D = d$

<u>Notation</u> : $T_p^q M = T^*M^{\otimes p} \otimes TM^{\otimes q}$ "<u>fibré des tenseurs de type (q,p)</u>"

<u>Exemples</u> : (i) $D(\underbrace{\alpha(Z)}_{c_{11}(\alpha \otimes Z)}) = c_{11}(D(\alpha \otimes Z)) = c_{11}(D\alpha \otimes Z + \alpha \otimes DZ)$

$$= (D\alpha)(Z) + \alpha(DZ)$$

Donc $(D_Y \alpha)(Z) = \underbrace{D_Y(\alpha(Z))}_{Y(\alpha(Z))} - \alpha(D_Y Z)$

(ii) Soit $Z \in \Gamma(TM)$. Alors $DZ \in \Gamma(T_1^1 M)$, $D^2 Z \in \Gamma(T_2^1 M)$

$$D_X D_Y Z \overset{\text{not.}}{=} (D^2 Z)(X,Y) = D_X(D_Y Z) - D_{D_X Y} Z$$

$$\| $$

$$D((DZ)(Y))(X) - (DZ)(DY)(X) \quad \overset{\text{not.}}{=} D^2_{X,Y} Z$$

Désormais D est la connexion de Levi-Civita.

Donc

$$\boxed{D_Y D_X Z - D_X D_Y Z = R(X,Y)Z} \quad \left(\begin{array}{l}\text{définition équivalente} \\ \text{de la courbure}\end{array}\right)$$

$$\shortparallel$$

$$D_Y(D_X Z) - D_X(D_Y Z) + D_{\underbrace{D_X Y - D_Y X}_{[X,Y]}} Z$$

Convention de notation :

$$D_X D_Y Z \overset{\text{not.}}{=\!=} D^2_{X,Y} Z \overset{\text{not.}}{=} (D^2 Z)(X,Y)$$

alors que $D_X(D_Y Z)$ désigne la dérivée covariante de $D_Y Z$ dans la direction X.

(iii) La relation de "préservation de la métrique"

$$X(g(Y,Z)) = g(D_X Y, Z) + g(Y, D_X Z)$$

équivaut à $Dg = 0$ [on dit que g est un tenseur parallèle : il est invariant par transport parallèle].

(iv) Soient $\alpha \in \Omega^1(M)$ et $Y \in \mathcal{X}(M)$ duaux par g :

$$\forall Z,\ \alpha(Z) = g(Y,Z).$$

Alors $\forall X$, $D_X \alpha \in \Omega^1(M)$ est dual de $D_X Y$ par g :

en effet : $\underset{(D_X\alpha)(Z) + \alpha(\cancel{D_X Z})}{X(\alpha(Z))} = X(g(Y,Z)) = \langle D_X Y, Z\rangle + \langle Y, \cancel{D_X Z}\rangle$

Dans la littérature, on note aussi

$$Y = \alpha^{\#} \quad , \quad \alpha = Y_{\flat} \qquad \text{bémol , dièse}$$

Donc $\#$ et $\flat$ commutent avec D

(v) <u>Hessienne d'une fonction</u> $f \in C^{\infty}(M)$

Soit $\nabla f = (df)_{\flat}$ dual de df

Alors $\boxed{\mathrm{Hess}(f) \in \mathrm{End}(TM) \ , \ X \longmapsto D_X \nabla f}$

endomorphisme symétrique "hessienne de f".

En effet : $\langle D_X \nabla f, Y \rangle - \langle X, D_Y \nabla f \rangle = X \langle \nabla f, Y \rangle - \langle \nabla f, D_X Y \rangle$

$$- Y \langle X, \nabla f \rangle + \langle \nabla f, D_Y X \rangle$$

$$= X(Yf) - Y(Xf) - df(\underbrace{D_X Y - D_Y X}_{[X,Y]}) = 0$$

$\boxed{\text{//}}$

Par ailleurs

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{Hess}(f)(X,Y) &:= \langle D_X \nabla f, Y \rangle = (D_X df)(Y) \quad \text{cf (iv)} \\ &\overset{(*)}{=} \frac{1}{2} L_{\nabla f}\, g \end{aligned}}$$

<u>Preuve de $(*)$</u> :

$$(L_{\nabla f}\, g)(X,Y) = \nabla f\,(g(X,Y)) - g(\underbrace{L_{\nabla f} X}_{[\nabla f, X] = D_{\nabla f} X - D_X \nabla f}, Y) - g(X, \overset{[\nabla f, Y] = D_{\nabla f} Y - D_Y \nabla f}{L_{\nabla f} Y})$$

$$= \cancel{\nabla f(g(X,Y))} - \cancel{\langle D_{\nabla f} X, Y \rangle} - \cancel{\langle X, D_{\nabla f} Y \rangle}$$

$$+ \langle D_X \nabla f, Y \rangle + \langle X, D_Y \nabla f \rangle$$

$$= 2 \langle D_X \nabla f, Y \rangle$$

$\boxed{\text{//}}$

On a aussi

$$\boxed{\mathrm{Hess}(f)(X,Y) = D^2_{X,Y} f}$$

En effet :

$$D^2_{X,Y} f = \left(D_X(Df)\right)(Y)$$
$$= D_X \langle \nabla f, Y \rangle - Df(D_X Y)$$
$$= X \langle \nabla f, Y \rangle - \langle \nabla f, D_X Y \rangle$$
$$= \langle D_X \nabla f, Y \rangle .$$

☒

(vi) Soit $\alpha \in \Omega^1(M) = \Gamma(T^*M)$.

Alors $\boxed{(D^2_{X,Y}\alpha)(Z) - (D^2_{Y,X}\alpha)(Z) = \alpha(R(X,Y)Z)}$

<u>identité de Ricci</u>

<u>Preuve</u> : $DD(\alpha(Z)) = D((D\alpha)(Z) + \alpha(DZ))$

$$= (D^2\alpha)(Z) + (D\alpha)(DZ) + (D\alpha)(DZ) + \alpha(D^2 Z)$$

i.e. $\underbrace{D^2_{X,Y}(\alpha(Z))}_{\mathrm{Hess}(\alpha(Z))(X,Y)} = (D^2_{X,Y}\alpha)(Z) + \alpha(D^2_{X,Y}Z) + (D_X\alpha)(D_Y Z) + (D_Y\alpha)(D_X Z)$

Donc, par symétrie de la hessienne :

$$(D^2_{X,Y}\alpha)(Z) - (D^2_{Y,X}\alpha)(Z) = \alpha(D^2_{Y,X}Z - D^2_{X,Y}Z) = \alpha(R(X,Y)Z)$$

☒

Relation entre dérivée covariante et dérivée de Lie :

$\omega \in \Omega^q(M)$:

$$\boxed{(L_X \omega)(X_1, \dots, X_q) = (D_X \omega)(X_1, \dots, X_q) + \sum_{i=1}^{q} \omega(X_1, \dots, D_{X_i} X, \dots, X_q)}$$

Preuve : $(L_X \omega)(X_1, \dots, X_q) = X(\omega(X_1, \dots, X_q))$

$$- \sum_{i=1}^{q} \omega(X_1, \dots, \underbrace{[X, X_i]}_{D_X X_i - D_{X_i} X}, \dots, X_q)$$

$$= (D_X \omega)(X_1, \dots, X_q) + \sum_{i=1}^{q} \omega(X_1, \dots, D_{X_i} X, \dots, X_q)$$

$\boxtimes$

Relation entre dérivée covariante et différentielle extérieure

$\omega \in \Omega^q(M)$:

$$\boxed{(d\omega)(X_0, \dots, X_q) = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i (D_{X_i} \omega)(X_0, \dots, \hat{X_i}, \dots, X_q)}$$

Preuve : Notons d^D le membre de droite : c'est une dérivation (degré 1)

- $d^D f = df$

$\alpha \in \Omega^1(M)$ • $(d^D \alpha)(X_0, X_1) = (D_{X_0} \alpha)(X_1) - (D_{X_1} \alpha)(X_0)$

$$= X_0(\alpha(X_1)) - \alpha(D_{X_0} X_1)$$
$$- X_1(\alpha(X_0)) + \alpha(D_{X_1} X_0)$$
$$= X_0(\alpha(X_1)) - X_1(\alpha(X_0)) - \alpha([X_0, X_1])$$
$$= d\alpha(X_0, X_1)$$

Donc $d^D = d$ sur Ω^0 et Ω^1, par conséquent $d^D = d$ $\boxtimes$

§2.

PROPOSITION : L'adjoint formel $d^* : \Omega^{k+1}M \longrightarrow \Omega^k M$ de la différentielle extérieure est donné par la formule

$$d^*\omega = -\,tr_{12}\, D\omega$$

Notation : $d^*_D\omega := -tr_{12}\, D\omega$

Nous montrons $d^* = d^*_D$.

Preuve : il est utile / instructif de traiter le cas $k=0$ d'abord.

Notons $\omega = \alpha \in \Omega^1(M)$. Veux m.q.

$$\int_M d^*_D\alpha \cdot f\, v_g = \int_M \langle \alpha, df\rangle\, v_g$$

, où v_g est la forme volume sur M.

On a $tr_{12} D(f\alpha) = tr_{12}(Df\otimes\alpha) + tr_{12}(f D\alpha)$

$$= f\, tr_{12} D\alpha + \sum_i \underbrace{Df(e_i)}_{\langle \nabla f, e_i\rangle}\cdot \alpha(e_i)$$

$$= f\, tr_{12} D\alpha + \alpha(\nabla f) \qquad (*)$$

Par ailleurs posons $\beta = f\alpha$ et X le dual de β.

Alors $(tr_{12} D\beta)\, v_g = +\, d\,(i_X v_g)$ [on appelle aussi $tr_{12}D\beta =: \mathrm{div}\, X$]

En effet : $\cdot\ (tr_{12} D\beta)\, v_g\,(e_1,\dots,e_n) = tr_{12} D\beta = \sum_i (D_{e_i}\beta)(e_i)$

$$\cdot\ d\,(i_X v_g)(e_1,\dots,e_n) \underset{p.5}{=} \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \underbrace{D_{e_i}(i_X v_g)(e_1,\dots,\hat{e_i},\dots,e_n)}_{\substack{D_{e_i}(i_X v_g(e_1,\dots,\hat{e_i},\dots,e_n)) \\ -\sum (i_X v_g)(\dots \underbrace{D_{e_i} e_j}_{0} \dots)}}$$

peux choisir le repère local o.n. $(e_1,\dots,e_n)$ t.q. $D_{e_i}e_j = 0$

$$= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1}(-1)^{i-1} D_{e_i}\langle X, e_i\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^n (D_{e_i}\beta)(e_i) \quad ✓$$

Par conséquent

$$f\, tr_{12} D\alpha \cdot v_g + \langle \alpha, df \rangle v_g = \text{forme exacte}.$$

ce qui montre que $d_D^* \alpha := - tr_{12} D\alpha = d^* \alpha$

<u>REMARQUE</u> : $(*)$ se généralise à

$$d_D^*(f\omega) = f\, d_D^* \omega + i_{\nabla f}\, \omega \quad , \ \forall k \ , \ \forall \omega \in \Omega^{k+1} M .$$

<u>Démonstration dans le cas général</u> $(k \geq 2)$

Veux m.q. $\forall \omega \in \Omega^{k+1}$, $\forall \eta \in \Omega^k$

$$\int_M \langle d_D^* \omega , \eta \rangle v_g = \int_M \langle \omega , d\eta \rangle v_g \qquad (*)$$

Les deux membres de cette équation sont $\mathbb{R}$-linéaires en η et en ω.

Il suffit donc de supposer

$$\eta = f\, e_1^* \wedge \dots \wedge e_k^* \quad , \quad (e_i^*) \text{ base duale de b.o.n. } (e_i) \text{ (locale)}$$

Alors

$$\begin{aligned} \langle d_D^* \omega , \eta \rangle v_g &= (d_D^* \omega)(e_1, \dots, e_k) \cdot f\, v_g \\ &= - \sum_{i=1}^n (D_{e_i} \omega)(e_i, e_1, \dots, e_k)\, f\, v_g \\ &= -(-1)^k \sum_{i=1}^n (D_{e_i} \omega)(e_1, \dots, e_k, e_i)\, f\, v_g . \end{aligned}$$

Idée : Posons $\alpha := i_{e_1\wedge\dots\wedge e_k}\,\omega \in \Omega^1(M)$

$$= \omega(e_1,\dots,e_k,\cdot)$$

et, comme dans le cas $k=0$, l'on a

$$\underbrace{\mathrm{tr}_{12} D(f\alpha)}_{\text{forme exacte (cf. } k=0)} = f\,\mathrm{tr}_{12} D\alpha + i_{\nabla f}\alpha$$

lorsque multipliée par v_g

Par ailleurs :

$$\mathrm{tr}_{12} D\alpha = \sum_i i_{e_i} D_{e_i}\alpha \qquad \alpha = i_{e_1\wedge\dots\wedge e_k}\,\omega$$

$$\overset{!}{=} \sum_i i_{e_i}\left(i_{D_{e_i}(e_1\wedge\dots\wedge e_k)}\,\omega + i_{e_1\wedge\dots\wedge e_k} D_{e_i}\omega\right)$$

$$= (-1)^k\, i_{e_1\wedge\dots\wedge e_k}\,\mathrm{tr}_{12} D\omega + (-1)^k \sum_i \omega\left(e_i, D_{e_i}(e_1\wedge\dots\wedge e_k)\right)$$

et $i_{\nabla f}\alpha = \omega\left(e_1,\dots,e_k, \sum_i df(e_i)\,e_i\right)$

$$= (-1)^k \sum_i df(e_i)\,\omega(e_i, e_1,\dots,e_k)$$

Par conséquent : en considérant $(-1)^k\left(f\,\mathrm{tr}_{12} D\alpha + i_{\nabla f}\alpha\right)^{v_g}$ on obtient

$$-\langle d_D^*\omega, \eta\rangle v_g + \left(f\sum_i \omega(e_i, D_{e_i}(e_1\wedge\dots\wedge e_k)) + \sum_i df(e_i)\,\omega(e_i,e_1,\dots,e_k)\right)$$

$$= \text{forme exacte}.$$

Par ailleurs on calcule $\langle \omega, d\eta \rangle v_g$:

$$\eta = f\, e_1^* \wedge \dots \wedge e_k^*$$

$$d\eta = df \wedge e_1^* \wedge \dots \wedge e_k^* + f\, d(e_1^* \wedge \dots \wedge e_k^*)$$
$$= \sum_i df(e_i)\, e_i^* \wedge e_1^* \wedge \dots \wedge e_k^* + f d(e_1^* \wedge \dots \wedge e_k^*)$$

L'on a $\langle \omega, df(e_i)\, e_i^* \wedge e_1^* \wedge \dots \wedge e_k^* \rangle = df(e_i)\, \omega(e_i, e_1, \dots, e_k)$

et $\langle \omega, f\, d(e_1^* \wedge \dots \wedge e_k^*) \rangle \overset{!}{=} f \sum_i \omega(e_i, D_{e_i}(e_1 \wedge \dots \wedge e_k))$

puisque pour toute k-forme

$$(d\Theta)(e_{i_0}, \dots, e_{i_k}) = \sum_j (-1)^j (D_{e_{i_j}} \Theta)(e_{i_0} \dots \hat{e}_{i_j} \dots e_{i_k})$$

de sorte que le coeff. de $d\Theta$ sur $e_{i_0}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*$ est

$$\sum_{j=0}^{k} (e_{i_0}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*)(e_{i_j}, (D_{e_{i_j}} \Theta)^\#)$$

$\hookrightarrow$ muni° $e_{i_0} \dots \hat{e}_{i_j} \dots e_{i_k}$ compte

Dans notre cas $\Theta = e_1^* \wedge \dots \wedge e_k^*$, $\Theta^\# = e_1 \wedge \dots \wedge e_k$

et $(D\Theta)^\# = D\Theta^\#$.

Par conséquent

$$\langle \omega, d\eta \rangle v_g = f \sum_i \omega(e_i, D_{e_i}(e_1 \wedge \dots \wedge e_k)) + \sum_i df(e_i)\, \omega(e_i, e_1 \dots e_k)$$

diffère de $\langle d_D^* \omega, \eta \rangle v_g$ par une forme exacte,

ce qui prouve la Proposition. $\boxed{\text{MM}}$

PROPOSITION (Petersen, Riem. geometry, p. 210)

L'adjoint formel $D^*: \Gamma(T^*M^{\otimes k+1}) \longrightarrow \Gamma(T^*M^{\otimes k})$

de la dérivée covariante vérifie

$$D^* D\,\omega = -\mathrm{tr}_{12} D^2 \omega$$

Preuve : Soient $\omega, \eta \in \Gamma(T^*M^{\otimes k})$ à supp. cpct ds un domaine de repère o.n. $(e_1, \dots, e_n)$

$$\langle D^* D\omega, \eta\rangle_{L^2} = \int_M \langle D^* D\omega, \eta\rangle$$

$$= \int_M \langle D\omega, D\eta\rangle$$

$$\overset{!}{=} \int_M \mathrm{tr}\left((D\omega)^t D\eta\right)$$

Pour ! : pour deux matrices rectangulaires de m̂ dim. la ~~produits~~ somme des produits des coeff. est $\mathrm{tr}(A^t . B)$

$$= \int_M \sum_i g\left(e_i, \left((D\omega)^t D\eta\right) e_i\right)$$

$$= \int_M \sum_i \langle (D\omega)(e_i), (D\eta)(e_i)\rangle$$

$$= \int_M \sum_i \langle D_{e_i}\omega, D_{e_i}\eta\rangle$$

L'on a aussi

$$\langle \operatorname{tr}_{12} D^2\omega, \eta\rangle = \sum_i \langle D^2_{e_i,e_i}\omega, \eta\rangle$$

$$= \sum_i \langle D_{e_i} D_{e_i}\omega, \eta\rangle - \langle D_{D_{e_i}e_i}\omega, \eta\rangle$$

$$= -\sum_i \langle D_{e_i}\omega, D_{e_i}\eta\rangle + \sum_i D_{e_i}\langle D_{e_i}\omega, \eta\rangle$$
$$- \sum_{i=1}^{n} \langle D_{D_{e_i}e_i}\omega, \eta\rangle$$

$$= -\langle D^* D\omega, \eta\rangle$$
$$+ \underbrace{\sum_i D_{e_i}\langle D_{e_i}\omega, \eta\rangle - \langle D_{D_{e_i}e_i}\omega, \eta\rangle}_{(*)}$$

Considerons la 1-forme $\beta = \langle D\omega, \eta\rangle$.

Puisque $D(\beta(X)) = (D\beta)(X) + \beta(DX)$

on trouve $(D\beta)(X) = D(\beta(X)) - \beta(DX)$

et donc $(*) = \operatorname{tr}_{12} D\beta$ = forme exacte lorsqu'on la multiplie par v_g.

<u>Conclusion</u> : $\langle -\operatorname{tr}_{12} D^2\omega, \eta\rangle_{L^2} = \langle D^* D\omega, \eta\rangle_{L^2}$ $\boxed{\text{///}}$

§3 Formule de Bochner – Weitzenböck – Lichnerowicz

(Gallot–Hulin–Lafontaine p.221, 4.36)

$$\boxed{\forall \alpha \in \Omega^1(M), \quad \Delta\alpha = D^*D\alpha + Ric(\alpha)}$$

Repère local orthonormé $(e_1, \dots, e_n)$

- $\Delta\alpha = dd^*\alpha + d^*d\alpha$

$$\begin{cases} d^*\alpha = -\sum_i (D_{e_i}\alpha)(e_i) \\ (dd^*\alpha)(X) = -\sum_i D_X D_{e_i}\alpha(e_i) \end{cases}$$

et aussi

$$\begin{cases} d\alpha(X,Y) = (D_X\alpha)(Y) - (D_Y\alpha)(X) \\ d^*d\alpha(X) = -tr_{12}(Dd\alpha)(X) \\ \qquad = -\sum_i D_{e_i} d\alpha(e_i, X) \\ \qquad = -\sum_i D_{e_i} D_{e_i}\alpha(X) + \sum_i D_{e_i} D_X \alpha(e_i) \end{cases}$$

Donc $\Delta\alpha(X) = -\sum_i D_{e_i} D_{e_i}\alpha(X) + \sum_i (D_{e_i} D_X\alpha - D_X D_{e_i}\alpha)(e_i)$

$$= D^*D\alpha(X) + \underbrace{\alpha(Ric(X))}_{Ric(\alpha) \text{ par définition}}$$

$\blacksquare$