U P M C - Paris 6 **Master 2 de Mathématiques fondamentales**
Mathématiques **Automne 2013**

TD 1. Métriques riemanniennes.

Exercice 1. La sphère, en coordonnées stéréographiques.

On considère la sphère unité $\mathbb{S}^n$ *dans l'espace euclidien* $\mathbb{R}^{n+1}$ *:*

$$\mathbb{S}^n = \{(x_0, x_1, \ldots, x_n)/x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}.$$

Soient O *l'origine de* $\mathbb{R}^{n+1}$ *,* $N = (1, 0, \ldots, 0)$*,* $\mathcal{P}$ *l'hyperplan d'équation* $x_0 = 0$ *et* ϕ *l'application qui à un point* M *de* $\mathbb{S}^n \backslash \{N\}$ *associe l'unique point d'intersection entre la droite* (OM) *et l'hyperplan* $\mathcal{P}$*. En identifiant* $\mathcal{P}$ *à* $\mathbb{R}^n$*, on obtient ainsi une carte et donc des coordonnées* $y_1, \ldots, y_n$*.*

a. Faire un dessin.

b. Ecrire une formule pour ϕ, puis $\psi = \phi^{-1}$.

Soit g *la métrique riemannienne induite sur* $\mathbb{S}^n$ *par le produit scalaire de* $\mathbb{R}^{n+1}$*.*

c. En calculant $\psi^* g$, montrer que, dans la carte considérée, on a

$$g = 4\frac{dy_1^2 + \cdots + dy_n^2}{(1 + |y|^2)^2},$$

où $|y|^2 = y_1^2 + \cdots + y_n^2$.

d. Calculer la forme volume riemannienne associée à g, toujours dans cette carte.

Exercice 2. L'espace hyperbolique.

On considère l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{1,n}$ *: c'est* $\mathbb{R}^{n+1}$ *muni de la forme quadratique* $h = -dx_0^2 + dx_1^2 + \cdots + dx_n^2$*. On note*

$$H^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}/ - x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = -1 \text{ et } x_0 > 0\}.$$

Pour tout x *de* H^n*, on note* g_x *la restriction de* h *à l'espace tangent* $T_x H^n$*.*

a. Expliquer pourquoi g définit une métrique riemannienne sur H^n.

Soient $S = (-1, 0, \ldots, 0)$*,* $\mathcal{P}$ *l'hyperplan d'équation* $x_0 = 0$ *et* ϕ *l'application qui à un point* M *de* H^n *associe l'unique point d'intersection entre la droite* (OM) *et l'hyperplan* $\mathcal{P}$*. En identifiant* $\mathcal{P}$ *à* $\mathbb{R}^n$*, on obtient ainsi une carte, à valeurs dans la boule unité* $\mathbb{B}^n$ *de* $\mathbb{R}^n$*, et donc des coordonnées* $y_1, \ldots, y_n$*.*

b. Faire un dessin et écrire une formule pour ϕ.

c. Montrer que, dans la carte considérée, on a

$$g = 4\frac{dy_1^2 + \cdots + dy_n^2}{(1-|y|^2)^2}.$$

Si on note a le point $(-1,0,\ldots,0)$ *de* $\mathbb{R}^n$ *, alors l'inversion*

$$f\ :\ y \mapsto a + 2\frac{y-a}{|y-a|^2}$$

réalise un difféomorphisme de $\mathbb{B}^n$ *sur le demi-espace* $U = \{w \in \mathbb{R}^n / w_1 > 0\}$*.*

d. Montrer que dans les coordonnées données par $w = f(y)$, on a

$$g = \frac{dw_1^2 + \cdots + dw_n^2}{w_1^2}.$$

Exercice 3. Deux façons de voir un tore plat.

On définit une fonction $f\ :\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^n$ par $f(x_1,\ldots,x_n) = (e^{ix_1},\ldots,e^{ix_n})$. Montrer que f passe au quotient en une isométrie de $\mathbb{R}^n/(2\pi\mathbb{Z})^n$ sur $\mathbb{S}^1\times\cdots\times\mathbb{S}^1$.

Ici, $\mathbb{R}^n/(2\pi\mathbb{Z})^n$ *est muni de la métrique quotient (induite par la métrique euclidienne sur* $\mathbb{R}^n$*) et* $\mathbb{S}^1\times\cdots\times\mathbb{S}^1$ *de la métrique induite par le plongement dans l'espace euclidien* $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$*.*

Exercice 4. Caténoïde et hélicoïde.

On s'intéresse à deux surfaces de $\mathbb{R}^3$*. La caténoïde* $\mathcal{C}$ *est la surface paramétrée par*

$$c(t,\theta) = (\cosh t\cos\theta, \cosh t\sin\theta, t),$$

où $t \in \mathbb{R}$*,* $\theta \in \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$*, tandis que l'hélicoïde* $\mathcal{H}$ *s'obtient par*

$$h(t,u) = (u\cos t, u\sin t, t),$$

où cette fois t *et* u *décrivent* $\mathbb{R}$*. On munit* $\mathcal{C}$ *et* $\mathcal{H}$ *de la métrique induite par la métrique euclidienne de* $\mathbb{R}^3$*.*

Montrer qu'alors $\mathcal{C}$ et $\mathcal{H}$ sont localement isométriques (leurs métriques ont les mêmes expressions dans certaines coordonnées) mais pas isométriques.

Exercice 5. Existence, ou pas, de métriques lorentziennes.

a. Montrer qu'une variété M possède une métrique lorentzienne si et seulement si son fibré tangent contient un sous-fibré en droites.

b. En déduire que $\mathbb{S}^2$ ne porte pas de métrique lorentzienne.