TD 2. Connexions.

Exercice 1. Connexions : des constructions générales.

a. Montrer, en utilisant une partition de l'unité, que tout fibré vectoriel peut être muni d'une métrique et d'une connexion linéaire préservant cette métrique.

b. Soit E un fibré vectoriel sur une base M. Construire le fibré vectoriel naturel E^* dont chaque fibre est duale à la fibre correspondante de E. Montrer que si ∇ est une connexion sur E, alors on peut définir une connexion ∇^* sur E^* en demandant que pour $X \in \Gamma(TM)$, $\alpha \in \Gamma(E^*)$ et $s \in \Gamma(E)$, on ait

$$L_X\,(\alpha(s)) = (\nabla^*_X \alpha)(s) + \alpha(\nabla_X s).$$

Faire les constructions analogues pour $E \oplus F$, $\mathrm{End}(E, F)$, $E \otimes F$, où E et F sont des fibrés vectoriels sur une base M.

c. Soient (M, g) une variété riemannienne et N une sous-variété de M. Soit ∇ la connexion de Levi-Civita de M. Étant donnés $p \in N$ et $v \in T_pM$ on note v^T la composante de v selon T_pN dans la décomposition orthogonale $T_pM = T_pN \oplus (T_pN)^\perp$. Montrer qu'on définit bien une connexion linéaire sur TN en posant, pour $X, Y \in \Gamma(TN)$:

$$D_X Y := (\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y})^T,$$

où $\tilde{X}, \tilde{Y}$ sont des extensions locales de X, Y au voisinage du point de N où on calcule. Montrer que c'est la connexion de Levi-Civita de la métrique riemannienne induite sur N.

d. Montrer, à l'aide d'une connexion, que tout fibré vectoriel au-dessus d'un pavé $[0, 1]^n$ est trivial. Si maintenant on fixe une trivialisation du fibré (i.e. un champ de repères) au dessus du bord de $[0, 1]^n$, peut-on l'étendre en une trivialisation du fibré au dessus du pavé ?

e. Soient $f : M \to N$ lisse et $\pi : E \to N$ un fibré vectoriel. Définissons le tiré en arrière de E par

$$f^*E = \{(x, v) \in M \times E / f(x) = \pi(v)\}.$$

Vérifier que c'est naturellement un fibré vectoriel au-dessus de M et montrer que toute connexion sur E se tire en arrière en une connexion sur f^*E (on pourra par exemple décrire sa distribution horizontale). Montrer que si f_1 et f_2 sont deux applications homotopes de M dans N, alors les fibrés f_1^*E et f_2^*E sont isomorphes (on pourra utiliser une connexion sur F^*E où $F : [0, 1] \times M \to N$ est une homotopie.)

Exercice 2. Les géodésiques de la sphère.

On s'intéresse à la sphère unité $\mathbb{S}^n$ dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^{n+1}$.

a. En voyant la connexion de Levi-Civita de $\mathbb{S}^n$ comme induite par celle $\mathbb{R}^{n+1}$, montrer que les géodésiques sur $\mathbb{S}^n$ sont exactement les courbes $\gamma : I \to \mathbb{R}^{n+1}$ telles que $|\gamma| = 1$ et $\ddot{\gamma}$ est colinéaire à γ.

b. En déduire que, pour $p \in \mathbb{S}^n$ et $v \in T_p\mathbb{S}^n \backslash \{0\} \subset T_p\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$, la courbe paramétrée par

$$\gamma(t) = \cos(t|v|)p + \sin(t|v|)\frac{v}{|v|}$$

est la géodésique partant de p à vitesse v.

c. Retrouver ceci sans calcul, en utilisant l'action isométrique de $O(n+1)$ (et notamment la réflexion par rapport au plan contenant p et v).

Exercice 3. Les géodésiques de l'espace hyperbolique.

On s'intéresse à l'espace hyperbolique H^n, vu comme hyperboloïde dans l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{1,n}$.

a. Montrer que le groupe des isométries de l'espace hyperbolique agit transitivement sur l'espace tangent unitaire.

b. S'inspirer de l'exercice précédent pour décrire les géodésiques de H^n.

c. A quoi ressemblent-elles dans le modèle de la boule et du demi-espace ?

Exercice 4. Transport parallèle : des exemples.

a. On se place sur la sphère $\mathbb{S}^2$, munie de sa métrique standard. Décrire le transport parallèle le long d'un chemin partant du pôle Nord, suivant un méridien jusqu'à l'équateur, parcourant l'équateur sur une distance α, puis remontant vers le pôle Nord en suivant un méridien.

b. Etant donné $A \in GL_p(\mathbb{R})$, on considère le quotient E_A de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p$ par la relation d'équivalence $(t, x) \sim (t+1, Ax)$. Vérifier qu'on peut voir E_A comme un fibré vectoriel de rang p sur le cercle $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. A quelle condition sur A est-il trivial ? Vérifier que la connexion triviale sur le fibré trivial $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ induit une connexion sur $E_A \to \mathbb{S}^1$. Décrire son transport parallèle le long du cercle de base.