TD 3. Géodésiques et symétries.

Exercice 1. Champs de Killing.

Soit (M, g) une variété riemannienne et X un champ de vecteur sur M. On dit que X est un champ de Killing quand son flot ϕ_t est constitué d'isométries : $\phi_t^* g = g$ pour tout temps t.

a. Donner des exemples de champs de Killing de l'espace euclidien.

b. Soit X un champ de vecteur sur M, de flot ϕ_t. Montrer que la dérivée de Lie de g le long de X, définie par $\mathcal{L}_X g = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \phi_t^* g$, vérifie

$$\begin{aligned} \forall\, Y, Z \in \Gamma(TM), \quad (\mathcal{L}_X g)(Y, Z) &= \mathcal{L}_X(g(Y, Z)) - g(\mathcal{L}_X Y, Z) - g(Y, \mathcal{L}_X Z) \\ &= g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X). \end{aligned}$$

Indication : $(\phi_t^* g)(\phi_t^* Y, \phi_t^* Z) = \phi_t^*(g(Y, Z))$.

c. En déduire qu'un champ de vecteur X sur M est de Killing si et seulement si $g(\nabla_. X, .)$ est anti-symétrique.

d. Montrer que si X est un champ de Killing et c une géodésique, alors $\langle \dot{c}, X \rangle$ est constant le long de c.

Exercice 2. Métriques bi-invariantes sur un groupe de Lie.

1. *On rappelle qu'un groupe de Lie G est un groupe muni d'une structure de variété pour laquelle les opérations de groupes sont lisses. En particulier, on dispose, pour tout $a \in G$, des difféomorphismes $L_a : x \mapsto \gamma x$ et $R_a : x \mapsto xa$. On dit qu'un champ de tenseurs T est invariant à gauche (resp. à droite) si, pour tout $a \in G$, $L_a^* T = T$ (resp. $R_a^* T = T$).*

a. Montrer que tout groupe de Lie admet une métrique riemannienne invariante à gauche. Montrer que tout groupe de Lie compact admet une métrique riemannienne bi-invariante, i.e. invariante à gauche et à droite.

b. Soit X un champ de vecteurs invariant à gauche sur un groupe de Lie G. Soit ϕ_t son flot et $\gamma_X(t) = \phi_t(e)$, $t \in \mathbb{R}$. Expliquer la formule

$$\forall\, x \in G,\ \phi_t(x) = x\gamma_X(t) = L_x(\gamma_X(t)) = R_{\gamma_X(t)}(x).$$

c. Soit G un groupe de Lie, muni d'une métrique riemannienne bi-invariante g, de connexion de Levi-Civita ∇. Montrer que, pour tous les champs de vecteurs invariants à gauche X et Y, on a

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$$

(indication : on pourra utiliser la formule de Koszul et l'exercice 1). En déduire que les géodésiques sont données par les lignes intégrales des champs de vecteurs invariants à gauche.

2. *On considère l'exemple de $SO(n)$, muni de la métrique invariante à gauche g qui sur $T_{I_n}SO(n)$ (l'espace des matrices antisymétriques) est donnée par $g_I(A, B) = -\operatorname{Tr} AB$.*

a. Montrer que cette métrique est bi-invariante.

b. Montrer que l'exponentielle en l'identité est donnée par l'exponentielle matricielle :

$$\exp_{I_n} A = e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Exercice 3. Le groupe de Heisenberg.

1. *On s'intéresse au groupe de Heisenberg, vu comme sous-groupe de $GL_3(\mathbb{R})$:*

$$\mathcal{H} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Big/ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

a. Montrer que $\mathcal{H}$ est une sous-variété de dimension 3 de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et que l'espace tangent à $\mathcal{H}$ en la matrice identité I est donné par

$$T_I\mathcal{H} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & v_1 & v_3 \\ 0 & 0 & v_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Big/ v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

b. Montrer que si $V = \begin{pmatrix} 0 & v_1 & v_3 \\ 0 & 0 & v_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est un élément de $T_I\mathcal{H}$, alors

$$e^V = \begin{pmatrix} 1 & v_1 & v_3 + \dfrac{v_1 v_2}{2} \\ 0 & 1 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En particulier, c'est un élément de $\mathcal{H}$.

2. *On peut identifier $\mathcal{H}$ à $\mathbb{R}^3$ par la carte $\phi : \mathcal{H} \to \mathbb{R}^3$ qui à* $\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$ *associe $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. On notera ∂_{x_1}, ∂_{x_2}, ∂_{x_3} les champs de vecteurs associés à ces coordonnées. On introduit aussi les champs de vecteurs suivants sur $\mathcal{H}$:*

$$X_1 = \partial_{x_1}, \quad X_2 = \partial_{x_2} + x_1 \partial_{x_3}, \quad X_3 = \partial_{x_3}.$$

a. Montrer que ces champs de vecteurs sont invariants à gauche, fournissent une trivialisation globale du fibré tangent $T\mathcal{H}$ et que leurs crochets de Lie vérifient

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_2, X_3] = [X_3, X_1] = 0.$$

b. Soit g la métrique riemannienne sur $\mathcal{H}$ telle que (X_1, X_2, X_3) est une base orthonormée en tout point de $\mathcal{H}$ et soit ∇ la connexion de Levi-Civita associée. Montrer que :
- $\nabla_{X_i} X_i = 0$ pour $i = 1, 2, 3$;
- $\nabla_{X_1} X_2 = -\nabla_{X_2} X_1 = \dfrac{X_3}{2}$;
- $\nabla_{X_2} X_3 = \nabla_{X_3} X_2 = \dfrac{X_1}{2}$;
- $\nabla_{X_3} X_1 = \nabla_{X_1} X_3 = -\dfrac{X_2}{2}$.

c. Montrer qu'une courbe $c : \mathbb{R} \to \mathcal{H}$ est une géodésique si et seulement si $\phi \circ c = (c_1, c_2, c_3)$ vérifie le système

$$\begin{cases} \ddot{c}_1 + \dot{c}_2(\dot{c}_3 - c_1\dot{c}_2) = 0 \\ \ddot{c}_2 - \dot{c}_1(\dot{c}_3 - c_1\dot{c}_2) = 0 \\ \dfrac{d}{dt}(\dot{c}_3 - c_1\dot{c}_2) = 0 \end{cases}$$

d. Etant donné un vecteur $V = \begin{pmatrix} 0 & v_1 & v_3 \\ 0 & 0 & v_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in T_I\mathcal{H}$, on s'intéresse à la géodésique $c : t \mapsto \exp_I(tV)$, partant de I avec vecteur vitesse V.
- Montrer que si $v_3 = 0$, alors $c(t) = e^{tV}$.
- Montrer que si $v_3 \neq 0$, alors $t \mapsto (c_1(t), c_2(t))$ décrit un cercle dans le plan $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4. Surfaces de révolution.

On veut étudier les géodésiques d'une surface de révolution M dans $\mathbb{R}^3$. On désigne par (r, θ) les coordonnées polaires dans le plan horizontal Oxy, par z la coordonnée verticale. On peut décrire M par une équation du type $r = f(z)$ (où f est une fonction lisse strictement positive), mais on va préférer le paramétrage suivant : l'intersection de M avec le demi plan $\{y = 0, x \geq 0\}$ est une courbe, qu'on paramètre par sa longueur d'arc u.

a. Faire un dessin et montrer que dans les coordonnées (u, θ), la métrique g induite sur M par la métrique euclidienne de $\mathbb{R}^3$ s'écrit $g = du^2 + r(u)^2 d\theta^2$.

b. Soit c une géodésique unitaire (i.e. paramétrée par longueur d'arc) sur (M, g). En utilisant l'exercice 1, montrer que la quantité $C := r^2\dot{\theta}$ est constante le long de c ; on l'appelle "invariant de Clairaut" de c. En désignant par α l'angle entre $\dot{c}$ et $\frac{\partial}{\partial\theta}$, montrer que l'invariant de Clairaut s'écrit aussi $C = r\cos\alpha$.

c. Montrer que les géodésiques unitaires $c : t \mapsto (u(t), \theta(t))$ vérifient le système

$$\dot{\theta} = \frac{C}{r(u)^2}, \quad \dot{u}^2 = 1 - \frac{C^2}{r(u)^2}.$$

d. On appelle "méridiens" (resp. "parallèles") les courbes pour lesquelles $\theta(t)$ (resp. $u(t)$) est une constante. Déterminer les méridiens et parallèles qui sont des géodésiques.

e. Soit maintenant c une géodésique d'invariant de Clairaut C qui n'est ni un parallèle, ni un méridien. On suppose que $c(0)$ est dans une portion de M délimitée par deux parallèles consécutifs de même rayon $r = C$. Montrer que si ces deux parallèles ne sont pas géodésiques, alors c oscille entre eux. Que se passe-t-il si l'un de ces parallèles est une géodésique ?