TD 4. Synge, Berger et Gromov.

Exercice 1. Le théorème de Synge.

1. *Soit M une variété compacte, connexe, orientée, de dimension n* **paire***, munie d'une métrique riemannienne g de courbure sectionnelle strictement positive. Soit φ une isométrie de (M, g) qui préserve l'orientation. On va démontrer que φ possède un point fixe.*

a. Soit $F : M \to M$ l'application qui à un point p de M associe la distance entre p et $\varphi(p)$: $F(p) = d(p, \varphi(p))$. Vérifier qu'il existe un point p_0 où F atteint son minimum, ainsi qu'une géodésique minimisante $c_0 : [0, 1] \to M$ reliant p_0 à $\varphi(p_0)$.

b. Soit m_0 le milieu de c_0 : $m_0 = c_0(1/2)$. Montrer que le chemin obtenu en suivant c_0 de m_0 à $c_0(1) = \varphi(p_0)$, puis $\varphi \circ c_0$ de $\varphi(p_0)$ à $\varphi(m_0)$ est minimisant. En déduire que $d_{p_0}\varphi(\dot{c}_0(0)) = \dot{c}_0(1)$.

c. Soit $P : T_{p_0}M \to T_{\varphi(p_0)}M$ le transport parallèle le long de c_0. On considère l'endomorphisme $A = P^{-1} \circ d_{p_0}\varphi$ de $T_{p_0}M$. Montrer qu'il existe un élément v de $T_{p_0}M$ tel que $Av = v$ et $g_{p_0}(v, \dot{c}_0(0)) = 0$.

d. On étend v par transport parallèle en un champ de vecteurs X le long de c_0 : pour t dans $[0, 1]$, $X(t) \in T_{c_0(t)}M$ et $\nabla_{\dot{c}_0} X = 0$. On définit alors pour $t \in [0, 1]$ et s réel :

$$c_s(t) = c(s, t) = \exp_{c_0(t)} sX(t).$$

Montrer que, si $\varphi(p_0) \neq p_0$, alors

$$\frac{d^2}{ds^2}\Big|_{s=0} E(c_s) < 0,$$

où E désigne la fonctionnelle d'énergie.

e. En déduire que φ admet un point fixe.

2. *Application.* Démontrer le théorème de Synge : une variété compacte, orientable, de dimension paire et portant une métrique à courbure sectionnelle strictement positive est nécessairement simplement connexe.

Exercice 2. Les sphères de Berger s'effondrent sur la droite projective complexe.

1. *On va s'intéresser à une famille de métriques riemanniennes sur la sphère* $\mathbb{S}^3$. *On la voit dans* $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$, *dont on note les coordonnées complexes* $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$. *Voici trois champs de vecteurs sur* $\mathbb{R}^4$, *qu'on va restreindre à* $\mathbb{S}^3$ *:*

$$\begin{aligned}
X_1 &= \begin{pmatrix} iz_1 \\ iz_2 \end{pmatrix} = x_1 \frac{\partial}{\partial y_1} - y_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial y_2} - y_2 \frac{\partial}{\partial x_2}, \\
X_2 &= \begin{pmatrix} -\bar{z}_2 \\ \bar{z}_1 \end{pmatrix} = x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_1} - y_1 \frac{\partial}{\partial y_2}, \\
X_3 &= \begin{pmatrix} -i\bar{z}_2 \\ i\bar{z}_1 \end{pmatrix} = x_1 \frac{\partial}{\partial y_2} - y_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + y_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial y_1}.
\end{aligned}$$

a. Montrer qu'ils fournissent une trivialisation globale du fibré tangent à $\mathbb{S}^3$ et que leurs crochets de Lie vérifient $[X_1, X_2] = -2X_3$, $[X_2, X_3] = -2X_1$ et $[X_3, X_1] = -2X_2$.

Les sphères de Berger sont les variétés riemanniennes $(\mathbb{S}^3, g_\lambda)$ *définies par*

$$g_\lambda = \lambda^2 \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2,$$

où λ *est un paramètre strictement positif et* $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ *est la trivialisation de* $T^*\mathbb{S}^3$ *duale à* (X_1, X_2, X_3).

b. Montrer que le volume de $(\mathbb{S}^3, g_\lambda)$ tend vers zéro quand λ tend vers zéro.

c. Décrire le flot ϕ_t de X_1 et montrer que X_1 est un champ de Killing pour toutes les métriques g_λ.

Soit π *la projection canonique* $\mathbb{S}^3 \to \mathbb{C}P^1$ *(qui à* z *associe la droite complexe passant par* z*). La métrique de Fubini-Study* $g_{\mathbb{C}P^1}$ *sur* $\mathbb{C}P^1$ *est la métrique quotient induite par* g_1 *:*

$$\forall\, v, w \in (\ker d_p\pi)^{\perp_{g_1}}, \quad g_{\mathbb{C}P^1}(d_p\pi(v), d_p\pi(w)) = g_1(v, w).$$

d. Vérifier que cela a un sens et que, en fait, toutes les métriques de Berger g_λ induisent la même métrique au quotient, $g_{\mathbb{C}P^1}$.

e. Etant donné $p \in \mathbb{C}P^1$, calculer la longueur de la fibre $\pi^{-1}(\{p\})$ pour la métrique g_λ.

f. Soit ∇^λ la connexion de Levi-Civita de g_λ. Expliquer pourquoi on a

$$\forall i, j, k \in \{1, 2, 3\}, \quad g_\lambda\left(\nabla^\lambda_{X_i} X_j, X_k\right) = -g_\lambda\left(\nabla^\lambda_{X_i} X_k, X_j\right),$$

puis calculer $\nabla^\lambda X_1$, $\nabla^\lambda X_2$ et $\nabla^\lambda X_3$.

g. Montrer que le rayon d'injectivité de $(\mathbb{S}^3, g_\lambda)$ tend vers zéro quand λ tend vers zéro.

h. Calculer la courbure sectionnelle des plans $\mathrm{Vect}(X_1, X_2)$ et $\mathrm{Vect}(X_2, X_3)$ pour g_λ, puis l'ensemble des valeurs prises par la courbure sectionnelle sur $(\mathbb{S}^3, g_\lambda)$.

2. *Glissons ici une définition un peu générale. Si (X, d_X) et (Y, d_Y) sont deux espaces métriques compacts et ϵ un nombre positif, on dira que $f : X \to Y$ est une ϵ-approximation quand les deux propriétés suivantes sont vérifiées :*
– pour tout $y \in Y$, il y a un $x \in X$ tel que $d_Y(f(x), y) \leq \epsilon$;
– pour tous $x, x' \in X$, $|d_Y(f(x), f(x')) - d_X(x, x')| \leq \epsilon$
(on ne demande même pas à f d'être continue). On dira qu'une suite d'espaces métriques compacts X_i converge au sens de Gromov-Hausdorff vers X_∞ s'il existe des ϵ_i-approximations $f_i : X_i \to X_\infty$ telles que (ϵ_i) tende vers zéro.

a. Montrer que si (M, g) est une variété riemannienne compacte connexe et P l'espace métrique constitué d'un seul point, alors $(M, \lambda_i\, g)$ converge vers P au sens de Gromov-Hausdorff, pour toute suite (λ_i) tendant vers zéro.

b. Soit (M, g) une variété riemannienne compacte connexe. Construire une suite de métriques riemanniennes g_i sur $M \times \mathbb{T}^m$ qui converge vers (M, g) au sens de Gromov-Hausdorff et dont la courbure sectionnelle reste uniformément bornée.

On dit qu'une suite de variétés riemanniennes (M_i^n, g_i) s'effondre quand elle converge vers une variété riemannienne de dimension strictement inférieure en gardant une courbure uniformément bornée. On va voir que les sphères de Berger offrent une occurrence assez naturelle de ce phénomène.

c. Soit $x \in \mathbb{S}^3$ et soit $\gamma : [0, L] \to \mathbb{C}P^1$ un chemin tel que $\gamma(0) = \pi(x)$. Montrer qu'il existe un unique chemin $\widehat{\gamma} : [0, L] \to \mathbb{S}^3$ tel que $\widehat{\gamma}(0) = x$, $\pi \circ \widehat{\gamma} = \gamma$ et $\dfrac{d\widehat{\gamma}(t)}{dt} \in \mathrm{Vect}(X_2, X_3)$. Quelle est la longueur de $\widehat{\gamma}$ pour g_λ ?

d. Montrer que les sphères de Berger s'effondrent sur la droite projective complexe.