U P M C - Paris 6 **Master 2 de Mathématiques fondamentales**
Mathématiques **Automne 2013**

TD 5. Courbures.

Exercice 1. La courbure des espaces modèles.

1. *On se place sur la sphère unité $\mathbb{S}^n$ de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, munie de la métrique induite. Etant donné un point p de $\mathbb{S}^n$ et un vecteur unitaire v de $T_p\mathbb{S}^n$, on a vu que la géodésique émanant de p à vitesse v est donnée par la formule $\gamma(t) = \exp_p(tv) = \cos t\, p + \sin t\, v$.*

a. Soit w un vecteur unitaire de $T_p\mathbb{S}^n$, orthogonal à v. Ecrire le champ de Jacobi $J(t)$ associé à la variation géodésique de γ définie par

$$\gamma_s(t) = \cos t\, p + \sin t\,(\cos s\, v + \sin s\, w)$$

et calculer $J'' = \nabla_{\dot\gamma}\nabla_{\dot\gamma} J$.

b. A l'aide de l'équation de Jacobi, en déduire que la courbure sectionnelle de la sphère est constante à 1.

2. Montrer de même que l'espace euclidien est de courbure sectionnelle constante à 0 et que l'espace hyperbolique est de courbure sectionnelle constante à -1.

Exercice 2. La courbure d'une métrique bi-invariante.

1. *Soit (G, g) un groupe de Lie muni d'une métrique riemannienne bi-invariante.*

a. Montrer que la courbure sectionnelle de (G, g) vérifie

$$\mathrm{Sect}(X \wedge Y) = \frac{1}{4}\,|[X, Y]|_g^2\,,$$

où X et Y sont deux champs de vecteurs invariants à gauche, unitaires et orthogonaux entre eux.

b. Calculer la courbure de Ricci.

2. En déduire que $SL(n, \mathbb{R})$ ne porte pas de métrique riemannienne bi-invariante.

Exercice 3. Seconde forme fondamentale.

Soit (M^{n+1}, g) *une variété riemannienne et* N^n *une sous-variété, qu'on munit de la métrique induite. On notera* ∇^M *et* ∇^N *les connexions de Levi-Civita en jeu. Supposons enfin qu'il existe un champ de vecteur unitaire normal* ν *le long de* N *: pour tout point* x *de* N*,* ν_x *est un vecteur unitaire de* T_xM *qui est orthogonal à* T_xN*. La seconde forme fondamentale de* N *est définie, pour tous vecteurs* u*,* v *de* T_xN *par la formule :*

$$\mathbb{I}(u, v) = g(\nabla^M_u \nu, v).$$

a. Montrer que si X et Y sont des champs de vecteurs sur M qui sont tangents à N le long de N, alors

$$\nabla^M_X Y = \nabla^N_X Y - \mathbb{I}(X, Y)\nu$$

le long de N.

b. Montrer que la seconde forme fondamentale de N est un champ de formes bilinéaires symétriques sur TN.

c. Montrer que la seconde forme fondamentale de N est nulle si et seulement si toute géodésique tangente en un point à N est incluse dans N. *Une telle sous-variété est dite totalement géodésique.*

d. Montrer que l'application définie par

$$\psi(t, x) = \exp_x(t\nu)$$

établit un difféomorphisme entre un voisinage de $\{0\} \times N$ dans $\mathbb{R} \times N$ et un voisinage de N dans M. Montrer qu'en posant $\psi_t = \psi(t, .)$ et $g_t = \psi_t^* g$, on a $\mathbb{I} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_t}{\partial t}\Big|_{t=0}$.

e. A l'aide du **d**, interpréter géométriquement la courbure moyenne de N, définie par $H = \mathrm{Tr}_{g_N} \mathbb{I}$.

f. Montrer que les courbures sectionnelles de M et N sont reliées par la formule

$$\mathrm{Sect}_M(X \wedge Y) = \mathrm{Sect}_N(X \wedge Y) + \mathbb{I}(X, Y)^2 - \mathbb{I}(X, X)\mathbb{I}(Y, Y),$$

où X et Y sont des vecteurs unitaires tangents à N et perpendiculaires entre eux.

g. Expliciter tout ça sur la sphère standard $\mathbb{S}^n$, vue dans $\mathbb{R}^{n+1}$.