TD 6. Le laplacien de Hodge.

Exercice 1. Elliptiques ?

Calculer le symbole principal des opérateurs différentiels suivants. Sont-ils elliptiques ?

1. La différentielle extérieure d sur les formes différentielles d'une variété M.
2. L'adjoint d^* de d, le laplacien $\Delta = dd^* + d^*d$, l'opérateur $d + d^*$ sur les formes différentielles d'une variété riemannienne (M, g).
3. Les opérateurs $\dfrac{\partial}{\partial z}$ et $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$ sur les fonctions lisses de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 2. Calculs avec le théorème de Hodge.

1. a. Calculer le laplacien $\Delta = dd^* + d^*d$ sur un tore plat $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ (dans les coordonnées standards, induites par le quotient).

b. En déduire la cohomologie de De Rham d'un tore.

2. a. Montrer que si G est un groupe de Lie connexe agissant par isométries sur une variété riemannienne compacte M, alors tout élément γ de G fixe toute forme harmonique α : $\gamma^*\alpha = \alpha$ (on observera d'abord que γ fixe toutes les classes de cohomologie de De Rham).

b. Vérifier que $SO(n)$ ne fixe aucune k-forme extérieure non-triviale sur $\mathbb{R}^n$ si $0 < k < n$.

c. En déduire la cohomologie de De Rham d'une sphère.