CORRIGÉ (sauf questions (xiv) et (xv) de l'Exercice).

M2 MATHS FONDAMENTALES UPMC 2013-2014
COURS FONDAMENTAL I "GÉOMÉTRIE RIEMANNIENNE"

(V. MINERBE, A. OANCEA)

EXAMEN DU 17 DÉCEMBRE 2013

DURÉE : 4H

Les notes de cours sont autorisées. Les moyens électroniques ne sont pas autorisés. La clarté et la précision de la rédaction seront appréciées.

Le sujet comporte quelques questions courtes et un exercice. Les réponses aux questions courtes admettent des justifications courtes.

Questions courtes.

1. Peut-on munir $S^2 \times S^1$ d'une métrique riemannienne à courbure sectionnelle K strictement positive $(K > 0)$? Strictement négative ? Positive $(K \geq 0)$? Négative ?

2. Soit γ une géodésique minimisante. Quel est son indice ?

3. Soit (M, g) une variété riemannienne orientée. Montrer que la forme volume est harmonique.

4. Existe-t-il une connexion linéaire de courbure nulle sur TS^2 ? Et sur TS^3 ?

5. Sur S^2 on considère l'opérateur $P = d + d^* : \Omega^0(S^2) \oplus \Omega^2(S^2) \to \Omega^1(S^2)$. On suppose connu le fait qu'il soit elliptique. Calculer

$$\dim \ker P - \dim \operatorname{coker} P.$$

Exercice.

Dans cet exercice on étudie différentes notions riemanniennes dans l'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^n$. Le point de vue que nous utiliserons en particulier sera de regarder $\mathbb{C}P^n$ comme quotient de la sphère unité $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ par l'action du cercle $e^{i\theta} \cdot (z_0, \ldots, z_n) := (e^{i\theta} z_0, \ldots, e^{i\theta} z_n)$.

Notations. Un point de $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ est noté z, la classe correspondante dans $\mathbb{C}P^n$ est notée $[z]$. On note $f : S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$ la projection. Si z est dans S^{2n+1}, $V_z := \ker df(z)$ est la distribution verticale. *On appelle* distribution horizontale *son orthogonal $H_z := V_z^\perp$ dans $T_z S^{2n+1}$, au sens de la métrique standard. Enfin, on note S_z l'orbite du point $z \in S^{2n+1}$ sous l'action du cercle.*

(i) Expliquer pourquoi la métrique standard de S^{2n+1} induit une métrique sur $\mathbb{C}P^n$ telle que $df : H_z \to T_{[z]}\mathbb{C}P^n$ est une isométrie.

Dans la suite, on munit $\mathbb{C}P^n$ de cette métrique, dite "de Fubini-Study".

(ii) Montrer que $SU(n+1)$ agit transitivement et par isométries sur $\mathbb{C}P^n$.

(iii) **(Structure complexe)** Pour $z \in S^{2n+1}$, montrer que $V_z = TS_z = \mathbb{R}\, iz$ et $H_z = T_z S^{2n+1} \cap i T_z S^{2n+1}$. Montrer que la multiplication par i induit une section du fibré $\mathrm{End}(H)$, puis une section J du fibré $\mathrm{End}(T\mathbb{C}P^n)$ telle que $J^2 = -\mathrm{Id}$.

Etant donné $X \in \Gamma(T\mathbb{C}P^n)$, on note $\tilde{X} \in \Gamma(TS^{2n+1})$ son relevé horizontal : $df(\tilde{X}) = X$ et, pour tout z dans S^{2n+1}, $\tilde{X}(z) \in H_z$.

(iv) Montrer que si X, $Y \in \Gamma(T\mathbb{C}P^n)$, alors $[\tilde{X}, \tilde{Y}] - \widetilde{[X,Y]}$ est vertical. Montrer que si Z est un champ de vecteurs vertical sur S^{2n+1}, alors $[\tilde{X}, Z]$ est aussi vertical.

On note respectivement $\tilde{D}$ et D les connexions de Levi-Civita sur S^{2n+1} et $\mathbb{C}P^n$.

(v) **(Calcul de la connexion)** Démontrer l'identité

$$\tilde{D}_{\tilde{X}}\tilde{Y} = \widetilde{D_X Y} + \frac{1}{2}[\tilde{X}, \tilde{Y}]^v.$$

Le dernier terme désigne la projection orthogonale de $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ sur la distribution verticale V. En particulier,

$$D_X Y = df(\tilde{D}_{\tilde{X}}\tilde{Y}).$$

(vi) **(Condition de Kähler)** Montrer que J est parallèle, c'est-à-dire $DJ = 0$.

(vii) **(Transport parallèle)** Soit γ une courbe dans $\mathbb{C}P^n$ et $\tilde{\gamma}$ un relevé horizontal. Montrer qu'un champ de vecteurs X le long de γ est parallèle si et seulement si son relevé horizontal $\tilde{X}$ le long de $\tilde{\gamma}$ est à dérivée covariante verticale.

(viii) **(Longueur)** Soit $\tilde{\gamma}$ une courbe dans S^{2n+1}. Montrer que $L(f \circ \tilde{\gamma}) \le L(\tilde{\gamma})$ et caractériser le cas d'égalité.

(ix) **(Géodésiques)** Montrer que γ est une géodésique dans $\mathbb{C}P^n$ si et seulement si elle est la projection d'une géodésique horizontale dans S^{2n+1}. En déduire une description explicite.

(x) **(Champs de Jacobi)** Soit $\gamma(t)$, $t \in \mathbb{R}$ une géodésique paramétrée par la longueur de l'arc dans $\mathbb{C}P^n$ et $(X_1(t), \ldots, X_{2n}(t))$ un repère parallèle orthonormé le long de γ tel que

$$X_1(0) = \dot{\gamma}(0), \qquad X_2(t) = JX_1(t).$$

En utilisant la connaissance explicite des géodésiques de $\mathbb{C}P^n$, montrer que l'espace des champs de Jacobi le long de γ qui s'annulent en 0 est engendré par

$$Y_1(t) = tX_1(t), \qquad Y_2(t) = \frac{\sin 2t}{2} X_2(t), \qquad Y_k(t) = \sin t X_k(t),\ k \ge 3.$$

En déduire que l'espace des champs de Jacobi le long de γ dont la dérivée en 0 est nulle est engendré par

$$Z_1(t) = X_1(t), \qquad Z_2(t) = \cos 2t X_2(t), \qquad Z_k(t) = \cos t X_k(t),\ k \ge 3.$$

(xi) **(Courbure)** Soit K la courbure sectionnelle de la métrique de Fubini-Study. Montrer l'inégalité $1 \le K \le 4$. Montrer que toute valeur dans $[1, 4]$ est atteinte.

(xii) **(Cut-locus)** Montrer que toute géodésique issue d'un point $p \in \mathbb{C}P^n$ rencontre le cut-locus de p à distance $\pi/2$. Montrer que le cut-locus est une sous-variété lisse de $\mathbb{C}P^n$, isométrique à $\mathbb{C}P^{n-1}$.

(xiii) **(Volume)** Montrer que le volume de $\mathbb{C}P^n$ est égal au volume de la boule unité dans $\mathbb{C}^n$. Montrer que l'aire de toute droite complexe $\mathbb{C}P^1 \subset \mathbb{C}P^n$ vaut π.

(xiv) **(Retour sur les géodésiques)** Montrer que la géodésique $\gamma_u = \exp_p(tu)$, $t \in \mathbb{R}$, dans $\mathbb{C}P^n$ est caractérisée comme suit lorsque $u \neq 0$: il existe une unique droite complexe $d_u \subset \mathbb{C}P^n$ tangente à u, isométrique à une sphère de courbure constante égale à 4, et γ_u est la géodésique de d_u qui est tangente à u.

(xv) **(Cercles)** Montrer que la projection de tout cercle géodésique sur S^{2n+1} est un cercle sur une droite complexe de $\mathbb{C}P^n$. Par "cercle sur une droite complexe d de $\mathbb{C}P^n$" on entend l'intersection de la sphère ronde dans $\mathbb{R}^3$ qui est isométrique à d avec un 2-plan affine réel.

Corrigé de l'examen de Géométrie Riemannienne

17 décembre 2013 – M2 MATHS FONDA (UPMC)

(A. Oancea)

Questions courtes

(1.) Existe-t-il sur $S^2 \times S^1$ une métrique à courbure sectionnelle

• $K > 0$? NON. En effet, la courbure serait alors bornée inférieurement par une cte > 0 par compacité et, par le thm. de Bonnet, on obtiendrait $\pi_1(S^2 \times S^1)$ fini. Or $\pi_1(S^2 \times S^1) \simeq \mathbb{Z}$.

• $K < 0$? NON. Le théorème de Cartan-Hadamard impliquerait que
$K \leq 0$? le revêtement universel de $S^2 \times S^1$ est $\mathbb{R}^3$.
Or le revêtement universel de $S^2 \times S^1$ est $S^2 \times \mathbb{R}$.

• $K \geq 0$? OUI. Il suffit de munir S^2 d'une métrique à courbure sectionnelle > 0, munir S^1 d'une métrique quelconque, et munir $S^2 \times S^1$ de la <u>métrique produit</u>. Sur un 2-plan engendré par deux directions tangentes à S^2 et à S^1, $K = 0$, alors que sur un 2-plan tangent à S^2 : $K > 0$.

(2) L'indice d'une géodésique minimisante est nul. (dans le cas contraire on pourrait la déformer à extrémités fixées par des courbes de longueur strictement plus petite).

③ La forme volume v_g vérifie par définition

$$v_g = *1$$

Alors $\Delta v_g = \Delta * 1 = * \underbrace{\Delta 1}_{0} = 0$.

④ Existe-t-il une connexion linéaire de courbure nulle sur

• TS^2 ? NON. Puisque S^2 est simplement connexe, cela impliquerait que TS^2 est trivial (on fixe un point $p \in S^2$ et on trivialise TS^2 par transport parallèle le long de chemins quelconques

$$S^2 \times T_p S^2 \xrightarrow{\Phi} TS^2$$

$$(q, v) \longmapsto \tau_\gamma(v) \quad \text{où } \gamma : [0,1] \to S^2$$

chemin joignant de p à q.

Cette flèche est bien définie si la courbure est nulle.

Par ailleurs TS^2 n'est pas trivial (thm de la boule chevelue)

• TS^3 ? OUI. On sait que TS^3 est trivial (si on regarde S^3 comme la sphère unité des quaternions $\mathbb{H}$, alors $p \longmapsto (ip, jp, kp)$ est un repère orthonormé global).

Or tout fibré trivial possède une connexion dont la courbure est nulle : la différentielle extérieure sur les fct sur la base.

(5) Par définition $\operatorname{coker} P = \Omega^1(S^2)/\operatorname{im} P$

L'ellipticité entraîne alors par le thm. décomposition de Hodge abstrait que

$$\operatorname{coker} P \simeq \ker \underbrace{P^*}_{= d+d^*} : \Omega^1 \longrightarrow \Omega^0 \oplus \Omega^2$$

L'on a $\dim \ker P = \dim \ker d + d^* : \Omega^0 \oplus \Omega^2 \to \Omega^1$

$= \dim(\ker d \cap \ker d^* \subseteq \Omega^0 \oplus \Omega^2)$ puisque $\operatorname{im} d \perp \operatorname{im} d^*$

$= \dim \ker \Delta : \Omega^0 \oplus \Omega^2 \circlearrowleft$

$= \dim H^0(S^2) + \dim H^2(S^2)$ (par thm. Hodge)

Par ailleurs $\dim \ker d + d^* : \Omega^1 \longrightarrow \Omega^0 \oplus \Omega^2 = \dim(\ker d \cap \ker d^* \subseteq \Omega^1)$

$= \dim \ker \Delta : \Omega^1 \circlearrowleft$

$= \dim H^1(S^2)$ par thm Hodge.

Ainsi $\boxed{\dim \ker P - \dim \operatorname{coker} P = \chi(S^2) = 2}$

NB : Ceci est vrai pour toute variété compacte orientée sans bord

$$\operatorname{ind}\left(d + d^* : \Omega^{\text{pair}}(M) \longrightarrow \Omega^{\text{impair}}(M)\right) = \chi(M).$$

Exercice

(i) Le cercle S^1 agit sur S^{2n+1} par isométries (restriction à S^{2n+1} d'isométrie de $\mathbb{C}^{n+1}$)

et préserve la distribution horizontale (puisqu'il préserve la distrib. verticale).

La restriction de la métrique de S^{2n+1} à H passe alors au quotient, et par définition $df : H_z \longrightarrow T_{[z]}\mathbb{C}P^n$ isométrie.

(ii) $SU(n+1)$ agit transitivement sur S^{2n+1} par isométries, et cette action commute avec celle de S^1.

Donc $SU(n+1)$ agit sur le quotient par isométries.

(iii) Puisque f est une submersion, $TS_z = \ker df(z) = V_z$.

- Le rang de V_z est égal à $1 = \dim S^{2n+1} - \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}P^n$

et clairement $iz \in V_z$: $\left.\frac{d}{d\theta}\right|_{\theta=0} e^{i\theta}\cdot z = iz$. Donc $V_z = \mathbb{R}iz$.

- $H_z \subseteq T_z S^{2n+1} \subseteq \mathbb{R}^{2n+2}$ est de dimension $2n$.

$T_z S^{2n+1} \cap iT_z S^{2n+1} \subseteq \mathbb{R}^{2n+2}$ est de dimension $2n$ (intersection transverse de deux hyperplans)

et est orthogonal à iz, puisque $T_z S^{2n+1} = z^{\perp}$.

Donc $T_z S^{2n+1} \cap iT_z S^{2n+1} \subseteq H_z$ et on a égalité pour des raisons de dim.

- Clairement $T_z S^{2n+1} \cap iT_z S^{2n+1}$ est stable par i. Donc i induit

section de $\mathrm{End}(H)$. Puisque i commute avec la différentielle de l'action

de S^1, elle descend en une section $J \in \Gamma(\mathrm{End}\, T\mathbb{C}P^n)$.
Clairement $J^2 = -\mathrm{Id}$ car $i^2 = -\mathrm{Id}$.

(iv) On a $df[\tilde{X}, \tilde{Y}] = [df.\tilde{X}, df.\tilde{Y}] = [X, Y]$

donc $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ diffère de $\widetilde{[X,Y]}$ par un champ vertical.

Aussi $df[\tilde{X}, Z] = [df.\tilde{X}, \underbrace{df.Z}_{0}] = 0$, donc $[\tilde{X}, Z]$ vertical.

(v) Il est clair que l'identité

$$\tilde{D}_{\tilde{X}} \tilde{Y} = \widetilde{D_X Y} + \frac{1}{2}[\tilde{X}, \tilde{Y}]^v \qquad (*)$$

implique $D_X Y = df(\widetilde{D_X Y}) = df(\tilde{D}_{\tilde{X}} \tilde{Y})$.

(cf. cours)

Pour démontrer $(*)$ rappelons-nous la formule explicite pour la connexion de Levi-Civita, en termes de la métrique g et du crochet :

$$g(D_X Y, Z) = \frac{1}{2}\Big[X.g(Y,Z) + Y.g(Z,X) - Z.g(X,Y) + g([X,Y],Z) - g([X,Z],Y) - g([Y,Z],X) \Big].$$

Ici g désigne la métrique sur $\mathbb{C}P^n$, et X, Y, Z sont des champs de vecteurs sur $\mathbb{C}P^n$. Soit $\tilde{g}$ la métrique sur S^{2n+1}.

Alors, par définition du relevé horizontal, on a :

$$\tilde{g}(\widetilde{D_X Y}, \tilde{Z}) = \frac{1}{2}\Big[\tilde{X}\cdot\tilde{g}(\tilde{Y},\tilde{Z}) + \tilde{Y}\cdot\tilde{g}(\tilde{Z},\tilde{X}) - \tilde{Z}\cdot\tilde{g}(\tilde{X},\tilde{Y})$$
$$+\tilde{g}(\widetilde{[X,Y]},\tilde{Z}) - \tilde{g}(\widetilde{[X,Z]},\tilde{Y}) - \tilde{g}(\widetilde{[Y,Z]},\tilde{X})\Big]$$

Par ailleurs

$$\tilde{g}(\tilde{D}_{\tilde{X}}\tilde{Y}, \tilde{Z}) = \frac{1}{2}\Big[\tilde{X}\cdot\tilde{g}(\tilde{Y},\tilde{Z}) + \tilde{Y}\cdot\tilde{g}(\tilde{Z},\tilde{X}) - \tilde{Z}\cdot\tilde{g}(\tilde{X},\tilde{Y})$$
$$+\tilde{g}([\tilde{X},\tilde{Y}],\tilde{Z}) - \tilde{g}([\tilde{X},\tilde{Z}],\tilde{Y}) - \tilde{g}([\tilde{Y},\tilde{Z}],\tilde{X})\Big]$$

Puisque $[\tilde{X},\tilde{Y}]$ diffère de $\widetilde{[X,Y]}$ par un terme vertical, les deux membres de droite dans les deux identités ci-dessus sont égaux. Donc

$$\tilde{g}(\widetilde{D_X Y}, \tilde{Z}) = \tilde{g}(\tilde{D}_{\tilde{X}}\tilde{Y}, \tilde{Z}) \quad , \forall \tilde{Z}$$

ce qui montre que les parties horizontales de $\widetilde{D_X Y}$ et $\tilde{D}_{\tilde{X}}\tilde{Y}$ sont les mêmes.

Pour déterminer la différence entre les parties verticales il suffit de tester contre des champs de vecteurs verticaux W :

$$\tilde{g}(\widetilde{D_X Y}, W) = 0 \quad \text{par définition},$$

alors que

car $\tilde{g}(\tilde{X},\tilde{Y})$ invariant par l'action du cercle et W est multiple de iz.

$$\tilde{g}(\tilde{D}_{\tilde{X}}\tilde{Y}, W) = \frac{1}{2}\Big[\cancel{\tilde{X}\cdot\tilde{g}(\overset{0}{\tilde{Y},W})} + \cancel{\tilde{Y}\cdot\tilde{g}(\overset{0}{W,\tilde{X}})} - \overset{=0}{\cancel{W\cdot\tilde{g}(\tilde{X},\tilde{Y})}}$$
$$+\tilde{g}([\tilde{X},\tilde{Y}],W) - \underbrace{\cancel{\tilde{g}([\tilde{X},W],\tilde{Y})}}_{\text{horizontal}\ =0} - \underbrace{\cancel{\tilde{g}([\tilde{Y},W],\tilde{X})}}_{=0}\Big]$$

Donc $\tilde{g}\left(\tilde{D}_{\tilde{X}}\tilde{Y} - \widetilde{D_X Y}, W\right) = \tilde{g}\left(\frac{1}{2}[\tilde{X},\tilde{Y}], W\right)$

$\forall W$ vertical.

ce qui montre que $\tilde{D}_{\tilde{X}}\tilde{Y} - \widetilde{D_X Y} = \frac{1}{2}[\tilde{X},\tilde{Y}]^v$ en vue du fait que les parties horizontales sont les mêmes. ∎

(vi) Preuve de $DJ = 0$. Rappel de la définition de DJ :

$$(D_X J)(Y) = D_X(JY) - J D_X Y .$$

Alors
$$\widetilde{(D_X J)(Y)} = \widetilde{D_X(JY)} - \widetilde{J D_X Y}$$

Par définition $\tilde{J}\tilde{X} = i\tilde{X}$

$$= \tilde{D}_{\tilde{X}}(\widetilde{JY}) - \frac{1}{2}[\tilde{X}, \widetilde{JY}]^v - i\,\widetilde{D_X Y}$$

$$= \tilde{D}_{\tilde{X}}(i\tilde{Y}) - \frac{1}{2}[\tilde{X}, i\tilde{Y}]^v - i\left(\tilde{D}_{\tilde{X}}\tilde{Y} - \frac{1}{2}[\tilde{X},\tilde{Y}]^v\right)$$

Notons $\tilde{D}^{\mathbb{C}^{n+1}}$ la connexion sur $\mathbb{C}^{n+1}$

$$= \underbrace{\tilde{D}^{\mathbb{C}^{n+1}}_{\tilde{X}}(i\tilde{Y}) - i\,\tilde{D}^{\mathbb{C}^{n+1}}_{\tilde{X}}\tilde{Y}}_{} - \left(\tilde{D}^{\mathbb{C}^{n+1}}_{\tilde{X}}(i\tilde{Y})\right)^{\perp TS^{2n+1}} + i\left(\tilde{D}^{\mathbb{C}^{n+1}}_{\tilde{X}}\tilde{Y}\right)^{\perp TS^{2n+1}}$$

$$\underbrace{\left(\tilde{D}^{\mathbb{C}^{n+1}}_{\tilde{X}}\, i\right)\tilde{Y}}_{} \qquad - \frac{1}{2}[\tilde{X}, i\tilde{Y}]^v + \frac{1}{2}\, i\,[\tilde{X},\tilde{Y}]^v$$

$= 0$ car i constante sur $\mathbb{C}^{n+1}$, muni de la métrique euclidienne constante.

$$\in \mathrm{Vect}\langle z, iz\rangle .$$

Mais $\widetilde{(D_X J)Y} \in \mathrm{Vect}\langle z, iz\rangle^{\perp}$, donc

$\widetilde{(D_X J)Y} = 0$, ou encore $(D_X J)\,Y = 0 \quad \forall X, Y$. ∎

[REMARQUE : Le point clé était le fait que
$$\widetilde{D}c^{n+1}{}_i = 0$$
].

(vii) $\dot{\tilde{\gamma}}$ est un relevé horizontal de $\dot{\gamma}$ le long de $\tilde{\gamma}$.

Alors $D_{\dot{\gamma}} X \underset{(v)}{=} df\left(\widetilde{D}_{\dot{\tilde{\gamma}}} \widetilde{X}\right) = 0$ ssi $\widetilde{D}_{\dot{\tilde{\gamma}}} \widetilde{X}$ vertical.

(viii) Pour tout vecteur $W \in TS^{2n+1}$ on a $|df(W)| = |\underbrace{W^h}_{\text{projection sur } H}| \leq |W|$

avec égalité ssi W horizontal.

Alors $L(f \circ \tilde{\gamma}) = \int |df \cdot \dot{\tilde{\gamma}}|\, dt \leq \int |\dot{\tilde{\gamma}}|\, dt = L(\tilde{\gamma})$

avec égalité ssi $\dot{\tilde{\gamma}}$ horizontal i.e. $\tilde{\gamma}$ horizontale.

(ix) Soit γ une courbe dans $\mathbb{C}P^n$ et $\tilde{\gamma}$ un relevé horizontal dans S^{2n+1}.

Alors $\widetilde{D}_{\dot{\tilde{\gamma}}} \dot{\tilde{\gamma}} = \widetilde{D_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}} + \frac{1}{2} \underbrace{[\dot{\tilde{\gamma}}, \dot{\tilde{\gamma}}]^v}_{0} = \widetilde{D_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}}$

Donc γ géodésique ssi $D_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$ ssi $\widetilde{D_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}} = 0$ ssi $\widetilde{D}_{\dot{\tilde{\gamma}}} \dot{\tilde{\gamma}} = 0$
ssi $\tilde{\gamma}$ géodésique. ∎

Description explicite : Soit $z \in S^{2n+1}$. La géodésique

$$t \longmapsto \exp_z(t\tilde{u}) \quad , \quad |\tilde{u}| = 1 \quad , \quad \tilde{u} \perp z \qquad (\tilde{u} \in \mathbb{R}^{2n+2})$$

est de la forme
$$\exp_z(t\tilde{u}) = \cos t \cdot z + \sin t \cdot \tilde{u} \overset{\text{not.}}{=\!=} \tilde{\gamma}(t)$$

Elle est horizontale ssi $\tilde{u} \in H_z$. En effet, ceci est clairement une cond. nécessaire.

Suffisance : m.q. si $\tilde{u} \in H_z$ (c.à.d. $\tilde{u} \perp iz, z$) alors

$$\dot{\tilde{\gamma}}(t) \perp i\tilde{\gamma}(t) :$$

or $\tilde{g}(\dot{\tilde{\gamma}}(t), i\tilde{\gamma}(t)) = \tilde{g}(-\sin t . z + \cos t . \tilde{u}, \cos t . iz + \sin t . i\tilde{u})$

$= 0$ puisque $z \perp iz$, $\tilde{u} \perp iz$, $\tilde{u} \perp i\tilde{u}$, $z \perp i\tilde{u}$

<u>Conclusion:</u> la géodésique $t \mapsto \exp_{[z]}(tu)$, $u \in T_{[z]}\mathbb{C}P^n$, $|u| = 1$

est donnée par

$$\boxed{\exp_{[z]}(tu) = f(\underbrace{\cos t . z + \sin t . \tilde{u}}_{\exp_z(t\tilde{u})})}$$, avec $\tilde{u}$ relevé horiz. de u en $z \in S^{2n+1}$.

$\square$

$(*)$ Étant donnée γ géodésique avec $\gamma(0) = [z]$ (écrivons $\gamma(t) = \exp_{[z]}(tu)$, $|u| = 1$) le champ de Jacobi Y le long de γ t.q.

$$Y(0) = 0, \quad D_t Y(0) = v, \quad v \in T_{[z]}\mathbb{C}P^n \quad (|v| = 1)$$

est donné par la variation géodésique.

$$\boxed{Y(t) = \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} \exp_{[z]}(t(u + sv))}$$

Lorsque $v = u$, on obtient $Y(t) = t\dot{\gamma}(t)$. Considérons désormais le cas où $v \perp u$.

Alors posons $\tilde{\gamma}$ relevé horizontal de γ par $z \in S^{2n+1}$: $\tilde{\gamma}(t) = \exp_z(t\tilde{u})$

on a $Y(t) = \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} \exp_{[z]}\big(t(u+sv)\big)$

$$= \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} f\Big(\exp_z\big(t(\tilde{u}+s\tilde{v})\big)\Big)$$

$$= df\, \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} \exp_z\big(t(\tilde{u}+s\tilde{v})\big)$$

$$= df \cdot \tilde{Y}(t)$$

où $\tilde{Y}(t)$ est le champ de Jacobi le long de $\tilde{\gamma}$ t.q.

$$\tilde{Y}(0) = 0\,,\ D_t\tilde{Y}(0) = \tilde{v}$$

En utilisant que $\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} |\tilde{u}+s\tilde{v}| = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \sqrt{\tilde{g}(\tilde{u}+s\tilde{v}, \tilde{u}+s\tilde{v})} = \frac{2\tilde{g}(\tilde{u},\tilde{v})}{2|\tilde{u}|} = \tilde{g}(\tilde{u},\tilde{v})$

on obtient <u>pour $\tilde{v} \perp \tilde{u}$</u> :

$$\tilde{Y}(t) = \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} \cos\big(t\cdot|\tilde{u}+s\tilde{v}|\big)\cdot z + \sin\big(t\cdot|\tilde{u}+s\tilde{v}|\big)\cdot \frac{\tilde{u}+s\tilde{v}}{|\tilde{u}+s\tilde{v}|}$$

$$= \sin t \cdot \tilde{v}$$

On obtient

$$\boxed{Y(t) = \sin t \cdot \big(df_{\tilde{\gamma}(t)} \cdot \tilde{v}\big)}$$

La composante horizontale de $\tilde{v}$ est (en $\tilde{\gamma}(t)$)

$$\tilde{v}^h = \tilde{v} - \tilde{g}\big(\tilde{v}, i\tilde{\gamma}(t)\big)\cdot i\tilde{\gamma}(t)$$

$$= \tilde{v} - \tilde{g}\big(\tilde{v}, \cos t\cdot iz + \sin t\cdot i\tilde{u}\big)\cdot i\tilde{\gamma}(t)$$

$$= \tilde{v} - \sin t\cdot \tilde{g}(\tilde{v}, i\tilde{u})\cdot i\tilde{\gamma}(t).$$

On distingue deux cas :

1) $\tilde{v} \perp i\tilde{u}$, ou encore $v \perp Ju$: alors $\tilde{v}^h = \tilde{v}$.

Par ailleurs $\tilde{v}$ est parallèle, puisque parallèle dans $\mathbb{C}^{n+1}$ (constant).

Via (vii) on obtient que $df_{\tilde{\gamma}(t)} \cdot \tilde{v}$ est le champ parallèle le long de γ t.q. la valeur en 0 est égale à v. Ceci démontre

$$\boxed{Y_k(t) = \sin t \cdot X_k(t), \quad k \geq 3.}$$

2) $\tilde{v} = i\tilde{u}$, ou encore $v = Ju$. Alors

$$\begin{aligned}
\tilde{v}^h &= \tilde{v} - \sin t\,(\cos t\; iz + \sin t \cdot i\tilde{u}) \\
&= i\tilde{u} \cdot \cos^2 t - \sin t \cos t\; iz \\
&= \cos t\,(-\sin t \cdot iz + \cos t \cdot i\tilde{u}) \\
&= \cos t \cdot i\dot{\tilde{\gamma}}
\end{aligned}$$

En particulier $df_{\tilde{\gamma}(t)}\tilde{v} = \cos t \cdot J\dot{\gamma}$

Donc
$$\boxed{Y_2(t) = \sin t \cos t\, \underbrace{J\dot{\gamma}}_{X_2(t)} = \frac{\sin 2t}{2} X_2(t).}$$
$X_2(t)$, car J parallèle, $\dot{\gamma}$ parallèle, donc $J\dot{\gamma}$ parallèle.

Par ailleurs, on a déjà démontré $\boxed{Y_1(t) = t\, X_1(t)}$, car $X_1(t) = \dot{\gamma}(t)$

Pour démontrer l'affirmation sur les Z_i, il suffit de considérer l'espace des champs de Jacobi le long de γ dont la dérivée en 0 est nulle et dont la valeur en 0 est $\perp$ $\dot\gamma(0) = u$. [car $\underset{\overset{\parallel}{X_1(t)}}{\dot\gamma(t)}$ est un champ Jacobi].

<u>Observation</u> : Soit X champ parallèle le long de γ

et supposons que $Y(t) = \sin(\alpha t)\, X(t)$ est un ch. Jacobi

(avec $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé)

Alors $Z(t) := \cos(\alpha t)\, X(t)$ est aussi un ch. Jacobi.

En effet : Y ch. Jacobi ssi $D_t^2 Y + R(\dot\gamma, Y)\dot\gamma = 0$

ssi $-\alpha^2 \sin\alpha t\, X + \sin\alpha t\, R(\dot\gamma, X)\dot\gamma = 0$

ssi $-\alpha^2 X + R(\dot\gamma, X)\dot\gamma = 0$

Mais Z ch. Jacobi ssi $D_t^2 Z + R(\dot\gamma, Z)\dot\gamma = 0$

ssi $-\alpha^2 \cos\alpha t\, X + \cos\alpha t\, R(\dot\gamma, X)\dot\gamma = 0$

ssi $-\alpha^2 X + R(\dot\gamma, X)\dot\gamma = 0$

$\boxed{\text{cqfd}}$

Ceci montre que les Z_i, $i \geq 1$ sont bien des champs de Jacobi. Ils sont clairement lin. indep, et pour des raisons de dimension ils constituent une base de l'espace des ch. Jacobi à dérivée nulle en 0.

$\boxed{\text{cqfd}}$

(xi) Soient $u, v \in T_{[z]}\mathbb{C}P^n$, $|u| = 1$, $|v| = 1$, $u \perp v$.

On veut m.q. $K(u \wedge v) \in [1,4]$.

Nous avons déjà vu au calcul précédent que

$$K(u \wedge Ju) = \langle R(u, Ju)u, Ju\rangle = 4$$

$$K(u \wedge v) = \langle R(u,v)u, v\rangle = 1 \quad \text{si } v \perp u, Ju.$$

Plus généralement, un vecteur arbitraire $v \perp u$ s'écrit

$$v = \cos\theta . \underbrace{v^\perp}_{\text{correspondant sur } \langle u, Ju\rangle^\perp \text{ de norme } 1} + \sin\theta . Ju$$

et alors $K(u \wedge v) = \langle R(u,v)u, v\rangle$

$$= \langle R(u, \cos\theta . v^\perp + \sin\theta\, Ju)u, \cos\theta . v^\perp + \sin\theta\, Ju\rangle$$

$$= \cos^2\theta \langle R(u,v^\perp)u, v^\perp\rangle + \sin^2\theta \langle R(u,Ju)u, Ju\rangle$$

$$+ \sin\theta\cos\theta \Big(\underbrace{\langle \underbrace{R(u,v^\perp)u}_{v^\perp}, Ju\rangle}_{0} + \underbrace{\langle \underbrace{R(u,Ju)u}_{4Ju}, v^\perp\rangle}_{0} \Big)$$

$$= \cos^2\theta + 4\sin^2\theta$$

$$= 1 + 3\sin^2\theta \in [1,4]$$ et clairement toute valeur dans $[1,4]$ est atteinte.

$\boxtimes$

(xii) En vue de la description explicite des ch. Jacobi le long de γ, le premier point conjugué apparaît à $t = \frac{\pi}{2}$. (pour une géod. param. par la longueur de l'arc)

Cette géodésique $\exp_{[z]}(tu)$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ est la projection de $\exp_z(t\tilde{u})$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ sur S^{2n+1}, qui minimise la distance entre z et $S_{\tilde{u}} = \exp_z(\frac{\pi}{2}\tilde{u})$. Donc elle est minimisante, ce qui implique que $\exp_{[z]}(\frac{\pi}{2}u)$ est le premier point d'intersection avec le cut-locus.

On obtient $Cut_{[z]} = f\left(\{\tilde{u} : \tilde{u} \perp z,\ |\tilde{u}| = 1\}\right) \equiv \mathbb{C}P^{n-1}$!

(prendre par exemple $z = (1, 0, \dots, 0)$).

(xiii) $\mathrm{Vol}(\mathbb{C}P^n) = \mathrm{Vol}(\mathbb{C}P^n \setminus Cut_p)$

$$= \int_{S^{2n-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} J(t,u) \cdot t^{2n-1}\, dt\, du$$

$\sin^{2n-2} t \cdot \sin t \cos t$, cf. cours et expression des $Y_i(t)$

$$= \int_{S^{2n-1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} t \cos t\, dt\, du$$

$$= I_{2n-1} \cdot \mathrm{Vol}(S^{2n-1}), \quad \text{où } I_{2n-1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} t \cos t\, dt$$

On a $I_{2n-1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} t \cos t \, dt$

$$= \underbrace{\sin^{2n} t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}_{1.} - (2n-1) \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2} t \cos t . \sin t \, dt}_{I_{2n-1}}$$

Donc $\boxed{I_{2n-1} = \frac{1}{2n}}$

Par ailleurs $Vol(B^{2n}) = \int_{S^{2n-1}} \int_0^1 t^{2n-1} \, dt \, du = \frac{1}{2n} Vol(S^{2n-1})$.

Donc $\underline{Vol(\mathbb{C}P^n) = Vol(B^{2n})}$

En appliquant cela à $n = 1$ on obtient :

$$Vol(\mathbb{C}P^1) = \underbrace{\frac{1}{4}}_{} . 4\pi = \pi .$$

$\boxed{\mathcal{M}}$

le rayon de la sphère de courbure 4 est $\frac{1}{2}$, donc l'aire change par un facteur $\frac{1}{4}$ par rapport à l'aire de la sphère de rayon 1, qui vaut 4π.