Université Pierre et Marie Curie, M1 Mathématiques, 2014-2015
Cours de géométrie différentielle 4M022

Examen du 19 mai 2015, 2ème session

Corrigé sommaire

Partie I.

Considérons l'action de $\mathbb{Z}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ donnée par $(k,\ell)\cdot(x,y) \mapsto (x+k, y+\ell)$, $(k,\ell) \in \mathbb{Z}^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On note $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ le quotient, $\pi : \mathbb{R}^2 \to T^2$ la projection canonique, et $[x,y]$ la classe d'un élément (x,y).

1a. Montrer qu'il existe deux uniques champs de vecteurs sur T^2 tels que $d\pi(\frac{\partial}{\partial x}) = X$ et $d\pi(\frac{\partial}{\partial y}) = Y$. Calculer le crochet $[X,Y]$.

L'on remarque le fait que $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$ sont des champs de vecteurs qui sont invariants sous l'action de $\mathbb{Z}^2$. Ils descendent donc en des champs de vecteurs sur le quotient.

La projection π est un revêtement, donc un difféomorphisme local. Puisque $[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}] = 0$, on en déduit que $[X,Y] = 0$.

1b. Soient ϕ_X^t, ϕ_Y^s, $t, s \in \mathbb{R}$ les flots de X et Y respectivement. Montrer que ces flots sont globalement définis et commutent.

Les flots sont globalement définis puisque T^2 est une variété compacte. Ils commutent par un critère vu en cours, puisque $[X,Y] = 0$. De manière plus explicite, l'on a $\phi_X^t([x,y]) = [x+t, y]$ et $\phi_Y^s([x,y]) = [x, y+s]$, de sorte que $\phi_X^t\phi_Y^s([x,y]) = [x+t, y+s] = \phi_Y^s\phi_X^t([x,y])$.

1c. Donner un champ de vecteurs sur T^2 dont le flot au temps 1 vaut $\phi_X^1\phi_Y^2$.

Le champ de vecteurs recherché est $X + 2Y$.

Considérons les formes différentielles $\alpha, \beta \in \Omega^1(T^2)$ telles que

$$\alpha(X) = 1,\ \alpha(Y) = 0, \qquad \beta(X) = 0,\ \beta(Y) = 1.$$

2a. Montrer que $\alpha \wedge \beta \in \Omega^2(T^2)$ est partout non-nulle.

$\alpha \wedge \beta(X,Y) = 1$, donc $\alpha \wedge \beta \neq 0$.

2b. Calculer $\pi^*\alpha$, $\pi^*\beta$, $\pi^*(\alpha \wedge \beta)$.

$\pi^*\alpha = dx$, $\pi^*\beta = dy$, $\pi^*(\alpha \wedge \beta) = dx \wedge dy$.

2c. Décrire deux courbes fermées simples γ, δ dans T^2 telles que $\int_\gamma \alpha = 1$ et $\int_\delta \alpha = 0$.

Par exemple $\gamma(t) = [t, y_0]$ et $\delta(t) = [x_0, t]$ avec $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, où $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ sont fixés arbitrairement.

2d. L'on munit T^2 de l'orientation induite par l'orientation canonique de $\mathbb{R}^2$. Calculer $\int_{T^2} \alpha \wedge \beta$.

L'intégrale vaut 1.

2e. Soit $f : T^2 \to T^2$, $f([x, y]) = [px, qy]$, avec $p, q \in \mathbb{Z}$. Calculer

$$\int_{T^2} f^*(\alpha \wedge \beta).$$

L'intégrale vaut pq puisque $f^*\alpha = p\alpha$ et $f^*\beta = q\beta$.

Partie II.

Soit $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ le quotient de $\mathbb{R}$ par l'action de $\mathbb{Z}$ par translation $(\ell, x) \mapsto x + \ell$, $\ell \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$. On note $[x] \in S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ la classe d'un élément $x \in \mathbb{R}$. On note $\pi : \mathbb{R} \to S^1$ la projection canonique.

1a. Montrer que S^1 est orientable.

Le groupe $\mathbb{Z}$ agit par des difféomorphismes qui préservent l'orientation de $\mathbb{R}$, dont le quotient est orientable.

1b. Soit $\phi : S^1 \to S^1$, $\phi[x] := [-x]$. Montrer que ϕ ne préserve pas l'orientation.

Le difféomorphisme ϕ est induit par le difféomorphisme $\tilde{\phi} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -x$. Puisque ce dernier ne préserve pas l'orientation, on en déduit que ϕ ne préserve pas l'orientation non-plus.

Soit M une variété lisse et $f : M \to M$ un difféomorphisme. Le quotient M_f de $\mathbb{R} \times M$ par l'action de $\mathbb{Z}$ donnée par

$$\mathbb{Z} \times (\mathbb{R} \times M) \to \mathbb{R} \times M, \qquad (\ell, (t, x)) \mapsto (t + \ell, f^\ell(x))$$

est appellé suspension du difféomorphisme f. *On note $[t, x] \in M_f$ la classe d'équivalence d'un point $(t, x) \in \mathbb{R} \times M$ et $\pi : \mathbb{R} \times M \to M_f$ la projection canonique.*

2. Construire un difféomorphisme entre T^2 et la suspension de Id_{S^1}.

L'application $T^2 \to M_{\mathrm{Id}_{S^1}}$, $[x, y] \mapsto [x, [y]]$ est bien définie. C'est un difféomorphisme d'inverse $[x, [y]] \mapsto [x, y]$.

3. Considérons l'action du groupe $\{\pm 1\}$ sur T^2 donnée par

$$(-1) \cdot [x, y] := [x + \frac{1}{2}, -y].$$

Montrer que l'on a un difféomorphisme entre le quotient $T^2/\{\pm 1\}$ et la suspension du difféomorphisme ϕ du point 1b. ci-dessus, que l'on appelle *bouteille de Klein* et que l'on note K^2.

L'application $T^2/\{\pm 1\} \to M_\phi$, $[x, y] \mapsto [2x, [y]]$ définit le difféomorphisme recherché.

4. Montrer que T^2 est orientable. Montrer que K^2 n'est pas orientable.

Le groupe $\mathbb{Z}^2$ agit sur $\mathbb{R}^2$ librement et proprement par translations, et celles-ci préservent l'orientation, le quotient T^2 est donc orientable.

Le difféomorphisme de T^2 défini par $[x, y] \mapsto [x + \frac{1}{2}, -y]$ renverse l'orientation puisqu'il est induit par le difféomorphisme $(x, y) \mapsto (x + \frac{1}{2}, -y)$ de $\mathbb{R}^2$, qui renverse l'orientation. Le quotient $T^2/\{\pm 1\}$ n'est donc pas orientable.

5. Montrer que T^2 possède une structure de groupe de Lie. Montrer que la bouteille de Klein ne possède pas de structure de groupe de Lie.

La structure de groupe de Lie sur T^2 est induite par celle de $\mathbb{R}^2$.

La bouteille de Klein ne possède pas de structure de groupe de Lie puisqu'elle n'est pas orientable, or tout groupe de Lie est orientable puisque son fibré tangent est trivial.

6. Montrer que la bouteille de Klein n'est pas difféomorphe à la sphère S^2.

La bouteille de Klein n'est pas orientable, mais la sphère est orientable. Si elles étaient difféomorphes l'on pourrait transporter un 2-forme partout non-nulle définie sur S^2 en une 2-forme partout non-nulle définie sur K^2.

Autre preuve : la bouteille de Klein possède un champ de vecteurs qui ne s'annule pas, à savoir le champ induit sur le quotient par le champ de vecteurs $(\frac{\partial}{\partial t}, 0) \in \mathcal{X}(\mathbb{R} \times S^1)$, invariant sous l'action de $\mathbb{Z}$. Or nous savons que tout champ de vecteurs sur S^2 possède au moins un zéro. Si jamais K^2 et S^2 étaient difféomorphes, l'on pourrait transporter le champ de vecteurs partout non-nul défini sur K^2 en un champ de vecteurs qui ne s'annule pas sur S^2.

7. Montrer qu'il n'existe pas sur K^2 deux champs de vecteurs qui soient linéairement indépendants en tout point.

Deux tels champs de vecteurs fourniraient une trivialisation de TK^2. En particulier K^2 serait orientable.

Partie III.

1. Soit M^n une variété de dimension n. Montrer que M^n n'admet pas d'immersion dans $\mathbb{R}^k$ pour $k < n$.

La différentielle d'une telle immersion en un point $p \in M$ serait une application linéaire injective $T_pM \to \mathbb{R}^k$, où T_pM est un espace vectoriel de dimension $n > k$.

2. Supposons de plus que M^n est compacte sans bord. Montrer que M^n n'admet pas d'immersion dans $\mathbb{R}^n$.

La différentielle en tout point serait injective, donc bijective, et une telle immersion serait nécessairement un difféomorphisme local et en particulier une application ouverte. L'image de M serait donc un ouvert fermé non-vide et compact dans $\mathbb{R}^n$. Or $\mathbb{R}^n$ est connexe et le seul ouvert fermé non-vide de $\mathbb{R}^n$ est $\mathbb{R}^n$ lui-même, qui n'est pas compact.

3. Dessiner un plongement de T^2 dans $\mathbb{R}^3$ et l'expliquer. Dessiner une immersion de K^2 dans $\mathbb{R}^3$ et l'expliquer. Expliquer comment l'on pourrait construire un plongement de K^2 dans $\mathbb{R}^4$.

L'on peut construire une immersion $K^2 \to \mathbb{R}^3$ telle que le lieu des points d'auto-intersection soit une courbe fermée simple dans $\mathbb{R}^3$, image de deux cercles plongés dans K^2, notés C_1 et C_2. L'on choisit une fonction de troncature $\rho : K^2 \to [0,1]$ supportée au voisinage de C_1, qui vaut 1 le long de C_1, et dont le support n'intersecte pas C_2. Si $\varphi : K^2 \to \mathbb{R}^3$ est l'immersion, alors $(\varphi, \rho) : K^2 \to \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^4$ est un plongement.