Université Pierre et Marie Curie

M1 Mathématiques fondamentales, 2014-2015

Devoir de géométrie différentielle

(H. Eynard-Bontemps, A. Oancea)

Distribué le 17/10. À rendre *au plus tard* le 24/10 lors du cours.

Le devoir doit être rédigé individuellement. Le soin apporté à la rédaction sera apprécié. Par contre, nous encourageons les discussions collectives autour du sujet.

Exercice 1. Soit M une variété de dimension n. Montrer que tout point admet une carte modelée sur :

(i) $\mathbb{R}^n$;

(ii) $B^n(1)$;

(iii) $B^n(\epsilon)$, avec $\epsilon > 0$ quelconque ;

(iv) un ouvert $V \subset \mathbb{R}^n$ quelconque.

Exercice 2. Montrer que $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ privé d'un point est difféomorphe au ruban de Mœbius $\mathcal{R}$ (cf. feuille de TD 3). On pourra commencer par remarquer que $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ privé d'un point est difféomorphe $(\mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\})/\{\pm \mathrm{id}\}$, où N et S désignent les pôles Nord et Sud de la sphère.

Exercice 3. Soit

$$\mathcal{H} := \{(x, y, z) \,:\, x^2 + y^2 = 1 + z^2\} \subset \mathbb{R}^3$$

un *hyperboloïde à une nappe.*

(i) Montrer que $\mathcal{H}$ est une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2. Déterminer l'espace tangent à $\mathcal{H}$ en tout point de $\mathcal{H}$.

(ii) Montrer que $\mathcal{H}$ peut être recouvert par une famille lisse à un paramètre de droites disjointes dans $\mathbb{R}^3$, et qu'il existe deux familles de droites ayant cette propriété. Faire un dessin.

(iii) Écrire pour chacune de ces familles un champ de vecteurs lisse sur $\mathcal{H}$ dont les courbes intégrales sont les droites de la famille.

(iv) Calculer le crochet des deux champs de vecteurs que vous aurez construits de cette manière.

Exercice 4. Soit Δ une droite de pente irrationnelle dans $\mathbb{R}^2$. Montrer que la restriction à Δ de la projection canonique $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ définit une immersion injective de Δ dans le tore $\mathbb{T}^2$ dont l'image est dense dans $\mathbb{T}^2$. En déduire que cette image n'est pas une sous-variété de $\mathbb{T}^2$.