Feuille 1 : Sous-variétés

Exercice 1. La sphère comme sous-variété de $\mathbb{R}^3$.

1. Donner les valeurs critiques de la fonction $\|.\|^2 : (x,y,z) \mapsto x^2+y^2+z^2$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$. En déduire que la sphère unité $\mathbb{S}^2$ de $\mathbb{R}^3$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.

2. Montrer que l'application
$$\begin{array}{rccc} \phi : & U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z > 0\} & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & (x,y,1-\|(x,y,z)\|^2) \end{array}$$
induit un difféomorphisme sur son image. Quelle est l'image par ϕ de $\mathbb{S}^2 \cap U$? À l'aide de 5 autres applications du même type, retrouver le résultat de la question précédente.

3. Retrouver encore une fois ce résultat à l'aide de l'application
$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 < 1\} & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y) & \mapsto & (x,y,\sqrt{1-x^2-y^2}) \end{array}$$
(et de ses 5 analogues). On utilisera une troisième définition des sous-variétés. Faire le lien entre les questions 1 et 3 et le théorème des fonctions implicites.

Exercice 2. Et si on enlève des hypothèses...

1. (Si on enlève "submersion"...) Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-variétés de $\mathbb{R}^3$: $\{(x,y,z)/x^2+y^2-z^2=0\}$? $\{(x,y,z)/x^2+y^2-z^2=1\}$?

2. (Si on enlève "immersion"...) Montrer que le graphe de $x \in \mathbb{R} \mapsto |x|$ n'est pas une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^2$.

3. (Si on enlève "homéomorphisme sur son image"...) Montrer que l'application $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\mapsto \sin t \cos t(\cos t, \sin t) \in \mathbb{R}^2$ est une immersion injective. Son image est-elle une sous-variété de $\mathbb{R}^2$?

Exercice 3. Le tore de révolution. On appelle T la surface de révolution obtenue en faisant tourner autour de l'axe (Oz) le cercle $C_0 \subset \{y=0\}$ de centre $(2,0,0)$ et de rayon 1.

1. Trouver une équation de T de la forme $F(x,y,z)=0$. En déduire que T est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.

2. Retrouver ce résultat à l'aide de l'application
$$\begin{array}{rccc} h : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (\theta,\phi) & \mapsto & ((2+\cos\theta)\cos\phi, (2+\cos\theta)\sin\phi, \sin\theta). \end{array}$$

Exercice 4. Un "autre" tore.

1. Montrer que si M et N sont des sous-variétés de $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$ respectivement, alors $M \times N$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{m+n}$ (naturellement identifié à $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$).

2. En déduire que $\mathbb{T}^n = (\mathbb{S}^1)^n$ est une sous-variété de $(\mathbb{R}^2)^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$. Montrer que $\mathbb{T}^2$ est difféomorphe au T de l'exercice précédent.

Exercice 5. Groupes classiques.

1. Montrer que l'application déterminant de $M_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ est de classe C^1. On note $E_{i,j}$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui d'indices (i,j) qui vaut 1. Calculer la dérivée de l'application $t \in \mathbb{R} \mapsto \det(I_n + tE_{i,j})$. En déduire la différentielle de det en l'identité, puis en toute matrice inversible. On l'exprimera à l'aide de la comatrice. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $M_n(\mathbb{R})$ et en déduire la différentielle de det en tout point de $M_n(\mathbb{R})$.

2. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ et $SL_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) / \det(M) = 1\}$ sont des sous-variétés de $M_n(\mathbb{R})$. Préciser leur dimension et expliciter leur plan tangent en I_n puis en tout point.

3. Montrer que l'application
$$\begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \to & S_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & {}^tMM \end{array}$$
est une submersion en tout point de $GL_n(\mathbb{R})$. En déduire que $O_n(\mathbb{R})$ est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$ dont on précisera la dimension et le plan tangent en I_n.