

Feuille 2 : sphères, tores, projectifs

Exercice 1. Sphères par projections stéréographiques. Soit \mathbb{S}^n la sphère unité de \mathbb{R}^{n+1} munie de la topologie induite. On note $N = (0, \dots, 0, 1)$ et $S = (0, \dots, 0, -1)$ les pôles nord et sud respectivement.

1. Vérifier que les projections stéréographiques ϕ_N et ϕ_S par rapport aux pôles nord et sud sont des homéomorphismes de $\mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ et $\mathbb{S}^n \setminus \{S\}$ respectivement sur \mathbb{R}^n .

Rappel. ϕ_N (resp. ϕ_S) est défini par : pour tout $x \in \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ (resp. $\mathbb{S}^n \setminus \{S\}$), $(\phi_N(x), 0)$ (resp. $(\phi_S(x), 0)$) est l'unique point d'intersection de la droite (Nx) (resp. (Sx)) avec l'hyperplan $\mathbb{R}^n \times \{0\}$.

2. Montrer que l'on définit ainsi deux cartes compatibles de \mathbb{S}^n , qui munissent la sphère d'une structure de variété différentiable.
3. Vérifier que l'injection canonique $i : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ est de classe C^∞ . Montrer qu'une application $f : X \rightarrow \mathbb{S}^n$, où X est une variété, est de classe C^∞ ssi $i \circ f$ l'est. Utiliser ce critère pour construire une application C^∞ de \mathbb{S}^p dans \mathbb{S}^{p+n} .

Exercice 2. Quadriques. Dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ on considère la quadrique d'équation $\|x\|^2 - \|y\|^2 = 1$.

1. Montrer que c'est une sous-variété difféomorphe à $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}^p$.
2. Représenter les différents cas pour $n + p = 3$.

Exercice 3. Tore de dimension 1. Soit $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ le tore de dimension 1, muni de la topologie quotient, et p la projection canonique de \mathbb{R} sur \mathbb{T}^1 .

1. Montrer que \mathbb{T}^1 est compact et connexe.
2. Définir à partir de la restriction de p à $]0, 1[$ et $]1/2, 3/2[$ deux cartes compatibles de \mathbb{T}^1 , qui munissent \mathbb{T}^1 d'une structure de variété.
3. Vérifier que la projection p est lisse et qu'une application $f : \mathbb{T}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ est lisse ssi $f \circ p$ l'est.
4. Montrer que l'application $x \in \mathbb{R} \mapsto e^{2i\pi x} \in \mathbb{S}^1$ induit un difféomorphisme entre le tore et le cercle unité $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$.
5. On pose pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{T}^1$

$$d(\alpha, \beta) = \inf_{\tilde{\alpha} \in p^{-1}(\alpha), \tilde{\beta} \in p^{-1}(\beta)} |\tilde{\alpha} - \tilde{\beta}|.$$

Montrer que d définit une distance sur le tore (on pourra par exemple, étant donné z et $z' \in \mathbb{S}^1$, exprimer $d(\phi^{-1}(z), \phi^{-1}(z'))$, où ϕ désigne le difféomorphisme de la question précédente, en termes d'angles (ou de longueur d'arc)). Montrer que cette métrique induit la topologie quotient sur \mathbb{T}^1 .

Exercice 4. Tore de dimension n .

1. Reprendre les questions de l'exercice précédent pour le tore de dimension n , $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$.

2. Montrer, à l'aide de l'application

$$h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (\theta, \phi) \mapsto ((2 + \cos \theta) \cos \phi, (2 + \cos \theta) \sin \phi, \sin \theta).$$

que $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ est difféomorphe au tore de révolution $T \subset \mathbb{R}^3$ obtenu en faisant tourner autour de l'axe (Oz) le cercle $C_0 \subset \{y = 0\}$ de centre $(2, 0, 0)$ et de rayon 1.

Exercice 5. Espace projectif réel. On définit l'espace projectif réel \mathbb{RP}^n comme l'ensemble des droites vectorielles de \mathbb{R}^{n+1} , muni de la topologie quotient. On note $p : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{RP}^n$ la projection naturelle.

1. Montrer que \mathbb{RP}^n est compact et connexe.
2. Pour $i = 0, \dots, n$, on considère l'ensemble $V_i \subset \mathbb{RP}^n$ des droites qui ne sont pas contenues dans l'hyperplan $\{x_i = 0\}$ et on définit φ_i l'application $V_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ qui associe à une droite son intersection avec l'hyperplan affine $\{x^i = 1\} \simeq \mathbb{R}^n$. Vérifier que l'on définit ainsi des cartes compatibles qui recouvrent le projectif.
3. Montrer que la projection p est de classe C^∞ et qu'une fonction $f : \mathbb{RP}^n \rightarrow X$ (X variété) est de classe C^∞ ssi $f \circ p$ l'est.
4. Montrer que l'inclusion $i : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ induit un homéomorphisme entre \mathbb{RP}^n et $\mathbb{S}^n/x \sim -x$ muni de la topologie quotient.
5. Montrer qu'il existe une unique structure de variété différentiable sur $\mathbb{S}^n/x \sim -x$ telle que la projection $\mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n/x \sim -x$ soit C^∞ . Montrer que l'homéomorphisme de la question précédente est alors un difféomorphisme.
6. En s'inspirant des exercices précédents, définir une métrique sur \mathbb{RP}^n qui induit la topologie quotient.

Exercice 6. Projectifs de petite dimension.

1. Montrer que \mathbb{RP}^1 est difféomorphe au cercle.
2. (Plongement de Véronèse) Montrer que \mathbb{RP}^2 se plonge dans \mathbb{R}^6 via l'application définie sur \mathbb{S}^2

$$(x, y, z) \mapsto (x^2, y^2, z^2, xy, yz, xz).$$

3. Montrer que \mathbb{RP}^3 est difféomorphe à $SO(3)$.

Exercice 7. Droites projectives. On appelle droite projective, toute partie de \mathbb{RP}^n image par la projection canonique p d'un sous espace de \mathbb{R}^{n+1} de dimension 2.

1. Montrer qu'une droite projective est une sous-variété de \mathbb{RP}^n difféomorphe à \mathbb{RP}^1 .
2. Montrer que le complémentaire d'une droite projective dans \mathbb{RP}^2 s'identifie à un plan affine de dimension 2. Que peut-on dire de l'intersection d'une autre droite projective avec ce plan?
3. Montrer que deux droites projectives du plan projectif \mathbb{RP}^2 se coupent en exactement un point ou sont confondues.

Exercice 8. Espace projectif complexe. On définit l'espace projectif complexe \mathbb{CP}^n comme l'ensemble des droites vectorielles (complexes) de \mathbb{C}^{n+1} , muni de la topologie quotient (\mathbb{C}^{n+1} étant identifié à $(\mathbb{R}^2)^{n+1} = \mathbb{R}^{2n+2}$). On note $p : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{CP}^n$ la projection naturelle.

1. Donner une structure de variété différentielle à \mathbb{CP}^n .
2. Montrer que \mathbb{CP}^1 est difféomorphe à la sphère \mathbb{S}^2 .