Feuille 3

Exercice 1.

1. Soient M, N, et P des variétés différentiables. Montrer que si $f : M \to N$ et $g : N \to P$ sont différentiables, alors $g \circ f : M \to P$ l'est aussi.
2. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application différentiable et M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$, munie de la structure différentiable induite. Montrer que $f_{|M} : M \to \mathbb{R}^p$ est différentiable.
3. Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application différentiable et M une sous-variété de $\mathbb{R}^p$ telle que $f(U) \subset M$. Montrer que l'application induite $\bar{f} : x \in U \mapsto f(x) \in M$ est différentiable.

Exercice 2.

1. Montrer que pour tout espace vectoriel V de dimension finie et tout point $p \in V$ on a un isomorphisme canonique
$$T_pV \cong V.$$
En particulier l'on a un isomorphisme canonique
$$T_p\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n.$$
2. Soit $M^k \subseteq \mathbb{R}^n$ une sous-variété. Montrer que l'inclusion $i : M \to \mathbb{R}^n$ est une application lisse et que sa différentielle
$$di(p) : T_pM \to T_p\mathbb{R}^n$$
est l'inclusion $T_pM \hookrightarrow \mathbb{R}^n$.
3. Soit V un espace vectoriel et $A \subseteq V$ un sous-espace affine de direction $W \subseteq V$. Montrer que A est une sous-variété lisse de dimension égale à dim W. Montrer que l'on a un isomorphisme canonique $T_pA \cong W$ pour tout $p \in A$.
4. Soit $U \subseteq V$ un ouvert dans un espace vectoriel de dimension finie. Montrer que l'on a un isomorphisme canonique
$$T_pU \cong V.$$
5. Soit $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application lisse définie sur un ouvert U dans $\mathbb{R}^n$. Vérifier que la différentielle classique $df(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $p \in U$ coïncide avec la différentielle $df(p) : T_pU \to T_{f(p)}\mathbb{R}^m$ définie dans le cours.

Exercice 3. Le ruban de Möbius. On considère l'action de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}^2$ définie par
$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad n \cdot (x, y) = (x + n, (-1)^n y)$$
et on appelle *Ruban de Möbius*, noté $\mathcal{R}$, le quotient de $\mathbb{R}^2$ par cette action, muni de la topologie quotient.

1. Munir $\mathcal{R}$ d'une structure de variété différentielle, puis d'une structure de fibré vectoriel de rang 1 sur le cercle $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.
2. Montrer que ce fibré n'est pas trivial, c'est-à-dire que $\mathcal{R}$ n'est pas difféomorphe à $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$. On pourra montrer que $\mathcal{R}$ privé de la section nulle est connexe par arcs.
3. Montrer que l'application
$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (x \bmod 1, y\cos(\pi x), y\sin(\pi x))$$
passe au quotient en un plongement de $\mathcal{R}$ dans $\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}^2$.

4. Construire un plongement de $\mathcal{R}$ dans $\mathbb{R}^3$.
5. On peut représenter une droite du plan par son *équation d'Euler* : $x \cos \theta + y \sin \theta - p = 0$ (pour une droite ne passant pas par l'origine, p et θ sont les coordonnées polaires de la projection orthogonale de $(0, 0)$ sur la droite). Donner une condition nécessaire et suffisante pour que deux couples (θ, p) et (θ', p') représentent la même droite. En déduire une bijection naturelle entre l'ensemble des droites affines du plan et $\mathcal{R}$.
6. Montrer que $\mathbb{RP}^2$ privé d'un point (ou d'un petit voisinage d'un point homéomorphe à un disque fermé) est difféomorphe à la variété $\mathcal{R}$.