Feuille 4

Exercice 1. (Généralisation de) résultats admis jusqu'ici. Soit f une application lisse d'une variété M dans une variété N.

1. Montrer que si f est un plongement, $f(M)$ est une sous-variété de N.
2. Soit P une sous-variété de N. Montrer que si f est *transverse* à P au sens où pour tout $x \in f^{-1}(P)$,
$$\mathrm{Im}(d_x f) + T_{f(x)}P = T_{f(x)}N$$
alors $f^{-1}(P)$ est une sous-variété de M. En particulier, si f est une submersion, l'image réciproque par f de toute sous-variété de N est une sous-variété de M.

Exercice 2. Retour sur des exercices antérieurs. Justifier (en utilisant un théorème de cours sur les actions de groupes sur les variétés) que dans chacun des cas suivants, la projection canonique est un revêtement, et que le quotient admet une unique structure différentiable telle que ce revêtement soit lisse :

1. $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$;
2. $\mathbb{R}^2 \to \mathcal{R}$ (ruban de Möbius) ;
3. $\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n/\{\pm 1\} \simeq \mathbb{RP}^n$.

Exercice 3. Droite de Kronecker. Soit Δ une droite de pente irrationnelle dans $\mathbb{R}^2$. Montrer que la projection canonique $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ induit une immersion injective de Δ dans le tore $\mathbb{T}^2$ mais que l'image de Δ n'est pas une sous-variété de $\mathbb{T}^2$. Comparer avec la question 1 de l'exercice 7 de la feuille 2.

Exercice 4. Quotient non séparé. On considère l'action de $\mathbb{Z}$ sur le plan privé de l'origine donnée par
$$n.(x,y) = (2^n x, 2^{-n} y), \quad n \in \mathbb{Z},\ (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Montrer que le quotient n'est pas séparé.
2. Décrire le quotient de chaque quart de plan ouvert et de chaque demi-axe. Expliquer comment se recollent les différentes parties.

Exercice 5. Bouteille de Klein. On considère le sous-groupe G du groupe des isométries affines du plan $\mathbb{R}^2$ engendré par les applications $T : (x,y) \mapsto (x+1, y)$ et $S : (x,y) \mapsto (-x, y+1)$.

1. Vérifier que l'application
$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{Z}^2, *) & \to & G \\ (k,l) & \mapsto & T^k S^l \end{array}$$
est un isomorphisme de groupes, où $*$ désigne la loi de composition "tordue" sur $\mathbb{Z}^2$:
$$(k,l) * (k',l') = (k + (-1)^l k', l + l')$$
(on admet que $\mathbb{Z}^2$ muni de cette loi est bien un groupe).

2. Montrer que l'action de G sur $\mathbb{R}^2$ est propre et libre. La projection canonique $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/G$ est donc un revêtement, et le quotient, appelé *Bouteille de Klein*, et noté K, possède une unique structure différentiable pour laquelle ce revêtement soit lisse.

3. Vérifier que K est homéomorphe au carré $[0,1]^2$ dont on a identifié les bords par $(0,y) \sim (1,y)$ et $(x,0) \sim (1-x,1)$.

4. Trouver sur K une courbe fermée simple dont le complémentaire est difféomorphe au ruban de Möbius $\mathcal{R}$, et une dont le complémentaire est difféomorphe à la réunion disjointe de deux rubans de Möbius.

5. Construire un revêtement lisse de $\mathbb{T}^2$ sur K.

6. * Construire une immersion de K dans $\mathbb{R}^3$.

7. * Construire un plongement de K dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 6. Champs de vecteurs linéaires du plan. Étant donnée une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$, on définit le champ de vecteurs X_A sur $\mathbb{R}^2$ par

$$X_A : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mapsto A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \simeq T_{\binom{x}{y}}\mathbb{R}^2.$$

1. "Dessiner" X_A dans chacun des cas suivants (c'est-à-dire représenter le vecteur $X\binom{x}{y}$ issu du point $\binom{x}{y}$ pour un certain nombres de points $\binom{x}{y}$ bien choisis) :

$$A = \pm I_2,\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & -1 \\ 1 & \frac{1}{10} \end{pmatrix}.$$

2. Esquisser l'allure des courbes intégrales de X_A dans chacun des cas ci-dessus.

3. Si $P \in GL_2(\mathbb{R})$, quel est le lien entre les courbes intégrales de X_A et celles de $X_{PAP^{-1}}$?

4. En déduire l'expression d'un champ de vecteurs linéaire sur $\mathbb{R}^2$ dont toutes les orbites (à part $\{0\}$) sont des ellipses (mais pas des cercles).

5. De manière générale, décrire le portrait de phase de X_A (c'est-à-dire l'allure de ses courbes intégrales) en fonction du spectre de A.

Exercice 7. Rotation de la sphère. Donner un champ de vecteurs sur la sphère $\mathbb{S}^2$ dont le flot au temps 1 soit la rotation d'angle $\theta \in [0, 2\pi]$ autour de l'axe vertical (orienté).

Exercice 8. Dynamique "Sud-Nord" et "Nord-Nord". On note $N = (0,0,1)$ le pôle nord de la sphère unité $\mathbb{S}^2$ de $\mathbb{R}^3$, ϕ_N la projection stéréographique depuis N de $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ sur le plan $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$, et, pour tout $t \in \mathbb{R}$, h_t l'homothétie de centre $(0,0,0)$ et de rapport e^t de ce même plan.

1. Montrer que $\phi_N^{-1} \circ h_t \circ \phi_N$ se prolonge de manière unique en un difféomorphisme g_t de $\mathbb{S}^2$ et que pour tout $(t,s) \in \mathbb{R}^2$, $g_t \circ g_s = g_s \circ g_t$.

2. Montrer que les seuls points fixes de g_t sont les pôles Nord et Sud. Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{S}^2$,

$$\lim_{t\to+\infty} g_t(x) = N \quad \text{et} \quad \lim_{t\to-\infty} g_t(x) = S.$$

3. Vérifier que $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^2 \mapsto g_t(x)$ est le flot du champ de vecteurs X sur $\mathbb{S}^2$ donné pour tout $x \in \mathbb{S}^2$ par la projection orthogonale sur $T_x\mathbb{S}^2$ du vecteur $(0, 0, 1)$.

4. En s'inspirant de la construction faite en 1., donner un exemple de champ de vecteurs sur $\mathbb{S}^2$ ayant un seul zéro, et dessiner ses trajectoires.

Exercice 9. Champ de vecteurs non complet. Déterminer le flot du champ de vecteurs $X : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \in \mathbb{R} \simeq T_x\mathbb{R}$, et en particulier son ensemble de définition.

Exercice 10. Feuilletage linéaire du tore.

1. Décrire les orbites d'un champ de vecteurs constant (non nul) sur $\mathbb{R}^2$ (i.e. de la forme $x \in \mathbb{R}^2 \mapsto v \in T_x\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{R}^2$, avec $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ fixé).

2. Montrer que le fibré tangent du tore $\mathbb{T}^2$ s'identifie naturellement à $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}^2$.

3. Étant donné $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, on peut alors définir sur $\mathbb{T}^2$ le champ de vecteurs "constant" $x \in \mathbb{T}^2 \mapsto (x, v) \in T_x\mathbb{T}^2 \simeq \{x\} \times \mathbb{R}^2$. Décrire les orbites d'un tel champ de vecteurs. Sont-ce des sous-variétés de $\mathbb{T}^2$? On distinguera les cas où v_1 et v_2 sont rationnellement dépendants/indépendants.

Exercice 11. Flots qui ne commutent pas. On définit sur $\mathbb{R}^3$ les champs de vecteurs X et Y par :

$$X(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{et} \quad Y(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}.$$

1. Calculer $[X, Y]$.

2. Déterminer les flots ϕ^t et ψ^t de X et Y.

3. Pour un point $p = (x, y, z)$ donné, représenter le chemin $s \in [0, 1] \mapsto \phi^s(p)$ suivi de $t \in [0, 1] \mapsto \psi^t(\phi^s(p))$, puis le chemin $t \in [0, 1] \mapsto \psi^t(p)$ suivi de $s \in [0, 1] \mapsto \phi^s(\psi^t(p))$. Que remarque-t-on ?

4. Calculer, pour tout $p \in \mathbb{R}^3$, $\frac{d}{dt}\frac{d}{ds}(\psi^t \circ \phi^s \circ \psi^{-t} \circ \phi^{-s}(p)\big|_{s=0,t=0}$, et retrouver le résultat de la première question.

5. *(Un peu de dessin)* Représenter, pour p parcourant les axes (Ox), (Oy) et (Oz), (un petit morceau de) l'espace affine $p + \mathrm{Vect}(X(p), Y(p))$.