Université Pierre et Marie Curie, M1 Mathématiques, 2014-2015
Cours de géométrie différentielle 4M022

Examen du 19 mai 2015, 2ème session

Durée : 3 heures

Documents autorisés : notes de cours et TD, polycopié du cours.

Partie I.

Considérons l'action de $\mathbb{Z}^2$ *sur* $\mathbb{R}^2$ *donnée par* $(k,\ell)\cdot(x,y) \mapsto (x+k, y+\ell)$, $(k,\ell) \in \mathbb{Z}^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. *On note* $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ *le quotient,* $\pi : \mathbb{R}^2 \to T^2$ *la projection canonique, et* $[x,y]$ *la classe d'un élément* (x,y).

1a. Montrer qu'il existe deux uniques champs de vecteurs sur T^2 tels que $d\pi(\frac{\partial}{\partial x}) = X$ et $d\pi(\frac{\partial}{\partial y}) = Y$. Calculer le crochet $[X,Y]$.

1b. Soient ϕ^t_X, ϕ^s_Y, $t,s \in \mathbb{R}$ les flots de X et Y respectivement. Montrer que ces flots sont globalement définis et commutent.

1c. Donner un champ de vecteurs sur T^2 dont le flot au temps 1 vaut $\phi^1_X\phi^2_Y$.

Considérons les formes différentielles $\alpha, \beta \in \Omega^1(T^2)$ *telles que*

$$\alpha(X) = 1,\ \alpha(Y) = 0, \qquad \beta(X) = 0,\ \beta(Y) = 1.$$

2a. Montrer que $\alpha \wedge \beta \in \Omega^2(T^2)$ est partout non-nulle.

2b. Calculer $\pi^*\alpha$, $\pi^*\beta$, $\pi^*(\alpha \wedge \beta)$.

2c. Décrire deux courbes fermées simples γ, δ dans T^2 telles que $\int_\gamma \alpha = 1$ et $\int_\delta \alpha = 0$.

2d. L'on munit T^2 de l'orientation induite par l'orientation canonique de $\mathbb{R}^2$. Calculer $\int_{T^2} \alpha \wedge \beta$.

2e. Soit $f : T^2 \to T^2$, $f([x,y]) = [px, qy]$, avec $p, q \in \mathbb{Z}$. Calculer

$$\int_{T^2} f^*(\alpha \wedge \beta).$$

Partie II.

Soit $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ *le quotient de* $\mathbb{R}$ *par l'action de* $\mathbb{Z}$ *par translation* $(\ell, x) \mapsto x + \ell$, $\ell \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$. *On note* $[x] \in S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ *la classe d'un élément* $x \in \mathbb{R}$. *On note* $\pi : \mathbb{R} \to S^1$ *la projection canonique.*

1a. Montrer que S^1 est orientable.

1b. Soit $\phi : S^1 \to S^1$, $\phi[x] := [-x]$. Montrer que ϕ ne préserve pas l'orientation.

Soit M une variété lisse et $f : M \to M$ un difféomorphisme. Le quotient M_f de $\mathbb{R} \times M$ par l'action de $\mathbb{Z}$ donnée par

$$\mathbb{Z} \times (\mathbb{R} \times M) \to \mathbb{R} \times M, \qquad (\ell, (t, x)) \mapsto (t + \ell, f^{\ell}(x))$$

est appellé suspension du difféomorphisme f. *On note $[t, x] \in M_f$ la classe d'équivalence d'un point $(t, x) \in \mathbb{R} \times M$ et $\pi : \mathbb{R} \times M \to M_f$ la projection canonique.*

2. Construire un difféomorphisme entre T^2 et la suspension de Id_{S^1}.

3. Considérons l'action du groupe $\{\pm 1\}$ sur T^2 donnée par

$$(-1) \cdot [x, y] := [x + \frac{1}{2}, -y].$$

Montrer que l'on a un difféomorphisme entre le quotient $T^2/\{\pm 1\}$ et la suspension du difféomorphisme ϕ du point 1b. ci-dessus, que l'on appelle *bouteille de Klein* et que l'on note K^2.

4. Montrer que T^2 est orientable. Montrer que K^2 n'est pas orientable.

5. Montrer que T^2 possède une structure de groupe de Lie. Montrer que la bouteille de Klein ne possède pas de structure de groupe de Lie.

6. Montrer que la bouteille de Klein n'est pas difféomorphe à la sphère S^2.

7. Montrer qu'il n'existe pas sur K^2 deux champs de vecteurs qui soient linéairement indépendants en tout point.

Partie III.

1. Soit M^n une variété de dimension n. Montrer que M^n n'admet pas d'immersion dans $\mathbb{R}^k$ pour $k < n$.

2. Supposons de plus que M^n est compacte sans bord. Montrer que M^n n'admet pas d'immersion dans $\mathbb{R}^n$.

3. Dessiner un plongement de T^2 dans $\mathbb{R}^3$ et l'expliquer. Dessiner une immersion de K^2 dans $\mathbb{R}^3$ et l'expliquer. Expliquer comment l'on pourrait construire un plongement de K^2 dans $\mathbb{R}^4$.