Notes de cours de Géométrie différentielle

Alexandru Oancea

Université Pierre et Marie Curie

Master de mathématiques fondamentales, $1^{\text{ère}}$ année

23 septembre 2014

Prérequis

Je vous encourage vivement à revoir la partie du **cours de calcul différentiel** concernant le **théorème des fonctions implicites** et le **théorème d'inversion locale** (les énoncés, les exemples, les exercices). Ce sont des théorèmes qui jouent un rôle important en géométrie différentielle. Nous les expliquerons à nouveau en cours, mais il est toutefois utile de réviser.

Conventions

Pour alléger les notations, on désigne par *application lisse* une application différentiable de classe C^∞. Dans la première partie du texte, la source et le but d'une telle application sont (des ouverts dans) des espaces de Banach de dimension finie. Par la suite, la source et le but de telles applications seront des ouverts, ou encore des ensembles plus généraux, dans des variétés lisses, que nous définirons.

De la même manière, l'on désigne simplement par *difféomorphisme* un difféomorphisme lisse, c'est-à-dire une application bijective qui est lisse et dont l'inverse est lisse.

Lorsque l'on voudra insister sur le caractère non-lisse d'une variété ou d'une application entre variétés, l'on spécifiera le cas échéant sa classe de différentiabilité ou bien son caractère continu.

L'on notera un *isomorphisme canonique* entre deux objets par le symbole

$$\cong .$$

Pour désigner l'*identification* de deux objets par un isomorphisme canonique (en général sous-entendu) on utilisera le symbole

$$\equiv .$$

Exemple : soit V un espace vectoriel de dimension finie. $V \cong V^{**}$ signifie que V est canoniquement isomorphe à son bi-dual. $V \equiv V^{**}$ signifie que l'on regarde les éléments de V comme des éléments du bi-dual dans une situation géométrique donnée.

L'on note un *isomorphisme quelconque*, éventuellement non-canonique, entre deux objets par le symbole

$$\simeq .$$

Exemple : si V est un espace vectoriel de dimension finie l'on a $V \simeq V^*$.

Bibliographie sélective

Les trois premiers livres, ainsi que le premier chapitre du quatrième, contiennent à peu de choses près le matériel que nous allons couvrir en cours. Il faut les feuilleter tous et en choisir un, selon votre goût.

Les livres qui suivent dans la liste sont de beaux livres que vous pouvez lire. Le M1 est le moment où vous pouvez commencer à lire de vrais livres de maths, si vous ne l'avez pas encore fait. Ce n'est que de cette manière que vous pourrez acquérir la culture mathématique qui vous permettra de former votre propre perspective sur les mathématiques. Le fait d'acquérir une perspective personnelle sur les mathématiques que vous apprenez est sans doute l'un des buts à long terme que vous devez vous fixer.

(1) J. Lafontaine, *Introduction aux variétés différentielles*, EDP Sciences, 2010.

(2) F. Paulin, *Géométrie différentielle élémentaire*, notes de cours de niveau M1, FIMFA, ENS Ulm, 2006-2007, disponible en ligne :
`http://www.math.u-psud.fr/ paulin/notescours/cours_geodiff.pdf`

(3) C. Viterbo, *Notes de cours de Géométrie Différentielle*, notes de cours de niveau M1, FIMFA, ENS Ulm, 2013, disponible en ligne :
`http://www.math.ens.fr/ viterbo/Cours-Geo-Diff-2012/Poly-Geodiff-2013.pdf`

(4) S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine, *Géométrie riemannienne*, Springer, 1987, **Chapitre 1**.

(5) F. Warner, *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, Springer, GTM, 1983.

(6) J. Milnor, *Topology from the differentiable viewpoint*, Princeton Univ. Press, 1997 (1965).

(7) M. do Carmo, *Differential geometry of curves and surfaces*, Prentice-Hall, 1976.

(8) J. Milnor, *Morse theory*, Princeton Univ. Press, 1963.

(9) G. Bredon, *Topology and geometry*, Springer, GTM, 1994.

(10) M. Spivak, *Differential geometry*, Publish or Perish, 1979, 5 volumes.

(11) B. Dubrovin, A. Fomenko, S. Novikov, *Modern geometry*, Springer, GTM, 3 volumes.

La dernière référence est un ouvrage panoramique. Il est utile pour obtenir une vue d'ensemble, mais il n'y a que peu ou pas de démonstrations. Sa lecture doit être complétée par d'autres références.

1. Des sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ aux variétés abstraites

1.1. **Quelques notions de calcul différentiel revisitées.** Dans cette section je ne donne pas de définitions formelles, vous les avez tous vues en cours de calcul différentiel. Je donne plutôt quelques interprétations informelles, nécessairement subjectives.

Différentiabilité. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Une application $f : U \to \mathbb{R}^m$ est différentiable en un point $p \in U$ lorsqu'elle peut être "bien approchée" par une application linéaire au voisinage de p. "Bien" signifie ici que, localement près de p, notre application diffère d'une certaine application linéaire $df(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ par un terme à variation sous-linéaire :

$$f(p+h) = f(p) + df(p) \cdot h + o(|h|). \tag{1.1}$$

Pourquoi est-ce utile ? Parce-que les applications linéaires sont les plus simples (après les applications constantes) et donc, lorsque l'on veut comprendre une certaine application non-linéaire, il est utile de la comparer (localement) à celles-ci.

Cette démarche est centrale en analyse mathématique : certains objets "idéaux" sont plus simples à comprendre (n'est-ce pas ?). Dans l'étude d'un phénomène réaliste on procède par étapes : l'on étudie d'abord ces objets idéaux (les applications linéaires, ou bien les applications multi-linéaires), et l'on développe ensuite une "théorie d'approximation". C'est ce que vous avez fait durant une bonne partie de vos études de Licence : l'étude des applications linéaires entre espaces vectoriels constituait le sujet de l'Algèbre linéaire. L'étude des applications bilinéaires vous occupe encore en M1 (voir par exemple le cours d'Algèbre Géométrique). La théorie d'approximation correspondante était le sujet du cours de Calcul différentiel.

L'un des buts du cours de Géométrie différentielle est de vous apprendre à *visualiser* de manière avisée les objets et phénomènes que vous avez déjà rencontrés en cours de Calcul différentiel, en cours d'Equations différentielles, ou en cours d'Intégration.

D'un certain point de vue, aucune des notions que nous allons discuter dans ce cours n'est vraiment nouvelle. Que ça soit en cours de Calcul différentiel, ou bien d'Equations différentielles, ou bien d'Intégration, vous les avez toutes déjà rencontrées, parfois sous une forme dissimulée. Vous apprendrez seulement à *regarder* avec un œil éduqué ces objets que vous avez déjà rencontrés. Mais pour cela il faut apprendre un *langage nouveau*. Comme tout nouveau langage, celui-ci vous ouvrira les portes d'un monde très riche, et peut-être insoupçonné.

Difféomorphisme. La notion de difféomorphisme est subtile, mais nécessaire. Vous avez eu l'occasion de l'apprécier concrètement lorsque vous avez eu à *calculer des intégrales* ou bien lorsque vous avez eu à *résoudre des équations différentielles*. Le fait déroutant est que, pour des raisons historiques, on l'appelle dans ces situations communément *changement de variables*, ou encore *changement de coordonnées*. Mais c'est la même chose !

Voici un exemple classique en intégration : redémontrons l'égalité $\int_0^\infty e^{-\sigma t^2/2}dt = \sqrt{\pi/2\sigma}$ pour tout $\sigma > 0$. Notons $I = \int_0^\infty e^{-\sigma t^2/2}dt$. En utilisant le théorème de Fubini et ensuite le théorème de changement de variable dans une intégrale double on obtient

$$I^2 = \iint_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+} e^{-\sigma(x^2+y^2)/2}dxdy = \int_0^{\pi/2}\int_0^\infty re^{-\sigma r^2/2}drd\theta = \pi/2\sigma.$$

Une fonction peut paraître compliquée dans un système de coordonnées, mais elle prend une forme simple dans un autre système de coordonnées. Exemple : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. En coordonnées polaires cette fonction prend la forme simple $(r,\theta) \mapsto r$. Elle a l'air bien différente, mais c'est la même fonction ! Rendons explicite ce qui s'est passé : l'application $\phi :]0,\infty[\times]0,2\pi[\to \mathbb{R}^2 \setminus [0,\infty[\times\{0\}$, $(r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$ est un difféomorphisme et $f\circ\phi(r,\theta) = r$. Ainsi, la fonction non-linéaire f devient linéaire après composition par un difféomorphisme (nécessairement non-linéaire). Nous verrons d'autres tels exemples de *redressement*, ou de *forme normale*.

Lorsque nous les regardons en tant que changements de variables, les difféomorphismes sont des outils pour simplifier les calculs. Lorsque l'on essaie de comprendre certains objets *à difféomorphisme près*, l'on s'affranchit de formules explicites et les difféomorphismes deviennent un filtre qui fait ressortir leurs propriétés calitatives.

Un autre point de vue, moins intuitif, est *catégorique*. L'on définit plus bas la catégorie <u>VarDiff</u> des variétés lisses, avec morphismes donnés par l'ensemble des applications lisses. Les difféomorphismes sont les isomorphismes dans cette catégorie.

(3) *Théorème d'inversion locale*. Le théorème d'inversion locale est *le* théorème clé du calcul différentiel. Peut-être que le seul autre résultat qui le surpasse en importance est la règle de dérivation des fonctions composées : $d(f\circ g)(p) = df(g(p))\circ dg(p)$. Il est emblématique pour la philosophie du sujet : une information sur la différentielle en un point est traduite en une information locale sur l'objet non-linéaire sous-jacent.

(4) *Local vs. global*. On dit qu'une propriété est "locale" en un point si elle est valable sur un voisinage ouvert (non-spécifié, pensé comme étant

très petit) du point. L'étude des propriétés locales des applications lisses est le sujet du calcul différentiel (voir aussi le commentaire sur le théorème d'inversion locale). L'étude de leurs propriétés globales tient plus à la topologie différentielle.

1.2. **Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$.**

Définition 1.1. *Une* sous-variété lisse de $\mathbb{R}^n$ *est un sous-ensemble $M \subset \mathbb{R}^n$ possédant la propriété suivante : pour tout point $p \in M$ il existe un voisinage ouvert $p \in U \subset \mathbb{R}^n$, un entier $0 \le k \le n$, et une application différentiable $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ qui est un difféomorphisme sur son image, tels que*

$$\phi(M \cap U) = (\mathbb{R}^k \times \{0\}) \cap \phi(U).$$

On regarde M comme espace topologique avec la topologie induite.

Exercice 1. Montrer que l'entier k est bien défini en tout point p, et qu'il est constant au voisinage de p. On appelle cet entier *dimension de M en p.*

Lorsque l'entier k est le même pour tout point $p \in M$ on parle de *sous-variété de dimension k.*

Notation : $M^k \subset \mathbb{R}^n$ désigne une sous-variété de dimension k de $\mathbb{R}^n$. Ne pas confondre cette notation avec le produit cartésien $\underbrace{M \times \cdots \times M}_{k \ fois}$!

Réinterprétons la Définition 1.1 en termes d'équations. Soient

$$x^1, \ldots, x^n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

les fonctions coordonnées canoniques et notons $\phi^i := x^i \circ \phi$, $i = 1, \ldots, n$. Puisque $\mathbb{R}^k \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ peut être réécrit comme $\mathbb{R}^k \times \{0\} = \{x \in \mathbb{R}^n : x^{k+1} = \cdots = x^n = 0\}$, on obtient que

$$M \cap U = \{p \in U \ : \ \phi^{k+1}(p) = \cdots = \phi^n(p) = 0\}.$$

On voit qu'une sous-variété lisse de dimension k dans $\mathbb{R}^n$ peut être exprimée localement comme lieu commun d'annulation de $n-k$ fonctions lisses. On dit encore que

$$\phi^{k+1} = \cdots = \phi^n = 0$$

est un *système local d'équations pour M dans U*. On observe par ailleurs que la fonction $\bar{\phi} = (\phi^{k+1}, \ldots, \phi^n) : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ a une différentielle surjective en tout point. Ceci nous amène à donner une définition équivalente des sous-variétés.

Définition 1.2 (submersion)**.** *Une application $\bar{\phi} : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$ est une* submersion *(en un point $p \in U$) si $d\bar{\phi} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$ est surjective en tout point de U (respectivement en p). Le* rang de $\bar{\phi}$ *est défini comme étant $n-k$.*

Définition 1.3 (sous-variétés via submersions)**.** *Une sous-variété de dimension k de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble $M^k \subset \mathbb{R}^n$ qui s'écrit localement comme lieu d'annulation d'une submersion de rang $n-k$.*

Exercice 2. Montrez l'équivalence des définitions 1.1 et 1.3 en utilisant le théorème d'inversion locale. (Nous venons de démontrer une implication.)

Réinterprétons la Définition 1.1 en termes de paramétrisations. En considérant $\phi^{-1}|_{\phi(U)\cap(\mathbb{R}^k\times\{0\})}$ il en découle directement que toute sous-variété $M^k \subset \mathbb{R}^n$ est *localement paramétrée par un ouvert de* $\mathbb{R}^k$, à savoir pour tout $p \in M$ il existe un voisinage $p \in V \subset M$, un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ et une application lisse $\psi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ à différentielle injective, telle que $\psi(\Omega) = V$ et $\psi : \Omega \to V$ soit un homéomorphisme (on dit encore que ψ est un *homéomorphisme sur image*). Ceci nous amène à donner une troisième définition équivalente des sous-variétés.

Définition 1.4 (immersion, plongement)**.** *Une application $\psi : \Omega \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ est une* immersion *(en un point $q \in \Omega$) si sa différentielle $d\psi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ est injective en tout point de Ω (respectivement au point q). Le* rang *de ψ est défini comme étant k.*

Une application $\psi : \Omega \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ est un plongement *si c'est une immersion injective qui est un homéomorphisme sur son image.*

Noter que, alors que la notion d'immersion est locale, la notion de plongement est globale.

Définition 1.5. *Une sous-variété de dimension k de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble $M^k \subset \mathbb{R}^n$ qui s'écrit localement comme image d'un plongement de rang k.*

Exercice 3. Démontrer l'équivalence des définitions 1.1 et 1.5 en utilisant le théorème d'inversion locale. (Nous venons de démontrer une implication.)

Exercice 4. Montrer en utilisant les différentes définitions que le cercle $S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \subset \mathbb{C}$ est bien une sous-variété lisse de dimension 1. De même, la sphère $S^n := \{(x^1,\dots,x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x^1)^2 + \cdots + (x^{n+1})^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ est une sous-variété lisse de dimension n. L'ellipsoïde

$$E^n(a_1,\dots,a_{n+1}) = \{(x^1,\dots,x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \frac{(x^1)^2}{a_1^2} + \cdots + \frac{(x^{n+1})^2}{a_{n+1}^2} = 1\}$$

avec $a_1,\dots,a_{n+1} > 0$ est une sous-variété lisse de dimension n. Le cone

$$C := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2\}$$

n'est pas une sous-variété lisse, mais $C \setminus \{0\}$ est une sous-variété de dimension 2. L'union de la boule ouverte de rayon 1 dans $\mathbb{R}^3$ avec le cercle unité dans $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ n'est pas une sous-variété de $\mathbb{R}^3$. La boule unité fermée dans $\mathbb{R}^3$ n'est pas une sous-variété au sens des définitions précédentes (mais elle est une sous-variété à bord, au sens d'une définition plus générale que l'on donnera plus tard).

Exercice 5. Réinterpréter le théorème des fonctions implicites en termes de sous-variétés. Expliquer le sens du nom "fonctions implicites".

1.3. Trois digressions sur l'algèbre linéaire, les catégories, et les propriétés d'universalité.

Digression : équations paramétriques vs. équations cartésiennes pour des sous-espaces vectoriels. Les deux points de vue précédents sur les sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ sont des généralisations des deux points de vue familiers suivants concernant les sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel V : ceux-ci peuvent être décrits ou bien par des équations paramétriques, ou bien par des équations cartésiennes.

Étant donné un sous-espace $E^k \subset V^n$ (la notation signifie que E est de dimension k et V est de dimension n), le point de vue des équations paramétriques consiste à donner une application linéaire $\Psi : \mathbb{R}^N \to V$ avec $\operatorname{im}\Psi = E$. Une telle "paramétrisation linéaire" est injective précisément lorsque $N = k = \dim E$, et dans ce cas $\Psi : \mathbb{R}^k \to E$ est un isomorphisme linéaire.

Le point de vue des équations cartésiennes consiste à se donner une application linéaire $\Phi : V \to \mathbb{R}^N$ avec $\ker \Phi = E$. Un tel "système d'équations cartésiennes" est surjectif précisément lorsque $N = n - k$, la codimension de E, notée aussi $\operatorname{codim} E$. Dans ce cas l'application induite $\bar{\Phi} : V/E \to \mathbb{R}^{n-k}$ est un isomorphisme linéaire.

Ces deux points de vue sont *duaux* en un sens très précis. Une paramétrisation linéaire injective équivaut à la donnée de k éléments linéairement indépendants $\epsilon_1, \dots, \epsilon_k \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}, V)$ tels que $\operatorname{im}\epsilon_i \subset E$ pour tout i. Via l'isomorphisme canonique

$$\operatorname{Hom}(\mathbb{R}, V) \xrightarrow{\sim} V, \qquad \epsilon \mapsto e := \epsilon(1)$$

la condition $\operatorname{im}\epsilon_i \subset E$ se traduit par $e_i \in E$. En d'autres termes, se donner une paramétrisation linéaire injective de E revient à se donner une base $(e_1, \dots, e_k)$ de E.

La donnée d'un sytème minimal d'équations cartésiennes équivaut à la donnée de $n-k$ éléments linéairement indépendants $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-k} \in \operatorname{Hom}(V, \mathbb{R})$ tels que $E \subset \ker \alpha_i$ pour tout i. L'espace $\operatorname{Hom}(V, \mathbb{R})$ est appelé le *dual de* V et il est noté

$$V^* := \operatorname{Hom}(V, \mathbb{R}).$$

Soit $\pi : V \to V/E$ la projection canonique. Celle-ci induit un isomorphisme canonique

$$(V/E)^* \xrightarrow{\sim} \{\alpha \in V^* \,:\, E \subset \ker \alpha\}, \qquad a \mapsto \alpha := a \circ \pi.$$

Via cet isomorphisme, la donnée d'un système minimal d'équations cartésiennes équivaut à la donnée d'une base $(a_1, \ldots, a_{n-k})$ de $(V/E)^*$.

Fin de la digression.

Digression : isomorphismes canoniques, catégories. Arrêtons-nous un instant sur la notion d'*isomorphisme canonique* qui est apparue à plusieurs reprises dans la discussion précédente.

Définition informelle. Soit $\mathcal{C}$ un "contexte mathématique". Un objet est dit *canonique* si sa construction ne fait pas intervenir de choix extérieurs au contexte $\mathcal{C}$.

Dans une première approximation, lorsque le contexte mathématique auquel on fait référence est celui des espaces vectoriels, un objet est dit "canonique" si sa construction ne nécessite pas le choix d'une base. Nous rendrons rigoureuse cette définition plus bas, lorsque nous parlerons de *catégories.*

Exemple. Soit V un espace vectoriel de dimension finie. On a un isomorphisme canonique

$$V \xrightarrow{\cong} V^{**}, \qquad v \mapsto (\alpha \mapsto \alpha(v)) \qquad (\alpha \in V^*)$$

Exemple. Soit V est un espace vectoriel de dimension finie. Les espaces V et V^* sont isomorphes (puisque de même dimension), mais *pas* de manière canonique. Vous connaissez au moins un moyen de décrire un isomorphisme : on *choisit* une base (e_i) de V, on définit la *base duale* (e_i^*) de V^* par $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$, avec

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

le *symbole de Kronecker*, et l'on définit l'isomorphisme linéaire $V \xrightarrow{\simeq} V^*$ par $e_i \mapsto e_i^*$.

Une meilleure manière de décrire un isomorphisme entre V et V^* est de se donner une forme bilinéaire non-dégénérée sur V. Une forme bilinéaire $B \in \mathrm{Bil}(V \times V, \mathbb{R})$ est dite *non-dégénérée* si $B(v, \cdot) = 0$ implique $v = 0$. En présence d'un tel élément $B \in \mathrm{Bil}(V \times V, \mathbb{R}) \cong V^* \otimes V^*$, l'application $V \longrightarrow V^*$, $v \mapsto B(v, \cdot)$ est une application linéaire entre espaces de même dimension, et donc un isomorphisme linéaire de V sur V^*. L'isomorphisme entre V et V^* n'est pas canonique dans la catégorie des espaces vectoriels réels, mais il est canonique dans la catégorie des espaces vectoriels réels munis d'un produit scalaire.

Exercice 6. Démontrer que l'on a un isomorphisme canonique $\mathrm{Bil}(V \times V, \mathbb{R}) \cong V^* \otimes V^*$.

La notion de catégorie, I.

Définition 1.6. *Une* catégorie $\mathcal{C}$ *consiste en une collection d'*objets*, notée* $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$*, ainsi que de la donnée d'un* ensemble de morphismes $\mathcal{C}(x,y)$ *entre chaque deux objets* x *et* y *de* $\mathcal{C}$*. On requiert l'existence d'un morphisme distingué* $\mathbb{1}_x \in \mathcal{C}(x,x)$ *pour tout objet* x*, appelé* identité de x*, et d'une application de composition*

$$\mathcal{C}(x,y) \times \mathcal{C}(y,z) \to \mathcal{C}(x,z),$$

notée $(\alpha,\beta) \mapsto \alpha\cdot\beta$*, ou encore* $\beta\circ\alpha$*. On demande à ce que cette loi de composition soit associative, et l'on demande à ce que la composition à droite ou à gauche avec l'identité d'un objet soit l'identité.*

Lorsque je parlais plus haut de "contexte mathématique", ce qu'il faut lire désormais est "catégorie". Vous connaissez déjà de nombreux exemples.

— La catégorie $\underline{\mathrm{Set}}$ des ensembles, avec $\underline{\mathrm{Set}}\,(x,y) = y^x$.
— La catégorie $\underline{\mathrm{Top}}$ des espaces topologiques, avec $\underline{\mathrm{Top}}(x,y)$ l'ensemble des application continues de x vers y.
— La catégorie $\underline{\mathrm{Vect}}$ des espaces vectoriels de dimension finie, avec $\underline{\mathrm{Vect}}(x,y)$ l'ensemble des applications linéaires de x vers y.
— La catégorie $\underline{\mathrm{EuclVect}}$ des espaces vectoriels de dimension finie munis d'un produit scalaire, avec $\underline{\mathrm{EuclVect}}(x,y)$ l'ensemble des application linéaires de x vers y qui préservent le produit scalaire.
— La catégorie $\underline{\mathrm{Op}_n}$ des ouverts de $\mathbb{R}^n$, avec $\underline{\mathrm{Op}_n}(x,y)$ l'ensemble des applications lisses définies sur x à valeurs dans y.
— La catégorie $\underline{\mathrm{VarDiff}}$ des variétés différentielles lisses de dimension finie, avec $\underline{\mathrm{VarDiff}}(x,y)$ l'ensemble des applications lisses de x vers y. Ce dernier exemple est le sujet du cours.

Nous pouvons reformuler la discussion précédente dans les termes suivants : V est canoniquement isomorphe à V^{**} dans $\underline{\mathrm{Vect}}$, et V est canoniquement isomorphe à V^* dans $\underline{\mathrm{EuclVect}}$.

Exercice 7. Préciser le dernier énoncé en indiquant quel produit scalaire on met sur V^*.

FIN DE LA DIGRESSION.

DIGRESSION : OBJETS DÉFINIS PAR DES PROPRIÉTÉS D'UNIVERSALITÉ. Vous avez déjà rencontré de nombreux tels objets, même si vous n'avez pas toujours formulé les propriétés d'universalité correspondantes. Exemples dans la catégorie des espaces vectoriels : le quotient d'un espace vectoriel par un sous-espace, la somme directe, le produit direct, le produit tensoriel. L'idée de cette digression est que toute construction "canonique" dans $\underline{\mathrm{Vect}}$ produit un modèle pour un objet défini par une propriété d'universalité (objet universel).

Plutôt que de donner la définition précise de ce qu'est en général une propriété d'universalité, nous allons illustrer cette notion par un exemple détaillé. Nous donnons par ailleurs les propriétés d'universalité de la somme directe, respectivement du produit direct d'une famille d'espaces vectoriels.

Espace vectoriel quotient. Soit V un espace vectoriel et $E \subseteq V$ un sous-espace. Considérons sur V la relation d'équivalence $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in E$ et notons V/E l'ensemble des classes d'équivalence. Celui-ci porte une structure naturelle d'espace vectoriel, pour laquelle la projection $\pi : V \to V/E$ qui associe à un élément x sa classe d'équivalence $[x]$ est une application linéaire. L'espace vectoriel V/E est appelé *l'espace vectoriel quotient de V par E*. L'utilité de cette construction est donnée par le fait suivant :

Propriété d'universalité du quotient. Pour tout espace vectoriel W et toute application linéaire $f : V \to W$ telle que $\ker f \supseteq E$, il existe une unique application linéaire $\bar{f} : V/E \to W$ telle que $\bar{f} \circ \pi = f$.

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"] & W \\
V/E \arrow[ur, dotted, "\exists! \bar{f}"'] &
\end{tikzcd}
$$

Prenons maintenant un point de vue légérement différent. Appelons *un quotient de V par E* une paire $(\mathcal{Q}, \pi)$, avec $\mathcal{Q}$ un espace vectoriel et $\pi : V \to \mathcal{Q}$ une application linéaire telle que $\ker \pi = E$, qui vérifie la *propriété d'universalité* suivante : pour tout espace vectoriel W et toute application linéaire $f : V \to W$ telle que $\ker f \supseteq E$, il existe une unique application linéaire $\bar{f} : \mathcal{Q} \to W$ telle que $f = \bar{f} \circ \pi$.

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"] & W \\
\mathcal{Q} \arrow[ur, dotted, "\exists! \bar{f}"'] &
\end{tikzcd}
$$

Évidemment, *le* quotient V/E vérifie cette propriété d'universalité. Mais y aurait-il d'autres quotients ? La réponse est fournie par la proposition suivante, qui montre que la construction est parfaitement déterminée.

Proposition 1.7. *Un quotient de V par E est unique à isomorphisme unique près, c'est-à-dire si $(\mathcal{Q}, \pi)$ et $(\mathcal{Q}', \pi')$ sont deux quotients de V par E, il existe un isomorphisme canonique $\mathcal{Q} \xrightarrow{\cong} \mathcal{Q}'$.*

Démonstration. Appliquons la propriété universelle de $(\mathcal{Q}, \pi)$ avec $W = \mathcal{Q}'$ et $f = \pi'$. L'on trouve une unique application $\bar{\pi}' : \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}'$ telle que $\bar{\pi}' \circ \pi = \pi'$. Appliquons ensuite la propriété universelle de $(\mathcal{Q}', \pi')$ avec $W = \mathcal{Q}$ et $f = \pi$. L'on trouve une unique application $\bar{\pi} : \mathcal{Q}' \to \mathcal{Q}$ telle que $\bar{\pi} \circ \pi' = \pi$. En particulier $(\bar{\pi} \circ \bar{\pi}') \circ \pi = \pi$. Puisque $\mathrm{Id}_{\mathcal{Q}} \circ \pi = \pi$, l'unicité dans la propriété universelle de $(\mathcal{Q}, \pi)$ avec $W = \mathcal{Q}$ et $f = \pi$ montre que $\bar{\pi} \circ \bar{\pi}' = \mathrm{Id}_{\mathcal{Q}}$. De même l'on démontre que $\bar{\pi}' \circ \bar{\pi} = \mathrm{Id}_{\mathcal{Q}'}$, de sorte que $\bar{\pi}'$ et $\bar{\pi}$ sont des isomorphismes canoniquement déterminés, inverses l'un de l'autre.

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\pi'"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathcal{Q}' \\
\mathcal{Q} \arrow[ur, dotted, "\exists! \bar{\pi}'"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\pi'"'] & \mathcal{Q} \\
\mathcal{Q}' \arrow[ur, dotted, "\exists! \bar{\pi}"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathcal{Q} \\
\mathcal{Q} \arrow[ur, "\mathrm{Id} = \bar{\pi} \circ \bar{\pi}'"'] &
\end{tikzcd}
$$

□

L'on lit la proposition précédente en disant que *la propriété d'universalité détermine le quotient à isomorphisme unique près.* La construction du quotient V/E montre l'existence du quotient. La propriété d'universalité met par ailleurs en avant la projection canonique $\pi : V \to V/E$, que nous avons par ailleurs déjà utilisée dans la digression sur la dualité.

Somme directe et produit direct. Soit (V_i) une famille d'espaces vectoriels.

Propriété d'universalité de la somme directe. Une somme directe des V_i est un espace vectoriel $\mathcal{Q}$ muni d'application linéaires $incl_i : V_i \to \mathcal{Q}$ qui satisfont la propriété suivante : pour tout espace vectoriel W et toute collection d'applications linéaires $f_i : V_i \to W$, il existe une unique application linéaire $F : \mathcal{Q} \to W$ telle que $F \circ incl_i = f_i$ pour tout i.

Cette propriété d'universalité détermine $\mathcal{Q}$ à isomorphisme canonique près. Un modèle explicite est donné par $\mathcal{Q} = \oplus_i V_i$, dont les éléments sont les sommes formelles *finies* d'éléments appartenant aux V_i. Les applications $incl_i$ sont les inclusions canoniques, et l'application F déterminée par des $f_i : V_i \to W$ est notée $\oplus_i f_i$.

$$
\begin{tikzcd}
V_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "incl_i"'] & W \\
\oplus_i V_i \arrow[ur, "\oplus_i f_i"'] &
\end{tikzcd}
$$

Propriété d'universalité du produit direct. Un produit direct des V_i est un espace vectoriel $\mathcal{Q}$ muni d'applications linéaires $proj_i : \mathcal{Q} \to V_i$ qui satisfont la propriété suivante : pour tout espace vectoriel W et toute collection d'applications linéaires $g_i : W \to V_i$, il existe une unique application linéaire $G : W \to \mathcal{Q}$ telle que $proj_i \circ G = g_i$ pour tout i.

Comme nous avons désormais l'habitude, cette propriété d'universalité détermine $\mathcal{Q}$ à isomorphisme canonique près. Un modèle explicite est donné par $\mathcal{Q} = \prod_i V_i$, dont l'ensemble sous-jacent est le produit cartésien des V_i. Les applications $proj_i$ sont les projections canoniques, et l'application G déterminée par des $g_i : W \to V_i$ est notée $\prod_i g_i$.

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "\prod_i g_i"] \arrow[dr, "g_i"'] & \prod_i V_i \arrow[d, "proj_i"] \\ & V_i \end{tikzcd}$$

Remarque. Les opérations de somme directe et celle de produit direct peuvent être interprétées comme étant duales l'une de l'autre. La somme directe est un espace *depuis lequel* on peut définir des morphismes, le produit direct est un espace *vers lequel* on peut définir des morphismes. Un autre point de vue est celui des isomorphismes canoniques

$$\mathrm{Hom}(\bigoplus_i V_i, W) \cong \prod_i \mathrm{Hom}(V_i, W),$$

et en particulier

$$(\bigoplus_i V_i)^* \cong \prod_i V_i^*.$$

FIN DE LA DIGRESSION.

1.4. **Immersions et submersions.** Dans cette section nous donnons deux théorèmes de forme normale qui sont emblématiques de l'utilisation des difféomorphismes, et du théorème d'inversion locale.

Théorème 1.8 (Forme normale locale pour les immersions)**.** *Soit*

$$\psi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$$

une immersion. Modulo composition par un difféomorphisme local au but, l'immersion s'écrit localement

$$\psi : x \mapsto (x, 0).$$

Démonstration. Détaillons l'énoncé du théorème. Nous souhaitons démontrer l'énoncé suivant : pour tout $x_0 \in \Omega$, il existe un ouvert $x_0 \in \Omega' \subseteq \Omega$ et un difféomorphisme $f : U \xrightarrow{\simeq} f(U)$ défini sur un voisinage ouvert U de $p_0 = \psi(x_0)$, tels que $f \circ \psi(x) = (x, 0)$ pour tout $x \in \Omega'$.

Soit $\psi = (\psi^1, \ldots, \psi^n)$. Par hypothèse $d\psi(x_0)$ est injective, et l'on peut supposer sans perte de généralité que les dérivées $(d\psi^1, \ldots, d\psi^k)$

sont linéairement indépendantes au point x_0 (dans le cas contraire on compose par une permutation des coordonnées au but). La fonction $F : \Omega' \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^n$ définie par

$$F(x, y) := \psi(x) + (0, y)$$

a une dérivée inversible en $(x_0, 0)$. C'est donc un difféomorphisme local. Le difféomorphisme local $f := F^{-1}$ est le changement de variable recherché. $\square$

Théorème 1.9 (Forme normale locale pour les submersions)**.** *Soit*

$$\bar{\phi} : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-k}$$

une submersion. Modulo composition par un difféomorphisme local à la source, la submersion s'écrit localement

$$\bar{\phi} : (x, y) \mapsto y.$$

Démonstration. Supposons sans perte de généralité que les dérivées partielles $(\partial\bar{\phi}/\partial x^{k+1}, \ldots, \partial\bar{\phi}/\partial x^n)$ sont linéairement indépendantes au point (x_0, y_0). L'application $F : U \to \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ définie par

$$F(x, y) := (x - x_0, 0) + \bar{\phi}(x, y)$$

a une différentielle inversible en (x_0, y_0). C'est donc un difféomorphisme local et son inverse satisfait aux conclusions du théorème. $\square$

Alors que nous les avons caractérisées en termes de submersions locales, les sous-variétés apparaissent souvent comme fibres de submersions globales.

Définition 1.10. *Soit $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application lisse.*

- *Un point $y \in \mathbb{R}^m$ est dit* valeur régulière *si f est une submersion en tout point de la fibre $f^{-1}(y)$. (Ceci vaut en particulier si $f^{-1}(y) = \emptyset$.)*
- *Un point $y \in \mathbb{R}^m$ est dit* valeur critique *si ce n'est pas une valeur régulière, ou encore s'il existe un point $x \in f^{-1}(y)$ tel que $df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ne soit pas surjective.*
- *Un tel point x est appelé* point critique.

L'on remarquera le fait que, lorsque $n < m$, l'image de f est nécessairement constituée de valeurs critiques. Il découle de la discussion précédente que la préimage $f^{-1}(y)$ d'une valeur régulière d'application lisse $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $n \geq m$ est une sous-variété de dimension $n - m$.

Théorème 1.11 (Sard)**.** *Les valeurs critiques d'une application lisse $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ forment un ensemble de mesure nulle. En particulier, les valeurs régulières sont denses dans $\mathbb{R}^m$.* $\square$

Une fonction peut être comprise via l'étude de ses ensembles de niveau. Pour une fonction lisse, un ensemble de niveau typique sera une sous-variété. Ceci fournit une nouvelle motivation pour l'étude des sous-variétés, en tant qu'objets géométriques qui permettent d'étudier les fonctions. Cette idée a été incarnée par Marston Morse dans ce que l'on appelle aujourd'hui *théorie de Morse*, avec un succès phénoménal (voir le livre de Milnor, *Morse Theory*). L'on discutera plus tard les premiers éléments de théorie de Morse, et l'on verra qu'elle est aussi en lien avec l'idée de *discrétisation* des fonctions.

1.5. **Variétés abstraites, ou non-plongées.** Nous avons déjà établi un parallèle entre les différentes manières de définir un sous-espace vectoriel et les différentes manières de définir une sous-variété. L'étude des sous-variétés est en quelque sorte similaire à l'étude des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$. Tout comme en algèbre linéaire la vraie force de la théorie ressort lorsque l'on utilise une définition qui nous affranchit de l'espace ambient et des coordonnées, il en est de même pour les variétés.

La remarque suivante peut sembler inoffensive mais elle débouche directement sur la définition d'une variété abstraite. Soit $M^k \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété de dimension k. Soient $\phi_i : U_i \subset \mathbb{R}^n \to \phi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$ deux difféomorphismes de redressement comme dans la Définition 1.1, définis au voisinage d'un point $p \in M$. Alors

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\simeq} \phi_2(U_1 \cap U_2)$$

est un difféomorphisme, et en particulier

$$\begin{aligned} \phi_2|_{M\cap U_2} \circ \phi_1|_{M\cap U_1}^{-1} : \phi_1((M \cap U_1) \cap (M \cap U_2)) &\subseteq \mathbb{R}^k \times \{0\} \\ \xrightarrow{\simeq} \phi_2((M \cap U_1) \cap (M \cap U_2)) &\subseteq \mathbb{R}^k \times \{0\} \end{aligned}$$

est un difféomorphisme. L'avantage de cette dernière formule est qu'elle ne fait intervenir que des objets qui sont définis sur M, et non pas sur (des ouverts de) l'espace ambiant.

Définition 1.12. *Une variété de dimension k est un espace topologique M muni d'une famille $\{(U_i, \phi_i)\}_{i\in I}$ de paires (U_i, ϕ_i) telles que :*
— *la famille (U_i) est un recouvrement ouvert de M ;*
— *chaque $\phi_i : U_i \to \phi_i(U_i) \subseteq \mathbb{R}^k$ est un homéomorphisme sur son image, qui est un ouvert de $\mathbb{R}^k$;*
— *pour tous $i, j \in I$ l'application*

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \xrightarrow{\simeq} \phi_j(U_i \cap U_j)$$

est un difféomorphisme.

Définition 1.13. *La famille (U_i, ϕ_i) est appelé* atlas*, et chaque paire (U_i, ϕ_i) est appelée* carte, ou carte locale*. Les difféomorphismes $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$ sont appelées* applications de changement de carte*, ou* fonctions de transition.

L'exemple suivant justifie la terminologie cartographique.

Exemple 1.14. Soit

$$S^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Soient $N := (0, 0, 1)$ le pôle Nord et $S := (0, 0, -1)$ le pôle Sud. On définit deux cartes

$$\phi_N : S^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^2, \qquad \phi_S : S^2 \setminus \{S\} \to \mathbb{R}^2$$

par *projection stéréographique* : $\phi_N(p)$ est l'unique point d'intersection de la demi-droite $[N, p)$ avec le plan $\mathbb{R}^2 \times \{0\} \equiv \mathbb{R}^2$, et $\phi_S(q)$ est l'unique point d'intersection de la demi-droite $[Sq)$ avec $\mathbb{R}^2 \times \{0\} \equiv \mathbb{R}^2$. Montrer que ces deux cartes définissent un atlas sur S^2.

Le calcul différentiel peut être transféré aux variétés. Plus précisément, toute notion de calcul différentiel à caractère local peut être formulée sur les variétés. Par exemple, une application continue $f : M \to N$ entre deux variétés est dite *lisse* si l'application $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ est lisse pour toutes deux cartes ϕ et ψ sur M et N respectivement !

Exercice 8. Une application continue $f : M \to N$ est lisse si et seulement si pour tout point $p \in M$ *il existe* deux cartes ϕ et ψ définies au voisinage de p et $f(p)$ respectivement, telles que $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ soit lisse.

Puisque le caractère lisse d'une application est invariant par composition avec des difféomorphismes à la source et au but, il est souvent commode de penser à un atlas donné $\{(U_i, \phi_i)\}$ comme ayant été élargi de manière à contenir toutes les cartes (U, ϕ) compatibles simultanément avec toutes les (U_i, ϕ_i). Un tel atlas est dit *maximal*. L'atlas maximal associé à un atlas donné $\{(U_i, \phi_i)\}$ contient en particulier toutes les restrictions des ϕ_i aux ouverts de U_i.

Exercice 9. Donner les définitions de submersion, immersion, difféomorphisme, point critique dans les contexte des variétés. Formuler et démontrer des théorèmes d'inversion locale, de fonctions implicites, de forme normale pour immersions et submersions.

Les variétés sont un exemple d'*objet mathématique défini à partir d'un modèle local*. Vous rencontrerez ce genre de construction dans de nombreux contextes, dont voici une première liste. Les *variétés complexes*, qui sont des objets centraux en analyse complexe, sont modelées sur des ouverts de $\mathbb{C}^n$ en demandant que les applications de changement de carte soient des biholomorphismes (applications bijectives, dérivables au sens complexe, avec inverse dérivable au sens complexe). Les *variétés de Banach* sont modelées sur des ouverts dans des espaces de Banach, en demandant que les applications de changement de carte soient des difféomorphismes. Elles jouent un rôle clé dans l'analyse des équations aux dérivées partielles non-linéaires de nature géométrique (Cauchy-Riemann, Yang-Mills, Yamabe, ...). Les *schémas* de la géométrie algébrique peuvent être pensés comme étant des espaces modelés localement sur le spectre d'anneaux commutatifs.

1.6. **Fonctions de troncature lisses. Plongements dans des espaces euclidiens.** Le fait d'avoir dégagé une définition abstraite des variétés différentielles représente certainement un gain conceptuel : nous pourrons les reconnaître dans des situations qui n'ont *a priori* rien à voir avec l'espace euclidien. Mais l'on doit aussi se demander si la classe d'objets que l'on peut définir de cette manière est strictement plus générale que celle des sous-variétés de $\mathbb{R}^n$. Le but de cette section est de montrer que la réponse est négative pourvu que l'on travaille avec des espaces topologiques séparés et à base dénombrable.

Nous utiliserons la terminologie topologique suivante.

Nous dirons qu'un espace topologique est *séparé* si pour tous deux points distincts $x \neq y$ il existe des voisinages ouverts $U \ni x$ et $V \ni y$ tels que $U \cap V = \emptyset$. Nous dirons qu'un espace topologique est *à base dénombrable* s'il existe une famille dénombrable d'ouverts $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ayant la propriété suivante : pour tout point x et tout ouvert $V \ni x$, il existe i avec $x \in U_i \subset V$. De manière équivalente, tout ouvert peut être écrit comme réunion d'éléments de la famille (U_i). Nous dirons qu'un espace topologique est *compact* si tout recouvrement ouvert admet un sous-recouvrement fini. Nous dirons qu'un ouvert $U \subset X$ d'un espace topologique X est *relativement compact* si son adhérence est un ensemble compact.

Exemple. L'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ est à base dénombrable. En effet, l'on peut choisir comme base l'ensemble des boules ouvertes de rayon rationnel centrées aux points de $\mathbb{Q}^n$. Par conséquent, tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ est à base dénombrable.

Exemple. Une variété compacte M est à base dénombrable. En effet, recouvrons M par un nombre fini d'ouverts de carte (U_k, ϕ_k). Choisissons une base dénombrable pour chaque $\phi_k(U_k) \subset \mathbb{R}^n$ et transportons-là en une base dénombrable $\mathcal{B}_k$ pour U_k. Le lecteur vérifiera facilement que $\bigcup_k \mathcal{B}_k$ est une base dénombrable pour la topologie de M. De manière similaire, une variété qui possède un atlas dénombrable est à base dénombrable.

Exercice 10. (Re)démontrer les énoncés suivants :

— *compact dans séparé est fermé* ;

— *fermé dans compact est compact.*

Théorème 1.15 (Whitney, *Annals of Math.* (2) 37 (1936))**.** *Une variété de dimension n séparée et à base dénombrable admet un plongement dans $\mathbb{R}^{2n+1}$.*

Exercice 11. Réciproquement, si une variété admet un plongement dans un espace euclidien alors elle est séparée et à base dénombrable.

Convention : dans la suite du cours toutes les variétés seront supposées séparées et, si elles sont non-compactes, à base dénombrable. Pour alléger la lecture nous ne ferons désormais plus mention explicite de ces hypothèses.

Comme nous le verrons plus bas, le fait d'imposer ces deux hypothèses de nature topologique présente de multiples avantages, qui vont bien au-delà du simple fait de pouvoir plonger les variétés dans des espaces euclidiens : existence de fonctions de troncature, existence de partitions de l'unité, possibilité de recoller des objets locaux en des objets globaux, métrisabilité.

Nous allons démontrer plus tard dans le cours le théorème de Whitney dans le cas des variétés compactes (séparées !) comme une application du théorème de Sard. Dans cette section nous faisons un premier pas dans cette direction en démontrant le résultat plus faible suivant.

Théorème 1.16. *Toute variété compacte se plonge dans un espace euclidien de dimension assez grande.*

La preuve de ce résultat repose sur la construction de fonctions de troncature. Étant donné un espace topologique X et une fonction continue $f : X \to \mathbb{R}$, le *support de* f est défini comme étant l'adhérence dans X du lieu de non-annulation de f :

$$\mathrm{supp}(f) := \overline{\{x \in X \ : \ f(x) \neq 0\}}.$$

Lorsque $X \subset Y$ est un sous-espace topologique, on note

$$\mathrm{supp}_Y(f)$$

l'adhérence dans Y du lieu de non-annulation de f.

Lemme 1.17. *Fixons* $0 < r < R$. *Il existe une fonction lisse* $f = f_{r,R} : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ *telle que*

$$f|_{B^n(r)} = 1, \qquad \mathrm{supp}(f) \subset B^n(R).$$

Démonstration. Il suffit de construire une fonction lisse $g : [0,\infty[\to [0,1]$ telle que $g(t) = 1$ pour $t < r$ et $\mathrm{supp}(g) \subset [0,R[$. Dans ce cas $f(x) := g(\|x\|)$ vérifie les conditions du lemme.

On commence par la fonction “test”

$$a_R(t) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{R^2-t^2}}, & |t| < R, \\ 0, & |t| \geq R. \end{cases}$$

Sa primitive normalisée $A_R(t) := \int_{-\infty}^t a_R(\tau)\, d\tau / \int_{-\infty}^{\infty} a_R(\tau)\, d\tau$ vérifie

$$A_R(t) = 0, \quad t \leq -R \qquad \text{et} \qquad A_R(t) = 1, \quad t \geq R.$$

La fonction $B_R(t) := 1 - A_R(t)$ vérifie

$$B_R(t) = 1, \quad t \leq -R \qquad \text{et} \qquad B_R(t) = 0, \quad t \geq R.$$

(Son graphe est symétrique au graphe de A_R par rapport à la droite $y = 1/2$.) Finalement on translate et on “comprime” ce graphe en considérant $B_{r,R}(t) := B_R(\frac{R-r}{2R}t - \frac{(R-r)r}{2R} - R)$. Cette fonction vérifie

$$B_{r,R}(t) = 1, \quad t \leq r \qquad \text{et} \qquad B_{r,R}(t) = 0, \quad t \geq R.$$

Ainsi $g := B_{r,R}|_{[0,\infty[}$ convient. □

Lemme 1.18. *Soit M une variété et $U \subset M$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction lisse telle que*

$$\mathrm{supp}_M(f) \subset U.$$

Alors l'extension de f par zéro, définie explicitement par

$$\tilde{f} : M \to \mathbb{R}, \qquad p \mapsto \begin{cases} f(p), & p \in U, \\ 0, & p \notin U, \end{cases}$$

est une fonction lisse.

Démonstration. Il faut montrer que pour tout point $p \in M$ il existe une carte (V, ϕ) contenant p telle que $\tilde{f} \circ \phi^{-1} : \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ soit lisse. Si $p \in U$ on prend une carte quelconque (V, ϕ) avec $p \in V \subset U$, et $\tilde{f}|_V = f|_V$ est lisse. Si $p \notin U$ alors $p \in \mathrm{supp}_M(f)^c$. Celui-ci est un ouvert sur lequel $\tilde{f}$ est identiquement nulle, donc lisse. □

L'on a clairement égalité

$$\mathrm{supp}(f) = \mathrm{supp}_M(f)$$

dès que $\mathrm{supp}(f)$ est fermé dans M. En particulier, lorsque la variété ambiante M est séparée, comme nous l'avons désormais supposé, l'on a égalité dès que $\mathrm{supp}(f)$ est compact dans M ou, de manière équivalente, dans U. Nous avons donc démontré :

Corollaire 1.19. *Soit M une variété (séparée !) et $U \subset M$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction lisse à support compact. Alors l'extension de f à M par zéro est lisse.* □

Ce résultat est faux dès que la variété M n'est pas séparée (cf. Exercice 12 plus bas). Par conséquent, tous les énoncés du reste de cette section sont également faux pour des variétés non-séparées.

Lemme 1.20. *Soient $K \subset U \subseteq M$ avec M variété, K compact et U ouvert. Il existe une fonction lisse $f : M \to [0, 1]$ avec*

$$f|_K = 1, \qquad \mathrm{supp}(f) \subset U.$$

De plus on peut choisir f à support compact.

Démonstration. Soit (U_i, ϕ_i) une famille finie de cartes sur M qui recouvre K. L'on peut supposer sans perte de généralité que $\mathrm{im}\,(\phi_i) = B^n(1)$ et que les ouverts $U_i' := \phi_i^{-1}(B^n(\frac{1}{2}))$ recouvrent K (exercice !). Posons

$$f_i : U_i \to [0,1], \qquad f_i := f_{\frac{1}{2},\frac{3}{4}} \circ \phi_i.$$

Par le Corollaire 1.21 l'extension $\tilde{f}_i$ de f_i à M par 0 est lisse. Finalement, l'application

$$f := 1 - \prod_i (1 - \tilde{f}_i)$$

satisfait aux conditions du lemme. □

Corollaire 1.21 (Principe d'extension après restriction)**.** *Soit M une variété, $U \subset M$ un ouvert et $V \subset U$ un ouvert relativement compact. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction lisse. Il existe une fonction lisse $H : M \to \mathbb{R}$ telle que $H|_V = h$.*

Démonstration. Par le lemme 1.20 il existe une fonction lisse à support compact $f : U \to [0,1]$ telle que $f|_{\overline{V}} = 1$. La fonction $f \cdot h : U \to \mathbb{R}$ coïncide avec h sur V et son support est contenu dans celui de f. Il est donc compact dans U et on peut donc étendre cette fonction par zéro à une fonction lisse sur M. □

Le Lemme 1.20 et le Corollaire 1.21 admettent les généralisations suivantes (pour lesquelles l'hypothèse de base dénombrable est essentielle). Vous pourrez consulter le livre de Warner, *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups* pour les preuves.

Lemme 1.22. *Soient $A \subset U \subseteq M$ avec M variété, A fermé et U ouvert. Il existe une fonction lisse $f : M \to [0,1]$ avec*

$$f|_A = 1, \qquad \mathrm{supp}(f) \subset U.$$

□

Corollaire 1.23. *Soit M une variété et $V \subset U \subset M$ deux ouverts avec $\overline{V} \subset U$. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction lisse. Il existe une fonction lisse $H : M \to \mathbb{R}$ telle que $H|_V = h$.* □

Preuve du théorème 1.16.

Idée de la preuve : la seule information dont nous disposons sur M est l'existence d'un ensemble fini de cartes qui recouvrent M. En mettant toutes les cartes ensemble on obtient certainement une application injective sur M à valeurs dans un espace euclidien. Mais il faut d'abord étendre les cartes à des fonctions lisses sur M. À ce stade le principe d'extension après restriction est fort utile.

Soit (U_i, ϕ_i), $i = 1, \ldots, N$ un atlas fini tel que $\mathrm{im}\,(\phi_i) = B^n(1)$ et les $V_i := \phi_i^{-1}(B^n(\frac{1}{2}))$ recouvrent M. L'on trouve par le lemme 1.20 des fonctions lisses à support compact $f_i : U_i \to [0,1]$ telles que $f_i|_{\overline{V_i}} = 1$. L'on peut alors regarder chaque application $f_i\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ comme une fonction lisse sur M, en l'étendant par 0. De même pour chaque f_i. On considère alors l'application

$$F : M \to \mathbb{R}^{nN+N}, \qquad f = (f_1\phi_1, \ldots, f_N\phi_N, f_1, \ldots, f_N).$$

C'est une application lisse. C'est aussi une immersion puisque tout point appartient à un certain ouvert V_i, où la i-ème composante de F vaut ϕ_i, qui est un difféomorphisme sur image. L'injectivité découle du fait suivant : si p et q sont deux points tels que $F(p) = F(q)$, on a en particulier $f_i(p) = f_i(q)$ pour tout i. Soit i tel que $p \in V_i$, de sorte que $f_i(p) = 1$. Alors $f_i(q) = 1$, ce qui implique $q \in U_i$. Ainsi $\phi_i(p) = \phi_i(q)$, et par conséquent $p = q$ puisque ϕ_i est injective sur son domaine de définition. □

Exercice 12 (Exemple de variété non-séparée)**.** Soient A_1, A_2 deux copies de $[0, \infty[$ et considérons

$$M :=]-\infty, 0[\cup A_1 \cup A_2.$$

Munir M d'une topologie telle que les identifications naturelles $\phi_i :]-\infty, 0[\cup A_i \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}$, $i = 1, 2$ soient des homéomorphismes. Montrer que ϕ_1, ϕ_2 définissent un atlas sur M. Montrer que M n'est pas séparée (plus précisément, les points qui ne peuvent pas être séparés sont les deux copies de 0 dans A_1 et A_2). Donner un exemple de fonction lisse à support compact dans $]-\infty, 0[\cup A_1$ dont l'extension par 0 à M n'est pas lisse.

Remarque (à propos des partitions de l'unité). Il est coutumier de parler de partitions lisses de l'unité lorsque l'on construit des fonctions de troncature, puisque celles-ci constituent le point clé. Nous allons remettre cette discussion à plus tard, lorsque nous aurons à disposition la notion d'espace tangent et de champ de vecteurs, afin de pouvoir illustrer les partitions de l'unité en tant qu'outil de recollement d'objets locaux en des objets définis globalement. Pour un aperçu avant la lettre voir par exemple le livre de Warner, *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*.

1.7. **Espace tangent. Application tangente.** Dans cette section nous définissons l'espace tangent T_pM à une variété M en un point $p \in M$, ainsi que la différentielle

$$df(p) : T_pM \to T_{f(p)}N$$

d'une application lisse $f : M \to N$. Nous donnons trois points de vue équivalents que nous relions aussi aux sous-variétés. Ces trois points de vue sont à mettre en parallèle avec les trois définitions équivalentes d'une sous-variété que nous avons abordé dans la section 1.2.

I. Le point de vue des cartes. Un point de départ pour aboutir à la notion d'espace tangent est le souhait de définir une notion de différentielle pour une application lisse. Si l'on essaie de partir de la définition de la lissité en termes de cartes, l'on rencontre tout de suite le problème suivant : étant donnée une application lisse $f : M^m \to N^n$ et des cartes (U, ϕ), (V, ψ) à la source et au but, la différentielle de $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ est une application linéaire $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ qui dépend évidemment du choix de cartes (à travers leurs différentielles) ! Pour récupérer un objet intrinsèque nous sommes naturellement amenés à nous affranchir des bases canoniques sur $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.24. *Soit M^m une variété de dimension m munie d'un atlas $\{(U_i, \phi_i)\}$. Pour tout $p \in M$ on définit* l'espace tangent en p à M, *noté T_pM, comme étant l'espace vectoriel réel de dimension m*

$$T_pM := \coprod_{i\,:\,U_i \ni p} \{i\} \times \mathbb{R}^m / \sim$$

où

$$(i, \xi) \sim (j, \eta) \Leftrightarrow d(\phi_j \circ \phi_i^{-1})(x)\xi = \eta, \qquad x = \phi_i(p).$$

La structure d'espace vectoriel sur T_pM est donnée par

$$\lambda \cdot [(i, \xi)] := [(i, \lambda\xi)], \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}^m,$$

$$\begin{aligned} [(i, \xi)] + [(j, \xi')] &:= [(j, d(\phi_j \circ \phi_i^{-1})(x)\xi + \xi')], \qquad x = \phi_i(p), \\ &= [(i, \xi + d(\phi_i \circ \phi_j^{-1})(y)\xi')], \qquad y = \phi_j(p). \end{aligned}$$

Définition 1.25. *Soit $f : M^m \to N^n$ une application lisse et $p \in M$. La* différentielle de f en p, ou application tangente de f en p, *est l'application linéaire*

$$df(p) : T_pM \to T_{f(p)}N, \text{ ou } f_{*p} : T_pM \to T_{f(p)}N,$$

définie par

$$df(p)[(i, \xi)] := [(j, d(\psi_j \circ f \circ \phi_i^{-1})(x)\xi)], \qquad x = \phi_i(p),$$

où ϕ_i est une carte locale sur M au voisinage de p et ψ_j est une carte locale sur N au voisinage de $f(p)$.

Vous devez – et pouvez ! – vérifier que ces définitions sont cohérentes (bonne définition de la structure d'espace vectoriel, indépendance de la définition de la différentielle par rapport au choix de cartes etc.). Ces définitions sont motivées par le souhait de définir *l'espace tangent en p à M comme un espace vectoriel de dimension m qui constitue la source naturelle de la différentielle d'une application lisse.* Celui-ci ne possède pas de base privilégiée ; un choix de carte fournit une base qui correspond à la base canonique de $\mathbb{R}^m$, mais cette base dépend du choix de carte.

Exercice 13 (composition des différentielles)**.** Soient $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$ des applications lisses et $p \in M$. Montrer l'égalité

$$d(g \circ f)(p) = dg(f(p)) \circ df(p).$$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "g\circ f"] \arrow[dr, "f"'] & & P \\ & N \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T_pM \arrow[rr, "d(g\circ f)(p)"] \arrow[dr, "df(p)"'] & & T_{g(f(p))}P \\ & T_{f(p)}N \arrow[ur, "dg(f(p))"'] & \end{tikzcd}$$

Une première intuition géométrique sur l'espace tangent nous est donnée lorsque M est une sous-variété d'un espace euclidien.

Proposition 1.26. *Soit $M^k \subseteq \mathbb{R}^n$ une sous-variété. Étant donné $p \in M$ on choisit un système submersif d'équations locales $\bar{\phi} : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ avec $p \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert et $M \cap U = \bar{\phi}^{-1}(0)$.*

(1) Le sous-espace vectoriel

$$\ker d\bar{\phi}(p) \subseteq \mathbb{R}^n$$

ne dépend pas du choix de $\bar{\phi}$.

(2) Il existe un isomorphisme canonique

$$T_pM \xrightarrow{\cong} \ker d\bar{\phi}(p).$$

Démonstration. (1) Nous savons que l'on peut écrire localement M au voisinage de p comme image d'un plongement ψ de rang k. Notons $p = \psi(x)$. Puisque $\bar{\phi} \circ \psi \equiv 0$ on obtient $d\bar{\phi}(p) \circ d\psi(x) = 0$, de sorte que $\operatorname{im} d\psi(x) \subseteq \ker d\bar{\phi}(p)$. Or nous savons que ces deux espaces vectoriels sont de même dimension égale à k, d'où $\operatorname{im} d\psi(x) = \ker d\bar{\phi}(p)$. Ce raisonnement vaut pour tout choix de $\bar{\phi}$ à ψ fixé et démontre l'indépendance de $\ker d\bar{\phi}(p)$ par rapport au choix de $\bar{\phi}$.

(2) Soit $\phi_i : U_i \subseteq M \to \mathbb{R}^k$ une carte autour de p, avec $\phi_i^{-1} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ plongement et $\phi(p) = x$. L'on définit une application linéaire

$$T_pM \to \operatorname{im} d\phi_i^{-1}(x) = \ker d\bar{\phi}(p), \qquad [(i,\xi)] \mapsto d\phi_i^{-1}(x)\xi.$$

Ceci est une application bien définie. Elle est injective puisque $d\phi_i^{-1}(x)$ l'est. Les dimensions de T_pM et $\operatorname{im} d\phi_i^{-1}(x)$ étant les mêmes, égales à k, on déduit que notre application linéaire réalise un isomorphisme. $\square$

Lorsque $M \subseteq \mathbb{R}^n$ est une sous-variété, le noyau $\ker d\bar{\phi}(p)$ décrit ci-dessus s'appelle aussi *direction de l'espace tangent géométrique*. On le note désormais aussi T_pM. L'*espace tangent géométrique* est par définition l'espace affine passant par p et ayant comme direction T_pM ; on le notera simplement $p+T_pM$. En fonction du contexte, on regardera T_pM ou bien comme un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, ou bien comme un espace vectoriel abstrait.

Exemple. Soit $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \, : \, \|x\| = 1\} = \bar{\phi}^{-1}(1)$, avec $\bar{\phi} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|^2$ submersion au-dessus de 1. Puisque $d\bar{\phi}(x) = 2\langle x, \cdot \rangle$ on obtient l'identification canonique

$$T_x S^n \cong x^\perp := \{\xi \in \mathbb{R}^{n+1} \, : \, \langle x, \xi \rangle = 0\}.$$

Exercice 14. (1) Montrer que pour tout espace vectoriel V de dimension finie et tout point $p \in V$ on a un isomorphisme canonique

$$T_p V \cong V.$$

En particulier l'on a un isomorphisme canonique

$$T_p \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n.$$

(2) Soit $M^k \subseteq \mathbb{R}^n$ une sous-variété. Montrer que l'inclusion $i : M \to \mathbb{R}^n$ est une application lisse et que sa différentielle

$$di(p) : T_p M \to T_p \mathbb{R}^n$$

est l'inclusion $T_p M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$.

(3) Soit V un espace vectoriel et $A \subseteq V$ un sous-espace affine de direction $W \subseteq V$. Montrer que A est une sous-variété lisse de dimension égale à dim W. Montrer que l'on a un isomorphisme canonique $T_p A \cong W$ pour tout $p \in A$.

(4) Soit $U \subseteq V$ un ouvert dans un espace vectoriel de dimension finie. Montrer que l'on a un isomorphisme canonique

$$T_p U \cong V.$$

(5) Soit $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application lisse définie sur un ouvert U dans $\mathbb{R}^n$. Vérifier que la différentielle classique $df(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $p \in U$ coïncide avec la différentielle $df(p) : T_p U \to T_{f(p)} \mathbb{R}^m$ définie ci-dessus.

Voici maintenant une caractérisation intrinsèque de l'espace tangent géométrique en un point p à une sous-variété $M^k \subset \mathbb{R}^n$.

Proposition 1.27. *Soit $M^k \subseteq \mathbb{R}^n$ une sous-variété. L'espace tangent géométrique $p + T_p M$ en un point $p \in M$ est l'unique sous-espace affine A de dimension k passant par p et ayant la propriété suivante : il existe des paramétrisations $\psi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ d'un voisinage de p dans M et $\psi_A : \Omega' \to \mathbb{R}^n$ d'un voisinage de p dans A, qui coincident à l'ordre* 1 *aux points qui sont préimages de p :*

$$d\psi(x) = d\psi_A(y), \qquad x = \psi^{-1}(p), \; y = \psi_A^{-1}(p).$$

Démonstration. Il est clair que $p + T_p M$ vérifie la condition décrite : si $\psi : \Omega \subset \mathbb{R}^k \to M$ est une paramétrisation arbitraire au voisinage de p avec $\psi(x) = p$, on prend $\Omega' = \mathbb{R}^k$ et $\psi_{p+T_p M} := p + d\psi(x)$, la paramétrisation linéaire de A donnée par la différentielle de ψ.

Pour l'unicité, l'exercice 14 nous assure que la direction de A est T_pA. Or $T_pA = \operatorname{im} d\psi_A(y) = \operatorname{im} d\psi(x) = T_pM$, donc $A = p + T_pM$. □

Remarque 1.28 (contact de deux sous-variétés de dimension k)**.** *On dit que deux sous-variétés* ont un contact d'ordre au moins $\ell \geq 1$ *en un point d'intersection p, ou encore qu'elles* sont tangentes à l'ordre au moins $\ell \geq 1$ *en p, si elles admettent au voisinage de p des paramétrisations ayant le même jet d'ordre ℓ, i.e. les mêmes dérivées partielles d'ordre $\leq \ell$, aux points qui sont préimages de p. La proposition précédente peut être reformulée en disant que le plan tangent géométrique en p à une sous-variété $M^k \subseteq \mathbb{R}^n$ est l'unique espace affine de dimension k qui a un contact d'ordre au moins* 1 *avec M en p. C'est la formulation mathématiquement rigoureuse du fait que l'espace tangent géométrique est l'espace affine de dimension k qui approxime le mieux la sous-variété au voisinage de p.*

Ceci est à mettre en lien avec notre identification de la direction de l'espace tangent géométrique avec l'espace tangent abstrait, qui est la source naturelle des différentielles d'applications lisses définies sur M : pour étudier des phénomènes de nature linéaire en p on peut tout simplement remplacer la variété par son espace tangent et les applications linéaires par leur différentielle.

II. Le point de vue des courbes. Le point de vue que nous présentons maintenant a deux avantages : d'un côté il ne fait pas référence explicite aux cartes locales, d'un autre côté il met en avant l'intuition que nous avons dans $\mathbb{R}^n$ d'un vecteur tangent comme étant une direction de mouvement infinitésimale. Il est à mettre en relation avec la définition 1.5 des sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ comme images locales de plongements.

Soit $c : I \to M$ une courbe lisse définie sur un intervalle ouvert $I \subseteq \mathbb{R}$. La différentielle $dc(t) : T_tI \to T_{c(t)}M$, $t \in I$ est une application linéaire que l'on peut identifier à une application linéaire $dc(t) : \mathbb{R} \to T_{c(t)}M$ en vue de l'isomorphisme canonique $T_tI \cong \mathbb{R}$. Si l'on note

$$\dot{c}(t) := \frac{d}{dt}c(t) := dc(t) \cdot 1 \in T_{c(t)}M,$$

l'on a nécessairement $dc(t)\lambda = \lambda\dot{c}(t)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On appelle $\dot{c}(t)$ *vecteur vitesse de la courbe c à l'instant t*, ou *vecteur tangent à c à l'instant t*. Le vecteur vitesse détermine donc la différentielle $dc(t)$ et l'on a $\operatorname{im} dc(t) = \mathbb{R}\dot{c}(t) \subset T_{c(t)}M$. La courbe c est un plongement local en t si et seulement si $\dot{c}(t) \neq 0$.

Proposition-Définition 1.29. *Soit M une variété et $p \in M$. Il existe une bijection canonique entre T_pM et l'ensemble des classes d'équivalence de courbes lisses*

$$c : I \to M, \qquad 0 \in I \subseteq \mathbb{R}, \quad c(0) = p,$$

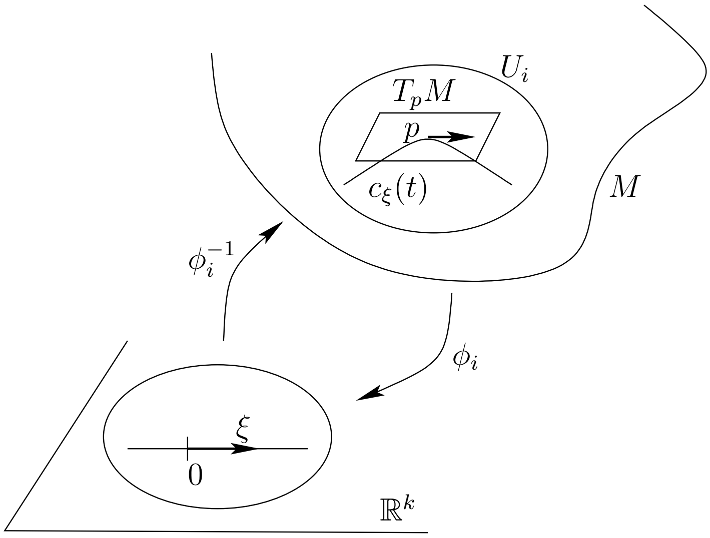

FIGURE 1. Espace tangent comme ensemble de classes d'équivalence de courbes.

pour la relation d'équivalence

$$c \sim c' \Leftrightarrow \dot{c}(0) = \dot{c}'(0).$$

Démonstration. Notons $\mathcal{C}_p$ l'ensemble des classes d'équivalence $[c]$ de courbes c comme dans l'énoncé. Montrons que l'application

$$\mathcal{C}_p \to T_pM, \qquad [c] \mapsto \dot{c}(0)$$

est une bijection. La bonne définition et l'injectivité sont une conséquence directe de la définition de la relation d'équivalence $\sim$. Pour la surjectivité, soit (U_i, ϕ_i) une carte autour de p telle que $\phi_i(p) = 0$ et soit $[(i, \xi)] \in T_pM$ un vecteur tangent. La courbe

$$c_\xi(t) := \phi_i^{-1}(t\xi),$$

définie sur un voisinage ouvert I de 0 tel que $I\xi \in \phi_i(U_i)$, est lisse et vérifie $\dot{c}_\xi(0) = [(i, \xi)]$ (Figure 1). $\square$

L'on remarquera que l'ensemble des classes d'équivalence de courbes passant par un point $p \in M$ ne possède pas de structure d'espace vectoriel évidente, quoique l'on peut le munir d'une telle structure en transportant celle de T_pM. Cette description géométrique de l'espace tangent occulte en quelque sorte l'algèbre. Il ne faut pas y voir un inconvénient, mais plutôt la manifestation d'un fait général : la géométrie et l'algébre s'éclairent mutuellement.

Proposition-Définition 1.30. *Soit $f : M \to N$ une application lisse et $[c]$ un vecteur tangent en $p \in M$ représenté par la classe d'équivalence*

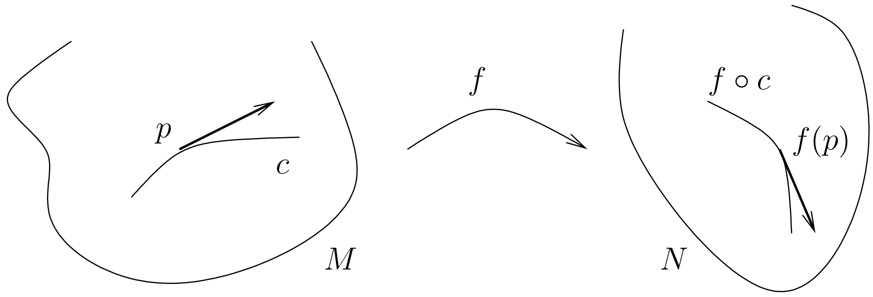

FIGURE 2. Différentielle d'une application agissant sur une clase d'équivalence de courbes.

d'une courbe c. Alors

$$df(p)[c] = [f \circ c].$$

Démonstration. Le vecteur tangent représenté par $[c]$ est précisément $\dot{c}(0) = dc(0) \cdot 1$. En appliquant la règle de dérivation des fonctions composées on obtient (Figure 2)

$$df(p)[c] = df(p)\dot{c}(0) = df(p)dc(0) \cdot 1 = d(f \circ c)(0) \cdot 1 = \dot{\overbrace{f \circ c}}(0) = [f \circ c].$$

$\square$

Ce dernier résultat est très intuitif : pour connaître l'image par df d'un vecteur tangent représenté par une courbe on doit simplement transporter la courbe par l'application f.

Remarque 1.31 (espace tangent et applications lisses entre espaces euclidiens)**.** *La remarque suivante concerne le dernier point de l'exercice 14. Dans la définition classique de la différentielle d'une application linéaire $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, qui agit comme $df(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, la source est l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ et est indépendante du point p. Le point de vue de la géométrie différentielle est légérement différent et plus intuitif : la source est T_pU, l'espace vectoriel des directions de variation infinitésimale du point $p \in U$. Il se trouve que, pour $U \subset \mathbb{R}^n$, celui-ci est canoniquement identifié à $\mathbb{R}^n$ et peut donc être pensé comme étant indépendant du point p, comme en calcul différentiel classique. Mais* moralement *il dépend du point p. Lorsque l'on écrit T_pU on se souvient dans la notation de cette dépendance.*

III. LE POINT DE VUE DES DÉRIVATIONS. Nous avons déjà exploré deux points de vue sur l'espace tangent : celui des vecteurs tangents regardés comme vecteurs de $\mathbb{R}^n$ à travers des cartes, étroitement lié à l'idée d'approximation linéaire, et celui des courbes, lié à l'idée de direction infinitésimale de mouvement. Nous expliquons maintenant un troisième point de vue, lié au concept de dérivée directionnelle des fonctions définies sur des ouverts de $\mathbb{R}^n$. Ce point de vue est à rapprocher de la définition 1.3 des sous-variétés comme fibres locales de submersions. Les énoncés-clé pour cette discussion sont les Propositions-Définitions 1.34 et 1.37 plus bas.

Définition 1.32. *Soit M une variété et $p \in M$ un point fixé. On appelle* germe de fonction lisse en p *une classe d'équivalence de fonctions lisses définies au voisinage de p, pour la relation d'équivalence suivante :*

$$f \sim g \Leftrightarrow f = g \textit{ sur un voisinage ouvert de } p$$

On note $\mathcal{F}_p$ l'ensemble des germes de fonctions lisses en p.

L'ensemble $\mathcal{F}_p$ porte une structure naturelle d'*algèbre commutative sur* $\mathbb{R}$. Ceci signifie qu'il possède une structure d'espace espace vectoriel réel, une structure d'anneau commutatif, et que ces deux structures sont compatibles au sens où le produit est distributif par rapport à la somme et commute avec la multiplication par des scalaires. À titre d'exemple, si f_p et g_p sont deux germes représentés par des fonctions lisses $f : U \to \mathbb{R}$ et $g : V \to \mathbb{R}$, le germe produit $f_p \cdot g_p$ est représenté par la fonction produit $fg : U \cap V \to \mathbb{R}$. À noter que $\mathcal{F}_p$ est un espace vectoriel réel de dimension infinie.

Définition 1.33. *On appelle* dérivation de $\mathcal{F}_p$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, ou dérivation de $\mathcal{F}_p$, *une application $\mathbb{R}$-linéaire $D : \mathcal{F}_p \to \mathbb{R}$ qui vérifie la règle de Leibniz*

$$D(f_p \cdot g_p) = D(f_p)g(p) + f(p)D(g_p).$$

On note le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des dérivations de $\mathcal{F}_p$ par $\mathrm{Der}(\mathcal{F}_p, \mathbb{R})$.

Remarque. Il existe une notion générale d'*algèbre sur un corps*, définie par les mêmes axiomes. De même, il existe une notion générale de *dérivation d'une algèbre A à valeurs dans un A-bimodule M* (module à gauche et à droite, de façon compatible), gouvernée par la relation $D(a \cdot b) = D(a)b + aD(b)$, $a, b \in A$. Dans notre cas de figure, l'algèbre $\mathbb{R}$ est regardée comme un $\mathcal{F}_p$-bimodule via l'application d'évaluation $\mathcal{F}_p \to \mathbb{R}$, $f_p \mapsto f(p)$.

Exemple. Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert et $\mathcal{F}_p$ l'algèbre des germes de fonctions lisses définies au voisinage de $p \in U$. Pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ la dérivée directionnelle en p selon ξ définit une dérivation de $\mathcal{F}_p$ à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$d_\xi : \mathcal{F}_p \to \mathbb{R}, \qquad d_\xi f_p := df(p)\xi.$$

En effet,

$$\begin{aligned} d_\xi(f_p g_p) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(fg)(p+t\xi) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(p+t\xi)g(p) + f(p)\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g(p+t\xi) \\ &= d_\xi(f_p)g(p) + f(p)d_\xi g_p. \end{aligned}$$

En particulier les dérivées partielles par rapport aux coordonnées x^ℓ sur $\mathbb{R}^n$ définissent des dérivations

$$\frac{\partial}{\partial x^\ell} : \mathcal{F}_p \to \mathbb{R},$$

avec $\frac{\partial}{\partial x^\ell} = d_{e_\ell}$, où $e_\ell = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ et la coordonnée non-nulle apparaît en ℓ-ème position.

Cet exemple peut bien-sûr être implanté sur une variété puisqu'il est de nature locale. Étant donnée une variété, il est désormais utile d'adopter la notation

$$\phi = (x^1, \ldots, x^k)$$

pour les composantes d'une carte $\phi : U \subseteq M \to \mathbb{R}^k$. Nous regardons les composantes $x^1, \ldots, x^k$ de l'application ϕ comme des fonctions lisses sur U. Cette notation est par ailleurs conforme à l'intuition que nous avons d'une carte : elle identifie U à l'ouvert $\phi(U) \subseteq \mathbb{R}^k$, sur lequel vivent les fonctions coordonnées naturelles $x^1, \ldots, x^k$.

Exercice 15. Soit M une variété et $p \in M$ un point fixé. Étant donnée une carte $\phi = (x^1, \ldots, x^k)$, l'application

$$\frac{\partial}{\partial x^\ell} : \mathcal{F}_p \to \mathbb{R}$$

définie par

$$\frac{\partial}{\partial x^\ell}(f_p) := \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial x^\ell}(\phi(p))$$

est une dérivation.

On utilise aussi la notation

$$\frac{\partial}{\partial x^\ell}\Big|_p : \mathcal{F}_p \to \mathbb{R}$$

pour désigner la dérivation $\frac{\partial}{\partial x^\ell}$. Il faut bien prendre conscience du fait que, même si la carte ϕ n'est pas mentionnée explicitement dans la notation, cette dérivation dépend du choix de carte. Cette dépendance est rendue explicite plus bas.

Exercice 16. Soit $C \in \mathcal{F}_p$ le germe de la fonction constante égale à $C \in \mathbb{R}$ au voisinage de p. Montrer que toute dérivation de $\mathcal{F}_p$ vérifie nécessairement $D(C) = 0$.

Exercice 17. Étant donnée une carte $\phi = (x^1, \dots, x^k)$, montrer l'identité

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^\ell} = \delta^i_\ell.$$

Proposition-Définition 1.34. *Soit M une variété munie d'un atlas $\{(U_i, \phi_i)\}$. Soit $p \in M$ un point fixé. Il existe un isomorphisme canonique d'espaces vectoriels*

$$\mathcal{D} : T_pM \xrightarrow{\cong} \mathrm{Der}(\mathcal{F}_p, \mathbb{R}),$$

$$[(i,\xi)] \mapsto \left(f_p \mapsto d(f \circ \phi_i^{-1})(x)\xi\right), \quad x = \phi_i(p).$$

Le contenu de la proposition est le suivant : l'on associe au vecteur tangent représenté par $\xi \in \mathbb{R}^n$ dans la carte ϕ_i la dérivation donnée par la dérivée directionnelle selon ξ.

Démonstration. L'application $\mathcal{D}$ est bien définie et $\mathbb{R}$-linéaire.

Montrons qu'elle est injective. Fixons une carte (U_i, ϕ_i), notons $x = \phi_i(p)$ et considérons deux vecteurs $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ tels que $\mathcal{D}[(i,\xi)] = \mathcal{D}[(i,\eta)]$. L'on veut montrer que $\xi = \eta$. On peut supposer sans perte de généralité $\xi \neq 0$. Considérons le germe f_p tel que $f \circ \phi_i^{-1}(y) = \langle y - x, \xi\rangle$. On trouve

$$\|\xi\|^2 = \mathcal{D}[(i,\xi)]f_p = \mathcal{D}[(i,\eta)]f_p = \langle \eta, \xi\rangle.$$

En considérant le germe associé à $y \mapsto \langle y - x, \eta\rangle$ on trouve par ailleurs

$$\|\eta\|^2 = \langle \xi, \eta\rangle.$$

Finalement, les deux égalités $\|\xi\|^2 = \|\eta\|^2 = \langle \eta, \xi\rangle$ impliquent $\eta = \xi$ (on peut par exemple argumenter par le fait que la fonction $\eta \mapsto \langle \eta, \xi\rangle$ définie sur la sphère de rayon $\|\xi\|$ admet un unique maximum en $\eta = \xi$, où elle vaut $\|\xi\|^2$).

Pour conclure que $\mathcal{D}$ est un isomorphisme il suffit de montrer que $\dim \mathrm{Der}(\mathcal{F}_p, \mathbb{R}) \leq \dim T_pM$. Ceci découle du lemme de Hadamard 1.36 ci-dessous : étant donnée une carte $\phi = (x^1, \dots, x^k)$ autour de p avec $\phi(p) = 0$, tout germe de fonction en p s'écrit comme $f_p = f(p) + \sum_{\ell=1}^k x^\ell g_\ell$ avec g_ℓ des germes de fonction en p tels que

$$g_\ell(p) = \frac{\partial}{\partial x^\ell}\Big|_p (g_\ell) = \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial x^\ell}(0).$$

Soit $D \in \mathrm{Der}(\mathcal{F}_p, \mathbb{R})$. En utilisant l'exercice 16 et le fait que $x^\ell(p) = 0$ pour tout ℓ on obtient

$$\begin{aligned} D(f_p) &= D(f(p)) + \sum_{\ell=1}^{k} D(x^\ell g_\ell) \\ &= \sum_{\ell=1}^{k} D(x^\ell) g_\ell(p) + x^\ell(p) D(g_\ell) \\ &= \sum_{\ell=1}^{k} D(x^\ell) \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial x^\ell}(0). \end{aligned}$$

Ainsi

$$D = \sum_{\ell=1}^{k} D(x^\ell) \frac{\partial}{\partial x^\ell}.$$

Les dérivations $\frac{\partial}{\partial x^\ell}$, $\ell = 1, \ldots, k$ forment donc un système générateur pour $\mathrm{Der}(\mathcal{F}_p, \mathbb{R})$, de sorte que $\dim \mathrm{Der}(\mathcal{F}_p, \mathbb{R}) \leq k = \dim T_pM$. □

Corollaire 1.35. *Les dérivations*

$$\frac{\partial}{\partial x^\ell}, \ \ell = 1, \ldots, k$$

associées à une carte $\phi = (x^1, \ldots, x^k)$ définie au voisinage d'un point p forment une base de $\mathrm{Der}(\mathcal{F}_p, \mathbb{R})$.

Démonstration. Nous avons déjà montré au courant de la preuve de la proposition 1.34 que les dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial x^\ell}$, $\ell = 1, \ldots, k$ forment un système de générateurs pour $\mathrm{Der}(\mathcal{F}_p, \mathbb{R})$. Montrons qu'elles sont linéairement indépendantes. Soit $D = \sum_\ell \lambda_\ell \frac{\partial}{\partial x^\ell}$ une combinaison linéaire avec $\lambda_\ell \in \mathbb{R}$. Supposons que $D = 0$ et montrons que tous les coefficients λ_ℓ sont nuls.

En effet, pour tout $i = 1, \ldots, k$ l'on a

$$0 = D(x^i) = \sum_\ell \lambda_\ell \frac{\partial x^i}{\partial x^\ell} = \sum_\ell \lambda_\ell \delta^i_\ell = \lambda_i.$$

Nous avons utilisé l'identité fort utile

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^\ell} = \delta^i_\ell.$$

□

Nous avons déjà mentionné le fait que les dérivations $\frac{\partial}{\partial x^\ell}$, $\ell = 1, \ldots, k$ dépendent du choix de carte $\phi = (x^1, \ldots, x^\ell)$. Il est temps de rendre explicite cette dépendance. Soit $\psi = (y^1, \ldots, y^k)$ une autre carte, qui détermine une autre base de dérivations $\frac{\partial}{\partial y^\ell}$, $\ell = 1, \ldots, k$ au point p. Nous avons alors

$$\frac{\partial}{\partial y^\ell} = \sum_i \frac{\partial x^i}{\partial y^\ell} \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

En effet, puisque les $\frac{\partial}{\partial x^i}$, $i = 1, \ldots, k$ forment un système générateur l'on peut écrire $\frac{\partial}{\partial y^\ell} = \sum_i \lambda_i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$. On obtient

$$\frac{\partial x^j}{\partial y^\ell} = \sum_i \lambda_i \frac{\partial x^j}{\partial x^i} = \sum_i \lambda_i \delta_i^j = \lambda_j,$$

ce qui démontre la formule souhaitée.

Convention de sommation d'Einstein. Nous venons de rencontrer à plusieurs reprises des sommes du type $\sum_i \lambda_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. Bientôt nous rencontrerons des sommes impliquant plusieurs indices de sommation. La convention d'Einstein consiste à supprimer le signe somme dans une expression afin d'alléger l'écriture, en sous-entendant que l'on somme sur les indices qui apparaissent deux fois. Ainsi

$$\frac{\partial}{\partial y^\ell} = \sum_i \frac{\partial x^i}{\partial y^\ell} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

s'écrirait

$$\frac{\partial}{\partial y^\ell} = \frac{\partial x^i}{\partial y^\ell} \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

À des fins pédagogiques, dans ce cours nous n'allons utiliser la convention de sommation d'Einstein que très rarement, et toujours en y faisant mention explicite.

Pour achever la preuve de la proposition 1.34 nous démontrons maintenant le lemme de Hadamard.

Lemme 1.36 (Hadamard)**.** *Soit M une variété et $p \in M$. Soit $\phi = (x^1, \ldots, x^k)$ une carte au voisinage de p. Pour tout germe de fonction lisse $f_p \in \mathcal{F}_p$ il existe des germes de fonctions g_ℓ, $\ell = 1, \ldots, k$ définis au voisinage de p tels que*

$$f_p = f(p) + \sum_{\ell=1}^{k} x^\ell g_\ell.$$

L'on a alors nécessairement

$$g_\ell(p) = \frac{\partial f_p}{\partial x^\ell}.$$

Démonstration. Regardons d'abord le cas d'une application lisse $\bar{f}$: $B^k(1) \to \mathbb{R}$, avec $p = 0$. L'on a successivement

$$\begin{aligned}\bar{f}(x) &= \bar{f}(0) + \int_0^1 \frac{d}{dt}\bar{f}(tx)\,dt \\ &= \bar{f}(0) + \int_0^1 \sum_{\ell=1}^k x^\ell \frac{\partial \bar{f}}{\partial x^\ell}(tx)\,dt \\ &= \bar{f}(0) + \sum_{\ell=1}^k x^\ell \bar{g}_\ell(x),\end{aligned}$$

où $\bar{g}_\ell(x) = \int_0^1 \frac{\partial \bar{f}}{\partial x^\ell}(tx)$ est lisse. (L'on remarque par ailleurs que $\bar{g}_\ell(0) = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x^\ell}(0)$.

Dans le cas d'un germe f_p, quitte à restreindre le domaine U de la carte et à composer par une homothétie dans $\mathbb{R}^k$ l'on peut supposer que $\phi(U) = B^n(1)$. L'on applique le raisonnement ci-dessus avec $\bar{f} := f \circ \phi^{-1}$ et l'on retrouve la première partie de l'énoncé, avec $g_\ell = \bar{g}_\ell \circ \phi$.

La deuxième partie du lemme découle en appliquant $\frac{\partial}{\partial x^\ell}$ à f_p et en utilisant le fait que $\frac{\partial x^r}{\partial x^\ell} = \delta^r_\ell$. □

Proposition-Définition 1.37. *Soit $f : M \to N$ une application lisse entre variétés et $p \in M$ fixé. À travers les isomorphismes canoniques $T_pM \cong \mathrm{Der}(\mathcal{F}_p, \mathbb{R})$ et $T_{f(p)}N \cong \mathrm{Der}(\mathcal{F}_{f(p)}, \mathbb{R})$, la différentielle*

$$df(p) : T_pM \to T_{f(p)}N$$

s'écrit

$$(df(p)X)h := X(h \circ f), \ h \in \mathcal{F}_{f(p)}.$$

Démonstration. Choisissons des cartes (U_i, ϕ) autour de p et (V_j, ψ) autour de $f(p)$. Fixons $X \in \mathrm{Der}(\mathcal{F}_p, \mathbb{R})$. Soit $[(i, \xi)] \in T_pM$ tel que $X(g) = d(g \circ \phi^{-1})\xi$. Alors $df(p)[(i, \xi)] = [(j, d(\psi \circ f \circ \phi^{-1})\xi)] \in T_{f(p)}N$ et ce vecteur tangent correspond à la dérivation

$$h \mapsto d(h \circ \psi^{-1})d(\psi \circ f \circ \phi^{-1})\xi = d((h \circ f) \circ \phi^{-1})\xi = X(h \circ f).$$

□

Finalement, pour clôre la section rendons explicite la bijection canonique

$$\mathcal{C}_p \cong \mathrm{Der}(\mathcal{F}_p, \mathbb{R})$$

obtenue comme composée des bijections canoniques $T_pM \cong \mathcal{C}_p$ et $T_pM \cong \mathrm{Der}(\mathcal{F}_p, \mathbb{R})$. Étant donnée une classe de courbe $[c] \in \mathcal{C}_p$ et un représentant $c : I \to M$ avec $0 \in I$ et $c(0) = p$, on lui associe la dérivation

$$f \mapsto \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(f \circ c)(t).$$

En effet, étant donnée une carte (U_i, ϕ) autour de p, la classe $[c]$ correspond au vecteur tangent $[(i,\xi)]$ avec $\xi = \frac{d}{dt}\big|_{t=0}(\phi \circ c)(t) = d(\phi \circ c)(0)1$. À son tour, ce vecteur tangent correspond à la dérivation

$$f \mapsto d(f\circ\phi^{-1})\xi = d(f\circ\phi^{-1})d(\phi\circ c)(0)1 = d(f\circ c)(0)1 = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(f\circ c)(t).$$