

Notes de cours de Géométrie différentielle

Alexandru OANCEA

Université Pierre et Marie Curie

Master de mathématiques fondamentales, 1^{ère} année

28 octobre 2014

PRÉREQUIS

Je vous encourage vivement à revoir la partie du **cours de calcul différentiel** concernant le **théorème des fonctions implicites** et le **théorème d'inversion locale** (les énoncés, les exemples, les exercices). Ce sont des théorèmes qui jouent un rôle important en géométrie différentielle. Nous les expliquerons à nouveau en cours, mais il est toutefois utile de réviser.

CONVENTIONS

Pour alléger les notations, on désigne par *application lisse* une application différentiable de classe C^∞ . Dans la première partie du texte, la source et le but d'une telle application sont (des ouverts dans) des espaces de Banach de dimension finie. Par la suite, la source et le but de telles applications seront des ouverts, ou encore des ensembles plus généraux, dans des variétés lisses, que nous définirons.

De la même manière, l'on désigne simplement par *difféomorphisme* un difféomorphisme lisse, c'est-à-dire une application bijective qui est lisse et dont l'inverse est lisse.

Lorsque l'on voudra insister sur le caractère non-lisse d'une variété ou d'une application entre variétés, l'on spécifiera le cas échéant sa classe de différentiabilité ou bien son caractère continu.

L'on notera un *isomorphisme canonique* entre deux objets par le symbole

$$\cong .$$

Pour désigner l'*identification* de deux objets par un isomorphisme canonique (en général sous-entendu) on utilisera le symbole

$$\equiv .$$

Exemple : soit V un espace vectoriel de dimension finie. $V \cong V^{**}$ signifie que V est canoniquement isomorphe à son bi-dual. $V \equiv V^{**}$ signifie que l'on regarde les éléments de V comme des éléments du bi-dual dans une situation géométrique donnée.

L'on note un *isomorphisme quelconque*, éventuellement non-canonique, entre deux objets par le symbole

$$\simeq .$$

Exemple : si V est un espace vectoriel de dimension finie l'on a $V \simeq V^*$.

BIBLIOGRAPHIE SÉLECTIVE

Les trois premiers livres, ainsi que le premier chapitre du quatrième, contiennent à peu de choses près le matériel que nous allons couvrir en cours. Il faut les feuilleter tous et en choisir un, selon votre goût.

Les livres qui suivent dans la liste sont de beaux livres que vous pouvez lire. Le M1 est le moment où vous pouvez commencer à lire de vrais livres de maths, si vous ne l'avez pas encore fait. Ce n'est que de cette manière que vous pourrez acquérir la culture mathématique qui vous permettra de former votre propre perspective sur les mathématiques. Le fait d'acquérir une perspective personnelle sur les mathématiques que vous apprenez est sans doute l'un des buts à long terme que vous devez vous fixer.

- (1) J. Lafontaine, *Introduction aux variétés différentielles*, EDP Sciences, 2010.
- (2) F. Paulin, *Géométrie différentielle élémentaire*, notes de cours de niveau M1, FIMFA, ENS Ulm, 2006-2007, disponible en ligne : http://www.math.u-psud.fr/paulin/notescours/cours_geodiff.pdf
- (3) C. Viterbo, *Notes de cours de Géométrie Différentielle*, notes de cours de niveau M1, FIMFA, ENS Ulm, 2013, disponible en ligne : <http://www.math.ens.fr/viterbo/Cours-Geo-Diff-2012/Poly-Geodiff-2013.pdf>
- (4) S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine, *Géométrie riemannienne*, Springer, 1987, **Chapitre 1**.
- (5) F. Warner, *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, Springer, GTM, 1983.
- (6) J. Milnor, *Topology from the differentiable viewpoint*, Princeton Univ. Press, 1997 (1965).
- (7) M. do Carmo, *Differential geometry of curves and surfaces*, Prentice-Hall, 1976.
- (8) J. Milnor, *Morse theory*, Princeton Univ. Press, 1963.
- (9) G. Bredon, *Topology and geometry*, Springer, GTM, 1994.
- (10) M. Spivak, *Differential geometry*, Publish or Perish, 1979, 5 volumes.
- (11) B. Dubrovin, A. Fomenko, S. Novikov, *Modern geometry*, Springer, GTM, 3 volumes.

La dernière référence est un ouvrage panoramique. Il est utile pour obtenir une vue d'ensemble, mais il n'y a que peu ou pas de démonstrations. Sa lecture doit être complétée par d'autres références.

TABLE DES MATIÈRES

| | |
|--|----|
| Prérequis | 2 |
| Conventions | 2 |
| Bibliographie sélective | 3 |
| 1. Des sous-variétés de \mathbb{R}^n aux variétés abstraites | 5 |
| 1.1. Quelques notions de calcul différentiel revisitées | 5 |
| 1.2. Sous-variétés de \mathbb{R}^n | 8 |
| 1.3. Trois digressions sur l'algèbre linéaire, les catégories, et les propriétés d'universalité. | 11 |
| 1.4. Immersions et submersions. | 17 |
| 1.5. Variétés abstraites, ou non-plongées | 19 |
| 1.6. Fonctions de troncature lisses. Plongements dans des espaces euclidiens | 21 |
| 2. Fibré tangent. Fibrés vectoriels. | 26 |
| 2.1. Espace tangent. Application tangente. | 26 |
| 2.2. Fibré tangent. Champs de vecteurs | 39 |
| 2.3. La notion de fibré vectoriel | 42 |
| 3. Exemples et constructions de variétés | 49 |
| 3.1. Produit | 49 |
| 3.2. Somme connexe. | 49 |
| 3.3. Variétés affines. | 49 |
| 3.4. Variétés projectives. | 50 |
| 3.5. Actions de groupes discrets. | 50 |
| 3.6. Groupes de Lie : exemples. | 55 |
| 3.7. Actions de groupes de Lie. La notion de fibré principal. | 58 |
| 3.8. Espaces homogènes. | 61 |
| 4. Champs de vecteurs. Flots. Difféomorphismes | 66 |
| 4.1. Un champ de vecteurs est une équation différentielle | 66 |
| 4.2. Flots. Difféomorphismes. Redressement. | 69 |
| 4.3. Crochet de Lie. Dérivée de Lie. | 76 |
| 4.4. Groupes de Lie et algèbres de Lie | 85 |

1. DES SOUS-VARIÉTÉS DE \mathbb{R}^n AUX VARIÉTÉS ABSTRAITES

1.1. Quelques notions de calcul différentiel revisités. Dans cette section je ne donne pas de définitions formelles, vous les avez tous vues en cours de calcul différentiel. Je donne plutôt quelques interprétations informelles, nécessairement subjectives.

DIFFÉRENTIABILITÉ. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Une application $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ est différentiable en un point $p \in U$ lorsqu'elle peut être “bien approchée” par une application linéaire au voisinage de p . “Bien” signifie ici que, localement près de p , notre application diffère d'une certaine application linéaire $df(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ par un terme à variation sous-linéaire :

$$(1.1) \quad f(p+h) = f(p) + df(p) \cdot h + o(|h|).$$

Pourquoi est-ce utile ? Parce-que les applications linéaires sont les plus simples (après les applications constantes) et donc, lorsque l'on veut comprendre une certaine application non-linéaire, il est utile de la comparer (localement) à celles-ci.

Cette démarche est centrale en analyse mathématique : certains objets “idéaux” sont plus simples à comprendre (n'est-ce pas ?). Dans l'étude d'un phénomène réaliste on procède par étapes : l'on étudie d'abord ces objets idéaux (les applications linéaires, ou bien les applications multi-linéaires), et l'on développe ensuite une “théorie d'approximation”. C'est ce que vous avez fait durant une bonne partie de vos études de Licence : l'étude des applications linéaires entre espaces vectoriels constituait le sujet de l'Algèbre linéaire. L'étude des applications bilinéaires vous occupe encore en M1 (voir par exemple le cours d'Algèbre Géométrique). La théorie d'approximation correspondante était le sujet du cours de Calcul différentiel.

L'un des buts du cours de Géométrie différentielle est de vous apprendre à *visualiser* de manière avisée les objets et phénomènes que vous avez déjà rencontrés en cours de Calcul différentiel, en cours d'Equations différentielles, ou en cours d'Intégration.

D'un certain point de vue, aucune des notions que nous allons discuter dans ce cours n'est vraiment nouvelle. Que ça soit en cours de Calcul différentiel, ou bien d'Equations différentielles, ou bien d'Intégration, vous les avez toutes déjà rencontrées, parfois sous une forme dissimulée. Vous apprendrez seulement à *regarder* avec un œil éduqué ces objets que vous avez déjà rencontrés. Mais pour cela il faut apprendre un *langage nouveau*. Comme tout nouveau langage, celui-ci vous ouvrira les portes d'un monde très riche, et peut-être insoupçonné.

DIFFÉOMORPHISME. La notion de difféomorphisme est subtile, mais nécessaire. Vous avez eu l'occasion de l'apprécier concrètement lorsque vous avez eu à *calculer des intégrales* ou bien lorsque vous avez eu à *résoudre des équations différentielles*. Le fait déroutant est que, pour des raisons historiques, on l'appelle dans ces situations communément *changement de variables*, ou encore *changement de coordonnées*. Mais c'est la même chose!

Voici un exemple classique en intégration : redémontrons l'égalité $\int_0^\infty e^{-\sigma t^2/2} dt = \sqrt{\pi/2\sigma}$ pour tout $\sigma > 0$. Notons $I = \int_0^\infty e^{-\sigma t^2/2} dt$. En utilisant le théorème de Fubini et ensuite le théorème de changement de variable dans une intégrale double on obtient

$$I^2 = \iint_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+} e^{-\sigma(x^2+y^2)/2} dx dy = \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty r e^{-\sigma r^2/2} dr d\theta = \pi/2\sigma.$$

Une fonction peut paraître compliquée dans un système de coordonnées, mais elle prend une forme simple dans un autre système de coordonnées. Exemple : $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. En coordonnées polaires cette fonction prend la forme simple $(r, \theta) \mapsto r$. Elle a l'air bien différente, mais c'est la même fonction! Rendons explicite ce qui s'est passé : l'application $\phi :]0, \infty[\times]0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus [0, \infty[\times \{0\}$, $(r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$ est un difféomorphisme et $f \circ \phi(r, \theta) = r$. Ainsi, la fonction non-linéaire f devient linéaire après composition par un difféomorphisme (nécessairement non-linéaire). Nous verrons d'autres tels exemples de *redressement*, ou de *forme normale*.

Lorsque nous les regardons en tant que changements de variables, les difféomorphismes sont des outils pour simplifier les calculs. Lorsque l'on essaie de comprendre certains objets à difféomorphisme près, l'on s'affranchit de formules explicites et les difféomorphismes deviennent un filtre qui fait ressortir leurs propriétés calitatives.

Un autre point de vue, moins intuitif, est *catégorique*. L'on définit plus bas la catégorie VarDiff des variétés lisses, avec morphismes donnés par l'ensemble des applications lisses. Les difféomorphismes sont les isomorphismes dans cette catégorie.

(3) *Théorème d'inversion locale*. Le théorème d'inversion locale est le théorème clé du calcul différentiel. Peut-être que le seul autre résultat qui le surpasse en importance est la règle de dérivation des fonctions composées : $d(f \circ g)(p) = df(g(p)) \circ dg(p)$. Il est emblématique pour la philosophie du sujet : une information sur la différentielle en un point est traduite en une information locale sur l'objet non-linéaire sous-jacent.

(4) *Local vs. global.* On dit qu'une propriété est "locale" en un point si elle est valable sur un voisinage ouvert (non-spécifié, pensé comme étant très petit) du point. L'étude des propriétés locales des applications lisses est le sujet du calcul différentiel (voir aussi le commentaire sur le théorème d'inversion locale). L'étude de leurs propriétés globales tient plus à la topologie différentielle.

1.2. Sous-variétés de \mathbb{R}^n .

Définition 1.1. Une sous-variété lisse de \mathbb{R}^n est un sous-ensemble $M \subset \mathbb{R}^n$ possédant la propriété suivante : pour tout point $p \in M$ il existe un voisinage ouvert $p \in U \subset \mathbb{R}^n$, un entier $0 \leq k \leq n$, et une application différentiable $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ qui est un difféomorphisme sur son image, tels que

$$\phi(M \cap U) = (\mathbb{R}^k \times \{0\}) \cap \phi(U).$$

On regarde M comme espace topologique avec la topologie induite.

Exercice 1. Montrer que l'entier k est bien défini en tout point p , et qu'il est constant au voisinage de p . On appelle cet entier *dimension de M en p* .

Lorsque l'entier k est le même pour tout point $p \in M$ on parle de *sous-variété de dimension k* .

Notation : $M^k \subset \mathbb{R}^n$ désigne une sous-variété de dimension k de \mathbb{R}^n . Ne pas confondre cette notation avec le produit cartésien $\underbrace{M \times \cdots \times M}_{k \text{ fois}}$!

Réinterprétons la Définition 1.1 en termes d'équations. Soient

$$x^1, \dots, x^n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

les fonctions coordonnées canoniques et notons $\phi^i := x^i \circ \phi$, $i = 1, \dots, n$. Puisque $\mathbb{R}^k \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ peut être réécrit comme $\mathbb{R}^k \times \{0\} = \{x \in \mathbb{R}^n : x^{k+1} = \dots = x^n = 0\}$, on obtient que

$$M \cap U = \{p \in U : \phi^{k+1}(p) = \dots = \phi^n(p) = 0\}.$$

On voit qu'une sous-variété lisse de dimension k dans \mathbb{R}^n peut être exprimée localement comme lieu commun d'annulation de $n - k$ fonctions lisses. On dit encore que

$$\phi^{k+1} = \dots = \phi^n = 0$$

est un *système local d'équations pour M dans U* . On observe par ailleurs que la fonction $\bar{\phi} = (\phi^{k+1}, \dots, \phi^n) : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ a une différentielle surjective en tout point. Ceci nous amène à donner une définition équivalente des sous-variétés.

Définition 1.2 (submersion). Une application $\bar{\phi} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ est une submersion (en un point $p \in U$) si $d\bar{\phi} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ est surjective en tout point de U (respectivement en p). Le rang de $\bar{\phi}$ est défini comme étant $n - k$.

Définition 1.3 (sous-variétés via submersions). Une sous-variété de dimension k de \mathbb{R}^n est un sous-ensemble $M^k \subset \mathbb{R}^n$ qui s'écrit localement comme lieu d'annulation d'une submersion de rang $n - k$.

Exercice 2. Montrez l'équivalence des définitions 1.1 et 1.3 en utilisant le théorème d'inversion locale. (Nous venons de démontrer une implication.)

Réinterprétons la Définition 1.1 en termes de paramétrisations. En considérant $\phi^{-1}|_{\phi(U) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})}$ il en découle directement que toute sous-variété $M^k \subset \mathbb{R}^n$ est *localement paramétrée par un ouvert de \mathbb{R}^k* , à savoir pour tout $p \in M$ il existe un voisinage $p \in V \subset M$, un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ et une application lisse $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ à différentielle injective, telle que $\psi(\Omega) = V$ et $\psi : \Omega \rightarrow V$ soit un homéomorphisme (on dit encore que ψ est un *homéomorphisme sur image*). Ceci nous amène à donner une troisième définition équivalente des sous-variétés.

Définition 1.4 (immersion, plongement). *Une application $\psi : \Omega \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une immersion (en un point $q \in \Omega$) si sa différentielle $d\psi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ est injective en tout point de Ω (respectivement au point q). Le rang de ψ est défini comme étant k .*

Une application $\psi : \Omega \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un plongement si c'est une immersion injective qui est un homéomorphisme sur son image.

Noter que, alors que la notion d'immersion est locale, la notion de plongement est globale.

Définition 1.5. *Une sous-variété de dimension k de \mathbb{R}^n est un sous-ensemble $M^k \subset \mathbb{R}^n$ qui s'écrit localement comme image d'un plongement de rang k .*

Exercice 3. Démontrer l'équivalence des définitions 1.1 et 1.5 en utilisant le théorème d'inversion locale. (Nous venons de démontrer une implication.)

Exercice 4. Montrer en utilisant les différentes définitions que le cercle $S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \subset \mathbb{C}$ est bien une sous-variété lisse de dimension 1. De même, la sphère $S^n := \{(x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x^1)^2 + \dots + (x^{n+1})^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ est une sous-variété lisse de dimension n . L'ellipsoïde

$$E^n(a_1, \dots, a_{n+1}) = \{(x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \frac{(x^1)^2}{a_1^2} + \dots + \frac{(x^{n+1})^2}{a_{n+1}^2} = 1\}$$

avec $a_1, \dots, a_{n+1} > 0$ est une sous-variété lisse de dimension n . Le cône

$$C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2\}$$

n'est pas une sous-variété lisse, mais $C \setminus \{0\}$ est une sous-variété de dimension 2. L'union de la boule ouverte de rayon 1 dans \mathbb{R}^3 avec le cercle unité dans $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ n'est pas une sous-variété de \mathbb{R}^3 . La boule unité fermée dans \mathbb{R}^3 n'est pas une sous-variété au sens des définitions précédentes (mais elle est une sous-variété à bord, au sens d'une définition plus générale que l'on donnera plus tard).

Exercice 5. Réinterpréter le théorème des fonctions implicites en termes de sous-variétés. Expliquer le sens du nom “fonctions implicites”.

1.3. Trois digressions sur l'algèbre linéaire, les catégories, et les propriétés d'universalité.

DIGRESSION : ÉQUATIONS PARAMÉTRIQUES VS. ÉQUATIONS CARTÉSIENNES POUR DES SOUS-ESPACES VECTORIELS. Les deux points de vue précédents sur les sous-variétés de \mathbb{R}^n sont des généralisations des deux points de vue familiers suivants concernant les sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel V : ceux-ci peuvent être décrits ou bien par des équations paramétriques, ou bien par des équations cartésiennes.

Étant donné un sous-espace $E^k \subset V^n$ (la notation signifie que E est de dimension k et V est de dimension n), le point de vue des équations paramétriques consiste à donner une application linéaire $\Psi : \mathbb{R}^N \rightarrow V$ avec $\text{im } \Psi = E$. Une telle "paramétrisation linéaire" est injective précisément lorsque $N = k = \dim E$, et dans ce cas $\Psi : \mathbb{R}^k \rightarrow E$ est un isomorphisme linéaire.

Le point de vue des équations cartésiennes consiste à se donner une application linéaire $\Phi : V \rightarrow \mathbb{R}^N$ avec $\ker \Phi = E$. Un tel "système d'équations cartésiennes" est surjectif précisément lorsque $N = n - k$, la codimension de E , notée aussi $\text{codim } E$. Dans ce cas l'application induite $\bar{\Phi} : V/E \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ est un isomorphisme linéaire.

Ces deux points de vue sont *duaux* en un sens très précis. Une paramétrisation linéaire injective équivaut à la donnée de k éléments linéairement indépendants $\epsilon_1, \dots, \epsilon_k \in \text{Hom}(\mathbb{R}, V)$ tels que $\text{im } \epsilon_i \subset E$ pour tout i . Via l'isomorphisme canonique

$$\text{Hom}(\mathbb{R}, V) \xrightarrow{\sim} V, \quad \epsilon \mapsto e := \epsilon(1)$$

la condition $\text{im } \epsilon_i \subset E$ se traduit par $e_i \in E$. En d'autres termes, se donner une paramétrisation linéaire injective de E revient à se donner une base (e_1, \dots, e_k) de E .

La donnée d'un système minimal d'équations cartésiennes équivaut à la donnée de $n - k$ éléments linéairement indépendants $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-k} \in \text{Hom}(V, \mathbb{R})$ tels que $E \subset \ker \alpha_i$ pour tout i . L'espace $\text{Hom}(V, \mathbb{R})$ est appelé le *dual de V* et il est noté

$$V^* := \text{Hom}(V, \mathbb{R}).$$

Soit $\pi : V \rightarrow V/E$ la projection canonique. Celle-ci induit un isomorphisme canonique

$$(V/E)^* \xrightarrow{\sim} \{\alpha \in V^* : E \subset \ker \alpha\}, \quad a \mapsto \alpha := a \circ \pi.$$

Via cet isomorphisme, la donnée d'un système minimal d'équations cartésiennes équivaut à la donnée d'une base (a_1, \dots, a_{n-k}) de $(V/E)^*$.

FIN DE LA DIGRESSION.

DIGRESSION : ISOMORPHISMES CANONIQUES, CATÉGORIES. Arrêtons-nous un instant sur la notion d'*isomorphisme canonique* qui est apparue à plusieurs reprises dans la discussion précédente.

Définition informelle. Soit \mathcal{C} un “contexte mathématique”. Un objet est dit *canonique* si sa construction ne fait pas intervenir de choix extérieurs au contexte \mathcal{C} .

Dans une première approximation, lorsque le contexte mathématique auquel on fait référence est celui des espaces vectoriels, un objet est dit “canonique” si sa construction ne nécessite pas le choix d’une base. Nous rendrons rigoureuse cette définition plus bas, lorsque nous parlerons de *catégories*.

Exemple. Soit V un espace vectoriel de dimension finie. On a un isomorphisme canonique

$$V \xrightarrow{\cong} V^{**}, \quad v \mapsto (\alpha \mapsto \alpha(v)) \quad (\alpha \in V^*)$$

Exemple. Soit V est un espace vectoriel de dimension finie. Les espaces V et V^* sont isomorphes (puisque de même dimension), mais *pas* de manière canonique. Vous connaissez au moins un moyen de décrire un isomorphisme : on *choisit* une base (e_i) de V , on définit la *base duale* (e_i^*) de V^* par $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$, avec

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

le *symbole de Kronecker*, et l’on définit l’isomorphisme linéaire $V \xrightarrow{\cong} V^*$ par $e_i \mapsto e_i^*$.

Une meilleure manière de décrire un isomorphisme entre V et V^* est de se donner une forme bilinéaire non-dégénérée sur V . Une forme bilinéaire $B \in \text{Bil}(V \times V, \mathbb{R})$ est dite *non-dégénérée* si $B(v, \cdot) = 0$ implique $v = 0$. En présence d’un tel élément $B \in \text{Bil}(V \times V, \mathbb{R}) \cong V^* \otimes V^*$, l’application $V \longrightarrow V^*$, $v \mapsto B(v, \cdot)$ est une application linéaire entre espaces de même dimension, et donc un isomorphisme linéaire de V sur V^* . L’isomorphisme entre V et V^* n’est pas canonique dans la catégorie des espaces vectoriels réels, mais il est canonique dans la catégorie des espaces vectoriels réels munis d’un produit scalaire.

Exercice 6. Démontrer que l’on a un isomorphisme canonique $\text{Bil}(V \times V, \mathbb{R}) \cong V^* \otimes V^*$.

La notion de catégorie, I.

Définition 1.6. Une catégorie \mathcal{C} consiste en une collection d’objets, notée $\text{Ob}\mathcal{C}$, ainsi que de la donnée d’un ensemble de morphismes $\mathcal{C}(x, y)$ entre chaque deux objets x et y de \mathcal{C} . On requiert l’existence

d'un morphisme distingué $\mathbb{1}_x \in \mathcal{C}(x, x)$ pour tout objet x , appelé identité de x , et d'une application de composition

$$\mathcal{C}(x, y) \times \mathcal{C}(y, z) \rightarrow \mathcal{C}(x, z),$$

notée $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \cdot \beta$, ou encore $\beta \circ \alpha$. On demande à ce que cette loi de composition soit associative, et l'on demande à ce que la composition à droite ou à gauche avec l'identité d'un objet soit l'identité.

Lorsque je parlais plus haut de “contexte mathématique”, ce qu'il faut lire désormais est “catégorie”. Vous connaissez déjà de nombreux exemples.

- La catégorie Set des ensembles, avec $\text{Set}(x, y) = y^x$.
- La catégorie Top des espaces topologiques, avec $\text{Top}(x, y)$ l'ensemble des applications continues de x vers y .
- La catégorie Vect des espaces vectoriels de dimension finie, avec $\text{Vect}(x, y)$ l'ensemble des applications linéaires de x vers y .
- La catégorie EuclVect des espaces vectoriels de dimension finie munis d'un produit scalaire, avec $\text{EuclVect}(x, y)$ l'ensemble des applications linéaires de x vers y qui préservent le produit scalaire.
- La catégorie Op_n des ouverts de \mathbb{R}^n , avec $\text{Op}_n(x, y)$ l'ensemble des applications lisses définies sur x à valeurs dans y .
- La catégorie VarDiff des variétés différentielles lisses de dimension finie, avec $\text{VarDiff}(x, y)$ l'ensemble des applications lisses de x vers y . Ce dernier exemple est le sujet du cours.

Nous pouvons reformuler la discussion précédente dans les termes suivants : V est canoniquement isomorphe à V^{**} dans Vect, et V est canoniquement isomorphe à V^* dans EuclVect.

Exercice 7. Préciser le dernier énoncé en indiquant quel produit scalaire on met sur V^* .

FIN DE LA DIGRESSION.

DIGRESSION : OBJETS DÉFINIS PAR DES PROPRIÉTÉS D'UNIVERSALITÉ. Vous avez déjà rencontré de nombreux tels objets, même si vous n'avez pas toujours formulé les propriétés d'universalité correspondantes. Exemples dans la catégorie des espaces vectoriels : le quotient d'un espace vectoriel par un sous-espace, la somme directe, le produit direct, le produit tensoriel. L'idée de cette digression est que toute construction “canonique” dans Vect produit un modèle pour un objet défini par une propriété d'universalité (objet universel).

Plutôt que de donner la définition précise de ce qu'est en général une propriété d'universalité, nous allons illustrer cette notion par un exemple détaillé. Nous donnons par ailleurs les propriétés d'universalité de la somme directe, respectivement du produit direct d'une famille d'espaces vectoriels.

Espace vectoriel quotient. Soit V un espace vectoriel et $E \subseteq V$ un sous-espace. Considérons sur V la relation d'équivalence $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in E$ et notons V/E l'ensemble des classes d'équivalence. Celui-ci porte une structure naturelle d'espace vectoriel, pour laquelle la projection $\pi : V \rightarrow V/E$ qui associe à un élément x sa classe d'équivalence $[x]$ est une application linéaire. L'espace vectoriel V/E est appelé *l'espace vectoriel quotient de V par E* . L'utilité de cette construction est donnée par le fait suivant :

Propriété d'universalité du quotient. Pour tout espace vectoriel W et toute application linéaire $f : V \rightarrow W$ telle que $\ker f \supseteq E$, il existe une unique application linéaire $\bar{f} : V/E \rightarrow W$ telle que $\bar{f} \circ \pi = f$.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \downarrow \pi & \nearrow \exists! \bar{f} & \\ V/E & & \end{array}$$

Prenons maintenant un point de vue légèrement différent. Appelons *un quotient de V par E* une paire (\mathcal{Q}, π) , avec \mathcal{Q} un espace vectoriel et $\pi : V \rightarrow \mathcal{Q}$ une application linéaire telle que $\ker \pi = E$, qui vérifie la *propriété d'universalité* suivante : pour tout espace vectoriel W et toute application linéaire $f : V \rightarrow W$ telle que $\ker f \supseteq E$, il existe une unique application linéaire $\bar{f} : \mathcal{Q} \rightarrow W$ telle que $f = \bar{f} \circ \pi$.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \downarrow \pi & \nearrow \exists! \bar{f} & \\ \mathcal{Q} & & \end{array}$$

Évidemment, le quotient V/E vérifie cette propriété d'universalité. Mais y aurait-il d'autres quotients ? La réponse est fournie par la proposition suivante, qui montre que la construction est parfaitement déterminée.

Proposition 1.7. *Un quotient de V par E est unique à isomorphisme unique près, c'est-à-dire si (\mathcal{Q}, π) et (\mathcal{Q}', π') sont deux quotients de V par E , il existe un isomorphisme canonique $\mathcal{Q} \xrightarrow{\cong} \mathcal{Q}'$.*

Démonstration. Appliquons la propriété universelle de (\mathcal{Q}, π) avec $W = \mathcal{Q}'$ et $f = \pi'$. L'on trouve une unique application $\bar{\pi}' : \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{Q}'$ telle que $\bar{\pi}' \circ \pi = \pi'$. Appliquons ensuite la propriété universelle de (\mathcal{Q}', π') avec $W = \mathcal{Q}$ et $f = \pi$. L'on trouve une unique application $\bar{\pi} : \mathcal{Q}' \rightarrow \mathcal{Q}$ telle que $\bar{\pi} \circ \pi' = \pi$. En particulier $(\bar{\pi} \circ \bar{\pi}') \circ \pi = \pi$. Puisque $\text{Id}_{\mathcal{Q}} \circ \pi = \pi$, l'unicité dans la propriété universelle de (\mathcal{Q}, π) avec $W = \mathcal{Q}$ et $f = \pi$ montre que $\bar{\pi} \circ \bar{\pi}' = \text{Id}_{\mathcal{Q}}$. De même l'on démontre que $\bar{\pi}' \circ \bar{\pi} = \text{Id}_{\mathcal{Q}'}$, de

sorte que $\bar{\pi}'$ et $\bar{\pi}$ sont des isomorphismes canoniquement déterminés, inverses l'un de l'autre.

$$\begin{array}{ccc}
 V & \xrightarrow{\pi'} & Q' \\
 \pi \downarrow & \nearrow \exists! \bar{\pi}' & \\
 Q & &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 V & \xrightarrow{\pi} & Q \\
 \pi' \downarrow & \nearrow \exists! \bar{\pi} & \\
 Q' & &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 V & \xrightarrow{\pi} & Q \\
 \pi \downarrow & \nearrow \text{Id} = \bar{\pi} \circ \bar{\pi}' & \\
 Q & &
 \end{array}$$

□

L'on lit la proposition précédente en disant que *la propriété d'universalité détermine le quotient à isomorphisme unique près*. La construction du quotient V/E montre l'existence du quotient. La propriété d'universalité met par ailleurs en avant la projection canonique $\pi : V \rightarrow V/E$, que nous avons par ailleurs déjà utilisée dans la digression sur la dualité.

Somme directe et produit direct. Soit (V_i) une famille d'espaces vectoriels.

Propriété d'universalité de la somme directe. Une somme directe des V_i est un espace vectoriel \mathcal{Q} muni d'applications linéaires $incl_i : V_i \rightarrow \mathcal{Q}$ qui satisfont la propriété suivante : pour tout espace vectoriel W et toute collection d'applications linéaires $f_i : V_i \rightarrow W$, il existe une unique application linéaire $F : \mathcal{Q} \rightarrow W$ telle que $F \circ incl_i = f_i$ pour tout i .

Cette propriété d'universalité détermine \mathcal{Q} à isomorphisme canonique près. Un modèle explicite est donné par $\mathcal{Q} = \bigoplus_i V_i$, dont les éléments sont les sommes formelles *finies* d'éléments appartenant aux V_i . Les applications $incl_i$ sont les inclusions canoniques, et l'application F déterminée par des $f_i : V_i \rightarrow W$ est notée $\bigoplus_i f_i$.

$$\begin{array}{ccc}
 V_i & \xrightarrow{f_i} & W \\
 incl_i \downarrow & \nearrow \bigoplus_i f_i & \\
 \bigoplus_i V_i & &
 \end{array}$$

Propriété d'universalité du produit direct. Un produit direct des V_i est un espace vectoriel \mathcal{Q} muni d'applications linéaires $proj_i : \mathcal{Q} \rightarrow V_i$ qui satisfont la propriété suivante : pour tout espace vectoriel W et toute collection d'applications linéaires $g_i : W \rightarrow V_i$, il existe une unique application linéaire $G : W \rightarrow \mathcal{Q}$ telle que $proj_i \circ G = g_i$ pour tout i .

Comme nous avons désormais l'habitude, cette propriété d'universalité détermine \mathcal{Q} à isomorphisme canonique près. Un modèle explicite est donné par $\mathcal{Q} = \prod_i V_i$, dont l'ensemble sous-jacent est le produit

cartésien des V_i . Les applications $proj_i$ sont les projections canoniques, et l'application G déterminée par des $g_i : W \rightarrow V_i$ est notée $\prod_i g_i$.

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\prod_i g_i} & \prod_i V_i \\ & \searrow g_i & \downarrow proj_i \\ & & V_i \end{array}$$

Remarque. Les opérations de somme directe et celle de produit direct peuvent être interprétées comme étant duales l'une de l'autre. La somme directe est un espace *depuis lequel* on peut définir des morphismes, le produit direct est un espace *vers lequel* on peut définir des morphismes. Un autre point de vue est celui des isomorphismes canoniques

$$\text{Hom}\left(\bigoplus_i V_i, W\right) \cong \prod_i \text{Hom}(V_i, W),$$

et en particulier

$$\left(\bigoplus_i V_i\right)^* \cong \prod_i V_i^*.$$

FIN DE LA DIGRESSION.

1.4. Immersions et submersions. Dans cette section nous donnons deux théorèmes de forme normale qui sont emblématiques de l'utilisation des difféomorphismes, et du théorème d'inversion locale.

Théorème 1.8 (Forme normale locale pour les immersions). *Soit*

$$\psi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$$

une immersion. Modulo composition par un difféomorphisme local au but, l'immersion s'écrit localement

$$\psi : x \mapsto (x, 0).$$

Démonstration. Détaillons l'énoncé du théorème. Nous souhaitons démontrer l'énoncé suivant : pour tout $x_0 \in \Omega$, il existe un ouvert $\Omega' \subseteq \Omega$ et un difféomorphisme $f : U \xrightarrow{\cong} f(U)$ défini sur un voisinage ouvert U de $p_0 = \psi(x_0)$, tels que $f \circ \psi(x) = (x, 0)$ pour tout $x \in \Omega'$.

Soit $\psi = (\psi^1, \dots, \psi^n)$. Par hypothèse $d\psi(x_0)$ est injective, et l'on peut supposer sans perte de généralité que les dérivées $(d\psi^1, \dots, d\psi^k)$ sont linéairement indépendantes au point x_0 (dans le cas contraire on compose par une permutation des coordonnées au but). La fonction $F : \Omega' \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par

$$F(x, y) := \psi(x) + (0, y)$$

a une dérivée inversible en $(x_0, 0)$. C'est donc un difféomorphisme local. Le difféomorphisme local $f := F^{-1}$ est le changement de variable recherché. \square

Théorème 1.9 (Forme normale locale pour les submersions). *Soit*

$$\bar{\phi} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$$

une submersion. Modulo composition par un difféomorphisme local à la source, la submersion s'écrit localement

$$\bar{\phi} : (x, y) \mapsto y.$$

Démonstration. Supposons sans perte de généralité que les dérivées partielles $(\partial\bar{\phi}/\partial x^{k+1}, \dots, \partial\bar{\phi}/\partial x^n)$ sont linéairement indépendantes au point (x_0, y_0) . L'application $F : U \rightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ définie par

$$F(x, y) := (x - x_0, 0) + \bar{\phi}(x, y)$$

a une différentielle inversible en (x_0, y_0) . C'est donc un difféomorphisme local et son inverse satisfait aux conclusions du théorème. \square

Alors que nous les avons caractérisées en termes de submersions locales, les sous-variétés apparaissent souvent comme fibres de submersions globales.

Définition 1.10. *Soit $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application lisse.*

- Un point $y \in \mathbb{R}^m$ est dit valeur régulière si f est une submersion en tout point de la fibre $f^{-1}(y)$. (Ceci vaut en particulier si $f^{-1}(y) = \emptyset$.)
- Un point $y \in \mathbb{R}^m$ est dit valeur critique si ce n'est pas une valeur régulière, ou encore s'il existe un point $x \in f^{-1}(y)$ tel que $df(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ne soit pas surjective.
- Un tel point x est appelé point critique.

L'on remarquera le fait que, lorsque $n < m$, l'image de f est nécessairement constituée de valeurs critiques. Il découle de la discussion précédente que la préimage $f^{-1}(y)$ d'une valeur régulière d'application lisse $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $n \geq m$ est une sous-variété de dimension $n - m$.

Théorème 1.11 (Sard). *Les valeurs critiques d'une application lisse $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ forment un ensemble de mesure nulle. En particulier, les valeurs régulières sont denses dans \mathbb{R}^m .* \square

Une fonction peut être comprise via l'étude de ses ensembles de niveau. Pour une fonction lisse, un ensemble de niveau typique sera une sous-variété. Ceci fournit une nouvelle motivation pour l'étude des sous-variétés, en tant qu'objets géométriques qui permettent d'étudier les fonctions. Cette idée a été incarnée par Marston Morse dans ce que l'on appelle aujourd'hui *théorie de Morse*, avec un succès phénoménal (voir le livre de Milnor, *Morse Theory*). L'on discutera plus tard les premiers éléments de théorie de Morse, et l'on verra qu'elle est aussi en lien avec l'idée de *discrétisation* des fonctions.

1.5. Variétés abstraites, ou non-plongées. Nous avons déjà établi un parallèle entre les différentes manières de définir un sous-espace vectoriel et les différentes manières de définir une sous-variété. L'étude des sous-variétés est en quelque sorte similaire à l'étude des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n . Tout comme en algèbre linéaire la vraie force de la théorie ressort lorsque l'on utilise une définition qui nous affranchit de l'espace ambiant et des coordonnées, il en est de même pour les variétés.

La remarque suivante peut sembler inoffensive mais elle débouche directement sur la définition d'une variété abstraite. Soit $M^k \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété de dimension k . Soient $\phi_i : U_i \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \phi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$ deux difféomorphismes de redressement comme dans la Définition 1.1, définis au voisinage d'un point $p \in M$. Alors

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\cong} \phi_2(U_1 \cap U_2)$$

est un difféomorphisme, et en particulier

$$\begin{aligned} \phi_2|_{M \cap U_2} \circ \phi_1|_{M \cap U_1}^{-1} : \phi_1((M \cap U_1) \cap (M \cap U_2)) &\subseteq \mathbb{R}^k \times \{0\} \\ &\xrightarrow{\cong} \phi_2((M \cap U_1) \cap (M \cap U_2)) \subseteq \mathbb{R}^k \times \{0\} \end{aligned}$$

est un difféomorphisme. L'avantage de cette dernière formule est qu'elle ne fait intervenir que des objets qui sont définis sur M , et non pas sur (des ouverts de) l'espace ambiant.

Définition 1.12. Une variété de dimension k est un espace topologique M muni d'une famille $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ de paires (U_i, ϕ_i) telles que :

- la famille (U_i) est un recouvrement ouvert de M ;
- chaque $\phi_i : U_i \rightarrow \phi_i(U_i) \subseteq \mathbb{R}^k$ est un homéomorphisme sur son image, qui est un ouvert de \mathbb{R}^k ;
- pour tous $i, j \in I$ l'application

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \xrightarrow{\cong} \phi_j(U_i \cap U_j)$$

est un difféomorphisme.

Définition 1.13. La famille (U_i, ϕ_i) est appelé atlas, et chaque paire (U_i, ϕ_i) est appelée carte, ou carte locale. Les difféomorphismes $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$ sont appelées applications de changement de carte, ou fonctions de transition.

L'exemple suivant justifie la terminologie cartographique.

Exemple 1.14. Soit

$$S^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Soient $N := (0, 0, 1)$ le pôle Nord et $S := (0, 0, -1)$ le pôle Sud. On définit deux cartes

$$\phi_N : S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \phi_S : S^2 \setminus \{S\} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

par *projection stéréographique* : $\phi_N(p)$ est l'unique point d'intersection de la demi-droite $[N, p)$ avec le plan $\mathbb{R}^2 \times \{0\} \equiv \mathbb{R}^2$, et $\phi_S(q)$ est l'unique

point d'intersection de la demi-droite $[Sq)$ avec $\mathbb{R}^2 \times \{0\} \equiv \mathbb{R}^2$. Montrer que ces deux cartes définissent un atlas sur S^2 .

Le calcul différentiel peut être transféré aux variétés. Plus précisément, toute notion de calcul différentiel à caractère local peut être formulée sur les variétés. Par exemple, une application continue $f : M \rightarrow N$ entre deux variétés est dite *lisse* si l'application $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ est lisse pour toutes deux cartes ϕ et ψ sur M et N respectivement !

Exercice 8. Une application continue $f : M \rightarrow N$ est lisse si et seulement si pour tout point $p \in M$ il existe deux cartes ϕ et ψ définies au voisinage de p et $f(p)$ respectivement, telles que $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ soit lisse.

Puisque le caractère lisse d'une application est invariant par composition avec des difféomorphismes à la source et au but, il est souvent commode de penser à un atlas donné $\{(U_i, \phi_i)\}$ comme ayant été élargi de manière à contenir toutes les cartes (U, ϕ) compatibles simultanément avec toutes les (U_i, ϕ_i) . Un tel atlas est dit *maximal*. L'atlas maximal associé à un atlas donné $\{(U_i, \phi_i)\}$ contient en particulier toutes les restrictions des ϕ_i aux ouverts de U_i .

Exercice 9. Donner les définitions de submersion, immersion, difféomorphisme, point critique dans les contexte des variétés. Formuler et démontrer des théorèmes d'inversion locale, de fonctions implicites, de forme normale pour immersions et submersions.

Les variétés sont un exemple d'*objet mathématique défini à partir d'un modèle local*. Vous rencontrerez ce genre de construction dans de nombreux contextes, dont voici une première liste. Les *variétés complexes*, qui sont des objets centraux en analyse complexe, sont modelées sur des ouverts de \mathbb{C}^n en demandant que les applications de changement de carte soient des biholomorphismes (applications bijectives, dérivables au sens complexe, avec inverse dérivable au sens complexe). Les *variétés de Banach* sont modelées sur des ouverts dans des espaces de Banach, en demandant que les applications de changement de carte soient des difféomorphismes. Elles jouent un rôle clé dans l'analyse des équations aux dérivées partielles non-linéaires de nature géométrique (Cauchy-Riemann, Yang-Mills, Yamabe, ...). Les *schémas* de la géométrie algébrique peuvent être pensés comme étant des espaces modelés localement sur le spectre d'anneaux commutatifs.

1.6. Fonctions de troncature lisses. Plongements dans des espaces euclidiens. Le fait d'avoir dégagé une définition abstraite des variétés différentielles représente certainement un gain conceptuel : nous pourrions les reconnaître dans des situations qui n'ont *a priori* rien à voir avec l'espace euclidien. Mais l'on doit aussi se demander si la classe d'objets que l'on peut définir de cette manière est strictement plus générale que celle des sous-variétés de \mathbb{R}^n . Le but de cette section est de montrer que la réponse est négative pourvu que l'on travaille avec des espaces topologiques séparés et à base dénombrable.

Nous utiliserons la terminologie topologique suivante.

Nous dirons qu'un espace topologique est *séparé* si pour tous deux points distincts $x \neq y$ il existe des voisinages ouverts $U \ni x$ et $V \ni y$ tels que $U \cap V = \emptyset$. Nous dirons qu'un espace topologique est à *base dénombrable* s'il existe une famille dénombrable d'ouverts $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ayant la propriété suivante : pour tout point x et tout ouvert $V \ni x$, il existe i avec $x \in U_i \subset V$. De manière équivalente, tout ouvert peut être écrit comme réunion d'éléments de la famille (U_i) . Nous dirons qu'un espace topologique est *compact* si tout recouvrement ouvert admet un sous-recouvrement fini. Nous dirons qu'un ouvert $U \subset X$ d'un espace topologique X est *relativement compact* si son adhérence est un ensemble compact.

Exemple. L'espace euclidien \mathbb{R}^n est à base dénombrable. En effet, l'on peut choisir comme base l'ensemble des boules ouvertes de rayon rationnel centrées aux points de \mathbb{Q}^n . Par conséquent, tout ouvert de \mathbb{R}^n est à base dénombrable.

Exemple. Une variété compacte M est à base dénombrable. En effet, recouvrons M par un nombre fini d'ouverts de carte (U_k, ϕ_k) . Choisissons une base dénombrable pour chaque $\phi_k(U_k) \subset \mathbb{R}^n$ et transportons-la en une base dénombrable \mathcal{B}_k pour U_k . Le lecteur vérifiera facilement que $\bigcup_k \mathcal{B}_k$ est une base dénombrable pour la topologie de M . De manière similaire, une variété qui possède un atlas dénombrable est à base dénombrable.

Exercice 10. (Re)démontrer les énoncés suivants :

- *compact dans séparé est fermé* ;
- *fermé dans compact est compact*.

Théorème 1.15 (Whitney, *Annals of Math.* (2) 37 (1936)). *Une variété de dimension n séparée et à base dénombrable admet un plongement dans \mathbb{R}^{2n+1} .*

Exercice 11. Réciproquement, si une variété admet un plongement dans un espace euclidien alors elle est séparée et à base dénombrable.

CONVENTION : DANS LA SUITE DU COURS TOUTES LES VARIÉTÉS SERONT SUPPOSÉES SÉPARÉES ET, SI ELLES SONT NON-COMPACTES, À

BASE DÉNOMBRABLE. POUR ALLÉGER LA LECTURE NOUS NE FERONS DÉSORMAIS PLUS MENTION EXPLICITE DE CES HYPOTHÈSES.

Comme nous le verrons plus bas, le fait d'imposer ces deux hypothèses de nature topologique présente de multiples avantages, qui vont bien au-delà du simple fait de pouvoir plonger les variétés dans des espaces euclidiens : existence de fonctions de troncature, existence de partitions de l'unité, possibilité de recoller des objets locaux en des objets globaux, métrisabilité.

Nous allons démontrer plus tard dans le cours le théorème de Whitney dans le cas des variétés compactes (séparées !) comme une application du théorème de Sard. Dans cette section nous faisons un premier pas dans cette direction en démontrant le résultat plus faible suivant.

Théorème 1.16. *Toute variété compacte se plonge dans un espace euclidien de dimension assez grande.*

La preuve de ce résultat repose sur la construction de fonctions de troncature. Étant donné un espace topologique X et une fonction continue $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, le *support de f* est défini comme étant l'adhérence dans X du lieu de non-annulation de f :

$$\text{supp}(f) := \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}.$$

Lorsque $X \subset Y$ est un sous-espace topologique, on note

$$\text{supp}_Y(f)$$

l'adhérence dans Y du lieu de non-annulation de f .

Lemme 1.17. *Fixons $0 < r < R$. Il existe une fonction lisse $f = f_{r,R} : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ telle que*

$$f|_{B^n(r)} = 1, \quad \text{supp}(f) \subset B^n(R).$$

Démonstration. Il suffit de construire une fonction lisse $g : [0, \infty[\rightarrow [0, 1]$ telle que $g(t) = 1$ pour $t < r$ et $\text{supp}(g) \subset [0, R[$. Dans ce cas $f(x) := g(\|x\|)$ vérifie les conditions du lemme.

On commence par la fonction "test"

$$a_R(t) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{R^2-t^2}}, & |t| < R, \\ 0, & |t| \geq R. \end{cases}$$

Sa primitive normalisée $A_R(t) := \int_{-\infty}^t a_R(\tau) d\tau / \int_{-\infty}^{\infty} a_R(\tau) d\tau$ vérifie

$$A_R(t) = 0, \quad t \leq -R \quad \text{et} \quad A_R(t) = 1, \quad t \geq R.$$

La fonction $B_R(t) := 1 - A_R(t)$ vérifie

$$B_R(t) = 1, \quad t \leq -R \quad \text{et} \quad B_R(t) = 0, \quad t \geq R.$$

(Son graphe est symétrique au graphe de A_R par rapport à la droite $y = 1/2$.) Finalement on translate et on “comprime” ce graphe en considérant $B_{r,R}(t) := B_R(\frac{R-r}{2R}t - \frac{(R-r)r}{2R} - R)$. Cette fonction vérifie

$$B_{r,R}(t) = 1, \quad t \leq r \quad \text{et} \quad B_{r,R}(t) = 0, \quad t \geq R.$$

Ainsi $g := B_{r,R}|_{[0,\infty[}$ convient. \square

Lemme 1.18. *Soit M une variété et $U \subset M$ un ouvert. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lisse telle que*

$$\text{supp}_M(f) \subset U.$$

Alors l'extension de f par zéro, définie explicitement par

$$\tilde{f} : M \rightarrow \mathbb{R}, \quad p \mapsto \begin{cases} f(p), & p \in U, \\ 0, & p \notin U, \end{cases}$$

est une fonction lisse.

Démonstration. Il faut montrer que pour tout point $p \in M$ il existe une carte (V, ϕ) contenant p telle que $\tilde{f} \circ \phi^{-1} : \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ soit lisse. Si $p \in U$ on prend une carte quelconque (V, ϕ) avec $p \in V \subset U$, et $\tilde{f}|_V = f|_V$ est lisse. Si $p \notin U$ alors $p \in \text{supp}_M(f)^c$. Celui-ci est un ouvert sur lequel \tilde{f} est identiquement nulle, donc lisse. \square

L'on a clairement égalité

$$\text{supp}(f) = \text{supp}_M(f)$$

dès que $\text{supp}(f)$ est fermé dans M . En particulier, lorsque la variété ambiante M est séparée, comme nous l'avons désormais supposé, l'on a égalité dès que $\text{supp}(f)$ est compact dans M ou, de manière équivalente, dans U . Nous avons donc démontré :

Corollaire 1.19. *Soit M une variété (séparée!) et $U \subset M$ un ouvert. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lisse à support compact. Alors l'extension de f à M par zéro est lisse. \square*

Ce résultat est faux dès que la variété M n'est pas séparée (cf. Exercice 12 plus bas). Par conséquent, tous les énoncés du reste de cette section sont également faux pour des variétés non-séparées.

Lemme 1.20. *Soient $K \subset U \subseteq M$ avec M variété, K compact et U ouvert. Il existe une fonction lisse $f : M \rightarrow [0, 1]$ avec*

$$f|_K = 1, \quad \text{supp}(f) \subset U.$$

De plus on peut choisir f à support compact.

Démonstration. Soit (U_i, ϕ_i) une famille finie de cartes sur M qui recouvre K . L'on peut supposer sans perte de généralité que $\text{im}(\phi_i) =$

$B^n(1)$ et que les ouverts $U'_i := \phi_i^{-1}(B^n(\frac{1}{2}))$ recouvrent K (exercice!). Posons

$$f_i : U_i \rightarrow [0, 1], \quad f_i := f_{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}} \circ \phi_i.$$

Par le Corollaire 1.21 l'extension \tilde{f}_i de f_i à M par 0 est lisse. Finalement, l'application

$$f := 1 - \prod_i (1 - \tilde{f}_i)$$

satisfait aux conditions du lemme. \square

Corollaire 1.21 (Principe d'extension après restriction). *Soit M une variété, $U \subset M$ un ouvert et $V \subset U$ un ouvert relativement compact. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lisse. Il existe une fonction lisse $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $H|_V = h$.*

Démonstration. Par le lemme 1.20 il existe une fonction lisse à support compact $f : U \rightarrow [0, 1]$ telle que $f|_{\bar{V}} = 1$. La fonction $f \cdot h : U \rightarrow \mathbb{R}$ coïncide avec h sur V et son support est contenu dans celui de f . Il est donc compact dans U et on peut donc étendre cette fonction par zéro à une fonction lisse sur M . \square

Le Lemme 1.20 et le Corollaire 1.21 admettent les généralisations suivantes (pour lesquelles l'hypothèse de base dénombrable est essentielle). Vous pourrez consulter le livre de Warner, *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups* pour les preuves.

Lemme 1.22. *Soient $A \subset U \subseteq M$ avec M variété, A fermé et U ouvert. Il existe une fonction lisse $f : M \rightarrow [0, 1]$ avec*

$$f|_A = 1, \quad \text{supp}(f) \subset U.$$

\square

Corollaire 1.23. *Soit M une variété et $V \subset U \subset M$ deux ouverts avec $\bar{V} \subset U$. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lisse. Il existe une fonction lisse $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $H|_V = h$.* \square

Preuve du théorème 1.16.

Idée de la preuve : la seule information dont nous disposons sur M est l'existence d'un ensemble fini de cartes qui recouvrent M . En mettant toutes les cartes ensemble on obtient certainement une application injective sur M à valeurs dans un espace euclidien. Mais il faut d'abord étendre les cartes à des fonctions lisses sur M . À ce stade le principe d'extension après restriction est fort utile.

Soit (U_i, ϕ_i) , $i = 1, \dots, N$ un atlas fini tel que $\text{im}(\phi_i) = B^n(1)$ et les $V_i := \phi_i^{-1}(B^n(\frac{1}{2}))$ recouvrent M . L'on trouve par le lemme 1.20 des fonctions lisses à support compact $f_i : U_i \rightarrow [0, 1]$ telles que $f_i|_{\bar{V}_i} = 1$. L'on peut alors regarder chaque application $f_i \phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ comme une

fonction lisse sur M , en l'étendant par 0. De même pour chaque f_i . On considère alors l'application

$$F : M \rightarrow \mathbb{R}^{nN+N}, \quad f = (f_1\phi_1, \dots, f_N\phi_N, f_1, \dots, f_N).$$

C'est une application lisse. C'est aussi une immersion puisque tout point appartient à un certain ouvert V_i , où la i -ème composante de F vaut ϕ_i , qui est un difféomorphisme sur image. L'injectivité découle du fait suivant : si p et q sont deux points tels que $F(p) = F(q)$, on a en particulier $f_i(p) = f_i(q)$ pour tout i . Soit i tel que $p \in V_i$, de sorte que $f_i(p) = 1$. Alors $f_i(q) = 1$, ce qui implique $q \in U_i$. Ainsi $\phi_i(p) = \phi_i(q)$, et par conséquent $p = q$ puisque ϕ_i est injective sur son domaine de définition. \square

Exercice 12 (Exemple de variété non-séparée). Soient A_1, A_2 deux copies de $]0, \infty[$ et considérons

$$M :=]-\infty, 0[\cup A_1 \cup A_2.$$

Munir M d'une topologie telle que les identifications naturelles $\phi_i :]-\infty, 0[\cup A_i \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}$, $i = 1, 2$ soient des homéomorphismes. Montrer que ϕ_1, ϕ_2 définissent un atlas sur M . Montrer que M n'est pas séparée (plus précisément, les points qui ne peuvent pas être séparés sont les deux copies de 0 dans A_1 et A_2). Donner un exemple de fonction lisse à support compact dans $] - \infty, 0[\cup A_1$ dont l'extension par 0 à M n'est pas lisse.

Remarque (à propos des partitions de l'unité). Il est coutumier de parler de partitions lisses de l'unité lorsque l'on construit des fonctions de troncature, puisque celles-ci constituent le point clé. Nous allons remettre cette discussion à plus tard, lorsque nous aurons à disposition la notion d'espace tangent et de champ de vecteurs, afin de pouvoir illustrer les partitions de l'unité en tant qu'outil de recollement d'objets locaux en des objets définis globalement. Pour un aperçu avant la lettre voir par exemple le livre de Warner, *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*.

2. FIBRÉ TANGENT. FIBRÉS VECTORIELS.

2.1. Espace tangent. Application tangente. Dans cette section nous définissons l'espace tangent T_pM à une variété M en un point $p \in M$, ainsi que la différentielle

$$df(p) : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$$

d'une application lisse $f : M \rightarrow N$. Nous donnons trois points de vue équivalents que nous relierons aussi aux sous-variétés. Ces trois points de vue sont à mettre en parallèle avec les trois définitions équivalentes d'une sous-variété que nous avons abordé dans la section 1.2.

I. LE POINT DE VUE DES CARTES. Un point de départ pour aboutir à la notion d'espace tangent est le souhait de définir une notion de différentielle pour une application lisse. Si l'on essaie de partir de la définition de la lissité en termes de cartes, l'on rencontre tout de suite le problème suivant : étant donnée une application lisse $f : M^m \rightarrow N^n$ et des cartes (U, ϕ) , (V, ψ) à la source et au but, la différentielle de $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ est une application linéaire $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ qui dépend évidemment du choix de cartes (à travers leurs différentielles)! Pour récupérer un objet intrinsèque nous sommes naturellement amenés à nous affranchir des bases canoniques sur \mathbb{R}^m et \mathbb{R}^n .

Définition 2.1. Soit M^m une variété de dimension m munie d'un atlas $\{(U_i, \phi_i)\}$. Pour tout $p \in M$ on définit l'espace tangent en p à M , noté T_pM , comme étant l'espace vectoriel réel de dimension m

$$T_pM := \coprod_{i: U_i \ni p} \{i\} \times \mathbb{R}^m / \sim$$

où

$$(i, \xi) \sim (j, \eta) \Leftrightarrow d(\phi_j \circ \phi_i^{-1})(x)\xi = \eta, \quad x = \phi_i(p).$$

La structure d'espace vectoriel sur T_pM est donnée par

$$\lambda \cdot [(i, \xi)] := [(i, \lambda\xi)], \quad \lambda \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}^m,$$

$$\begin{aligned} [(i, \xi)] + [(j, \xi')] &:= [(j, d(\phi_j \circ \phi_i^{-1})(x)\xi + \xi')], & x = \phi_i(p), \\ &= [(i, \xi + d(\phi_i \circ \phi_j^{-1})(y)\xi')], & y = \phi_j(p). \end{aligned}$$

Définition 2.2. Soit $f : M^m \rightarrow N^n$ une application lisse et $p \in M$. La différentielle de f en p , ou application tangente de f en p , est l'application linéaire

$$df(p) : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N, \text{ ou } f_{*p} : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N,$$

définie par

$$df(p)[(i, \xi)] := [(j, d(\psi_j \circ f \circ \phi_i^{-1})(x)\xi)], \quad x = \phi_i(p),$$

où ϕ_i est une carte locale sur M au voisinage de p et ψ_j est une carte locale sur N au voisinage de $f(p)$.

Vous devez – et pouvez ! – vérifier que ces définitions sont cohérentes (bonne définition de la structure d'espace vectoriel, indépendance de la définition de la différentielle par rapport au choix de cartes etc.). Ces définitions sont motivées par le souhait de définir *l'espace tangent en p à M comme un espace vectoriel de dimension m qui constitue la source naturelle de la différentielle d'une application lisse*. Celui-ci ne possède pas de base privilégiée ; un choix de carte fournit une base qui correspond à la base canonique de \mathbb{R}^m , mais cette base dépend du choix de carte.

Exercice 13 (composition des différentielles). Soient $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$ des applications lisses et $p \in M$. Montrer l'égalité

$$d(g \circ f)(p) = dg(f(p)) \circ df(p).$$

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{g \circ f} & P \\ & \searrow f & \nearrow g \\ & N & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} T_p M & \xrightarrow{d(g \circ f)(p)} & T_{g(f(p))} P \\ & \searrow df(p) & \nearrow dg(f(p)) \\ & T_{f(p)} N & \end{array}$$

Une première intuition géométrique sur l'espace tangent nous est donnée lorsque M est une sous-variété d'un espace euclidien.

Proposition 2.3. Soit $M^k \subseteq \mathbb{R}^n$ une sous-variété. Étant donné $p \in M$ on choisit un système submersif d'équations locales $\bar{\phi} : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ avec $p \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert et $M \cap U = \bar{\phi}^{-1}(0)$.

(1) Le sous-espace vectoriel

$$\ker d\bar{\phi}(p) \subseteq \mathbb{R}^n$$

ne dépend pas du choix de $\bar{\phi}$.

(2) Il existe un isomorphisme canonique

$$T_p M \xrightarrow{\cong} \ker d\bar{\phi}(p).$$

Démonstration. (1) Nous savons que l'on peut écrire localement M au voisinage de p comme image d'un plongement ψ de rang k . Notons $p = \psi(x)$. Puisque $\bar{\phi} \circ \psi \equiv 0$ on obtient $d\bar{\phi}(p) \circ d\psi(x) = 0$, de sorte que $\text{im } d\psi(x) \subseteq \ker d\bar{\phi}(p)$. Or nous savons que ces deux espaces vectoriels sont de même dimension égale à k , d'où $\text{im } d\psi(x) = \ker d\bar{\phi}(p)$. Ce raisonnement vaut pour tout choix de $\bar{\phi}$ à ψ fixé et démontre l'indépendance de $\ker d\bar{\phi}(p)$ par rapport au choix de $\bar{\phi}$.

(2) Soit $\phi_i : U_i \subseteq M \rightarrow \mathbb{R}^k$ une carte autour de p , avec $\phi_i^{-1} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ plongement et $\phi(p) = x$. L'on définit une application linéaire

$$T_p M \rightarrow \text{im } d\phi_i^{-1}(x) = \ker d\bar{\phi}(p), \quad [(i, \xi)] \mapsto d\phi_i^{-1}(x)\xi.$$

Ceci est une application bien définie. Elle est injective puisque $d\phi_i^{-1}(x)$ l'est. Les dimensions de $T_p M$ et $\text{im } d\phi_i^{-1}(x)$ étant les mêmes, égales à k , on déduit que notre application linéaire réalise un isomorphisme. \square

Lorsque $M \subseteq \mathbb{R}^n$ est une sous-variété, le noyau $\ker d\bar{\phi}(p)$ décrit ci-dessus s'appelle aussi *direction de l'espace tangent géométrique*. On le note désormais aussi T_pM . L'*espace tangent géométrique* est par définition l'espace affine passant par p et ayant comme direction T_pM ; on le notera simplement $p+T_pM$. En fonction du contexte, on regardera T_pM ou bien comme un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n , ou bien comme un espace vectoriel abstrait.

Exemple. Soit $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\} = \bar{\phi}^{-1}(1)$, avec $\bar{\phi} : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|^2$ submersion au-dessus de 1. Puisque $d\bar{\phi}(x) = 2\langle x, \cdot \rangle$ on obtient l'identification canonique

$$T_x S^n \cong x^\perp := \{\xi \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle x, \xi \rangle = 0\}.$$

Exercice 14. (1) Montrer que pour tout espace vectoriel V de dimension finie et tout point $p \in V$ on a un isomorphisme canonique

$$T_p V \cong V.$$

En particulier l'on a un isomorphisme canonique

$$T_p \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n.$$

(2) Soit $M^k \subseteq \mathbb{R}^n$ une sous-variété. Montrer que l'inclusion $i : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une application lisse et que sa différentielle

$$di(p) : T_p M \rightarrow T_p \mathbb{R}^n$$

est l'inclusion $T_p M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$.

(3) Soit V un espace vectoriel et $A \subseteq V$ un sous-espace affine de direction $W \subseteq V$. Montrer que A est une sous-variété lisse de dimension égale à $\dim W$. Montrer que l'on a un isomorphisme canonique $T_p A \cong W$ pour tout $p \in A$.

(4) Soit $U \subseteq V$ un ouvert dans un espace vectoriel de dimension finie. Montrer que l'on a un isomorphisme canonique

$$T_p U \cong V.$$

(5) Soit $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application lisse définie sur un ouvert U dans \mathbb{R}^n . Vérifier que la différentielle classique $df(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $p \in U$ coïncide avec la différentielle $df(p) : T_p U \rightarrow T_{f(p)} \mathbb{R}^m$ définie ci-dessus.

Voici maintenant une caractérisation intrinsèque de l'espace tangent géométrique en un point p à une sous-variété $M^k \subset \mathbb{R}^n$.

Proposition 2.4. Soit $M^k \subseteq \mathbb{R}^n$ une sous-variété. L'espace tangent géométrique $p+T_pM$ en un point $p \in M$ est l'unique sous-espace affine A de dimension k passant par p et ayant la propriété suivante : il existe des paramétrisations $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ d'un voisinage de p dans M et

$\psi_A : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}^n$ d'un voisinage de p dans A , qui coïncident à l'ordre 1 aux points qui sont préimages de p :

$$d\psi(x) = d\psi_A(y), \quad x = \psi^{-1}(p), \quad y = \psi_A^{-1}(p).$$

Démonstration. Il est clair que $p + T_p M$ vérifie la condition décrite : si $\psi : \Omega \subset \mathbb{R}^k \rightarrow M$ est une paramétrisation arbitraire au voisinage de p avec $\psi(x) = p$, on prend $\Omega' = \mathbb{R}^k$ et $\psi_{p+T_p M} := p + d\psi(x)$, la paramétrisation linéaire de A donnée par la différentielle de ψ .

Pour l'unicité, l'exercice 14 nous assure que la direction de A est $T_p A$. Or $T_p A = \text{im } d\psi_A(y) = \text{im } d\psi(x) = T_p M$, donc $A = p + T_p M$. \square

Remarque 2.5 (contact de deux sous-variétés de dimension k). *On dit que deux sous-variétés ont un contact d'ordre au moins $\ell \geq 1$ en un point d'intersection p , ou encore qu'elles sont tangentes à l'ordre au moins $\ell \geq 1$ en p , si elles admettent au voisinage de p des paramétrisations ayant le même jet d'ordre ℓ , i.e. les mêmes dérivées partielles d'ordre $\leq \ell$, aux points qui sont préimages de p . La proposition précédente peut être reformulée en disant que le plan tangent géométrique en p à une sous-variété $M^k \subseteq \mathbb{R}^n$ est l'unique espace affine de dimension k qui a un contact d'ordre au moins 1 avec M en p . C'est la formulation mathématiquement rigoureuse du fait que l'espace tangent géométrique est l'espace affine de dimension k qui approxime le mieux la sous-variété au voisinage de p .*

Ceci est à mettre en lien avec notre identification de la direction de l'espace tangent géométrique avec l'espace tangent abstrait, qui est la source naturelle des différentielles d'applications lisses définies sur M : pour étudier des phénomènes de nature linéaire en p on peut tout simplement remplacer la variété par son espace tangent et les applications linéaires par leur différentielle.

II. LE POINT DE VUE DES COURBES. Le point de vue que nous présentons maintenant a deux avantages : d'un côté il ne fait pas référence explicite aux cartes locales, d'un autre côté il met en avant l'intuition que nous avons dans \mathbb{R}^n d'un vecteur tangent comme étant une direction de mouvement infinitésimale. Il est à mettre en relation avec la définition 1.5 des sous-variétés de \mathbb{R}^n comme images locales de plongements.

Soit $c : I \rightarrow M$ une courbe lisse définie sur un intervalle ouvert $I \subseteq \mathbb{R}$. La différentielle $dc(t) : T_t I \rightarrow T_{c(t)} M$, $t \in I$ est une application linéaire que l'on peut identifier à une application linéaire $dc(t) : \mathbb{R} \rightarrow T_{c(t)} M$ en vue de l'isomorphisme canonique $T_t I \cong \mathbb{R}$. Si l'on note

$$\dot{c}(t) := \frac{d}{dt}c(t) := dc(t) \cdot 1 \in T_{c(t)} M,$$

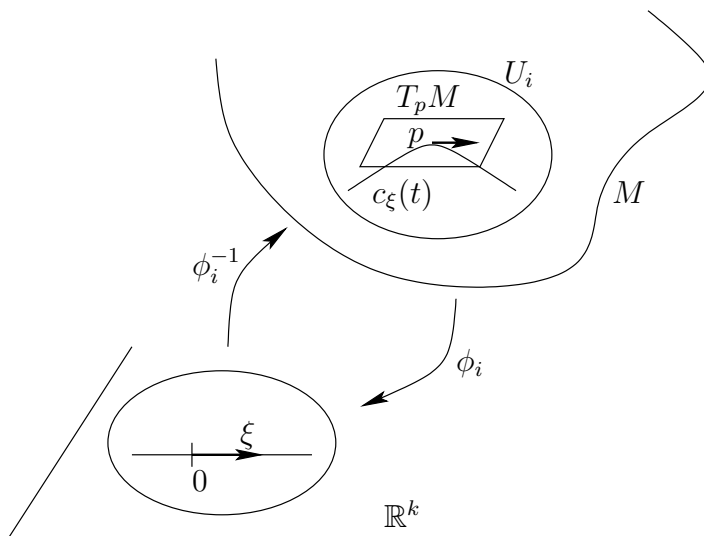


FIGURE 1. Espace tangent comme ensemble de classes d'équivalence de courbes.

l'on a nécessairement $dc(t)\lambda = \lambda\dot{c}(t)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On appelle $\dot{c}(t)$ *vecteur vitesse de la courbe c à l'instant t* , ou *vecteur tangent à c à l'instant t* . Le vecteur vitesse détermine donc la différentielle $dc(t)$ et l'on a $\text{im } dc(t) = \mathbb{R}\dot{c}(t) \subset T_{c(t)}M$. La courbe c est un plongement local en t si et seulement si $\dot{c}(t) \neq 0$.

Proposition-Définition 2.6. *Soit M une variété et $p \in M$. Il existe une bijection canonique entre T_pM et l'ensemble des classes d'équivalence de courbes lisses*

$$c : I \rightarrow M, \quad 0 \in I \subseteq \mathbb{R}, \quad c(0) = p,$$

pour la relation d'équivalence

$$c \sim c' \Leftrightarrow \dot{c}(0) = \dot{c}'(0).$$

Démonstration. Notons \mathcal{C}_p l'ensemble des classes d'équivalence $[c]$ de courbes c comme dans l'énoncé. Montrons que l'application

$$\mathcal{C}_p \rightarrow T_pM, \quad [c] \mapsto \dot{c}(0)$$

est une bijection. La bonne définition et l'injectivité sont une conséquence directe de la définition de la relation d'équivalence \sim . Pour la surjectivité, soit (U_i, ϕ_i) une carte autour de p telle que $\phi_i(p) = 0$ et soit $[(i, \xi)] \in T_pM$ un vecteur tangent. La courbe

$$c_\xi(t) := \phi_i^{-1}(t\xi),$$

définie sur un voisinage ouvert I de 0 tel que $I\xi \in \phi_i(U_i)$, est lisse et vérifie $\dot{c}_\xi(0) = [(i, \xi)]$ (Figure 1). \square

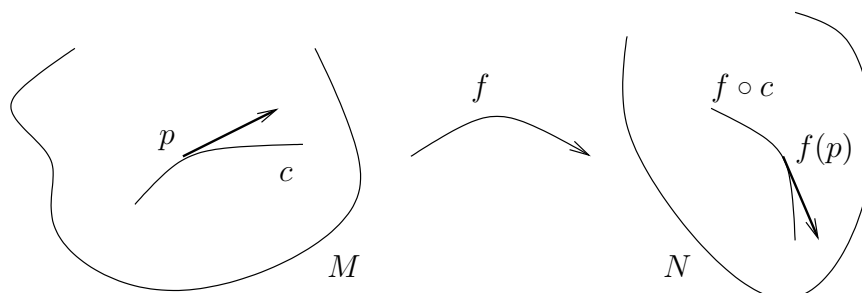


FIGURE 2. Différentielle d'une application agissant sur une classe d'équivalence de courbes.

L'on remarquera que l'ensemble des classes d'équivalence de courbes passant par un point $p \in M$ ne possède pas de structure d'espace vectoriel évidente, quoique l'on peut le munir d'une telle structure en transportant celle de $T_p M$. Cette description géométrique de l'espace tangent occulte en quelque sorte l'algèbre. Il ne faut pas y voir un inconvénient, mais plutôt la manifestation d'un fait général : la géométrie et l'algèbre s'éclairent mutuellement.

Proposition-Définition 2.7. *Soit $f : M \rightarrow N$ une application lisse et $[c]$ un vecteur tangent en $p \in M$ représenté par la classe d'équivalence d'une courbe c . Alors*

$$df(p)[c] = [f \circ c].$$

Démonstration. Le vecteur tangent représenté par $[c]$ est précisément $\dot{c}(0) = dc(0) \cdot 1$. En appliquant la règle de dérivation des fonctions composées on obtient (Figure 2)

$$df(p)[c] = df(p)\dot{c}(0) = df(p)dc(0) \cdot 1 = d(f \circ c)(0) \cdot 1 = \overbrace{[\text{L1R}]} f \circ \dot{c}(0) = [f \circ c].$$

□

Ce dernier résultat est très intuitif : pour connaître l'image par df d'un vecteur tangent représenté par une courbe on doit simplement transporter la courbe par l'application f .

Remarque 2.8 (espace tangent et applications lisses entre espaces euclidiens). *La remarque suivante concerne le dernier point de l'exercice 14. Dans la définition classique de la différentielle d'une application linéaire $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, qui agit comme $df(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, la source est l'espace vectoriel \mathbb{R}^n et est indépendante du point p . Le point de vue de la géométrie différentielle est légèrement différent et plus intuitif : la source est $T_p U$, l'espace vectoriel des directions de variation infinitésimale du point $p \in U$. Il se trouve que, pour $U \subset \mathbb{R}^n$, celui-ci est canoniquement identifié à \mathbb{R}^n et peut donc être pensé comme étant indépendant du point p , comme en calcul différentiel classique.*

Mais moralement il dépend du point p . Lorsque l'on écrit $T_p U$ on se souvient dans la notation de cette dépendance.

III. LE POINT DE VUE DES DÉRIVATIONS. Nous avons déjà exploré deux points de vue sur l'espace tangent : celui des vecteurs tangents regardés comme vecteurs de \mathbb{R}^n à travers des cartes, étroitement lié à l'idée d'approximation linéaire, et celui des courbes, lié à l'idée de direction infinitésimale de mouvement. Nous expliquons maintenant un troisième point de vue, lié au concept de dérivée directionnelle des fonctions définies sur des ouverts de \mathbb{R}^n . Ce point de vue est à rapprocher de la définition 1.3 des sous-variétés comme fibres locales de submersions. Les énoncés-clé pour cette discussion sont les Propositions-Définitions 2.11 et 2.14 plus bas.

Définition 2.9. Soit M une variété et $p \in M$ un point fixé. On appelle germe de fonction lisse en p une classe d'équivalence de fonctions lisses définies au voisinage de p , pour la relation d'équivalence suivante :

$$f \sim g \Leftrightarrow f = g \text{ sur un voisinage ouvert de } p$$

On note \mathcal{F}_p l'ensemble des germes de fonctions lisses en p .

L'ensemble \mathcal{F}_p porte une structure naturelle d'algèbre commutative sur \mathbb{R} . Ceci signifie qu'il possède une structure d'espace vectoriel réel, une structure d'anneau commutatif, et que ces deux structures sont compatibles au sens où le produit est distributif par rapport à la somme et commute avec la multiplication par des scalaires. À titre d'exemple, si f_p et g_p sont deux germes représentés par des fonctions lisses $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : V \rightarrow \mathbb{R}$, le germe produit $f_p \cdot g_p$ est représenté par la fonction produit $fg : U \cap V \rightarrow \mathbb{R}$. À noter que \mathcal{F}_p est un espace vectoriel réel de dimension infinie.

Définition 2.10. On appelle dérivation de \mathcal{F}_p à valeurs dans \mathbb{R} , ou dérivation de \mathcal{F}_p , une application \mathbb{R} -linéaire $D : \mathcal{F}_p \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie la règle de Leibniz

$$D(f_p \cdot g_p) = D(f_p)g(p) + f(p)D(g_p).$$

On note le \mathbb{R} -espace vectoriel des dérivations de \mathcal{F}_p par $\text{Der}(\mathcal{F}_p, \mathbb{R})$.

Remarque. Il existe une notion générale d'algèbre sur un corps, définie par les mêmes axiomes. De même, il existe une notion générale de dérivation d'une algèbre A à valeurs dans un A -bimodule M (module à gauche et à droite, de façon compatible), gouvernée par la relation $D(a \cdot b) = D(a)b + aD(b)$, $a, b \in A$. Dans notre cas de figure, l'algèbre \mathbb{R} est regardée comme un \mathcal{F}_p -bimodule via l'application d'évaluation $\mathcal{F}_p \rightarrow \mathbb{R}$, $f_p \mapsto f(p)$.

Exemple. Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert et \mathcal{F}_p l'algèbre des germes de fonctions lisses définies au voisinage de $p \in U$. Pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ la dérivée

directionnelle en p selon ξ définit une dérivation de \mathcal{F}_p à valeurs dans \mathbb{R} :

$$d_\xi : \mathcal{F}_p \rightarrow \mathbb{R}, \quad d_\xi f_p := df(p)\xi.$$

En effet,

$$\begin{aligned} d_\xi(f_p g_p) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (fg)(p + t\xi) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(p + t\xi)g(p) + f(p) \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g(p + t\xi) \\ &= d_\xi(f_p)g(p) + f(p)d_\xi g_p. \end{aligned}$$

En particulier les dérivées partielles par rapport aux coordonnées x^ℓ sur \mathbb{R}^n définissent des dérivations

$$\frac{\partial}{\partial x^\ell} : \mathcal{F}_p \rightarrow \mathbb{R},$$

avec $\frac{\partial}{\partial x^\ell} = d_{e_\ell}$, où $e_\ell = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ et la coordonnée non-nulle apparaît en ℓ -ème position.

Cet exemple peut bien-sûr être implanté sur une variété puisqu'il est de nature locale. Étant donnée une variété, il est désormais utile d'adopter la notation

$$\phi = (x^1, \dots, x^k)$$

pour les composantes d'une carte $\phi : U \subseteq M \rightarrow \mathbb{R}^k$. Nous regardons les composantes x^1, \dots, x^k de l'application ϕ comme des fonctions lisses sur U . Cette notation est par ailleurs conforme à l'intuition que nous avons d'une carte : elle identifie U à l'ouvert $\phi(U) \subseteq \mathbb{R}^k$, sur lequel vivent les fonctions coordonnées naturelles x^1, \dots, x^k .

Exercice 15. Soit M une variété et $p \in M$ un point fixé. Étant donnée une carte $\phi = (x^1, \dots, x^k)$, l'application

$$\frac{\partial}{\partial x^\ell} : \mathcal{F}_p \rightarrow \mathbb{R}$$

définie par

$$\frac{\partial}{\partial x^\ell}(f_p) := \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x^\ell}(\phi(p))$$

est une dérivation.

On utilise aussi la notation

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^\ell} \right|_p : \mathcal{F}_p \rightarrow \mathbb{R}$$

pour désigner la dérivation $\frac{\partial}{\partial x^\ell}$. Il faut bien prendre conscience du fait que, même si la carte ϕ n'est pas mentionnée explicitement dans la notation, cette dérivation dépend du choix de carte. Cette dépendance est rendue explicite plus bas.

Exercice 16. Soit $C \in \mathcal{F}_p$ le germe de la fonction constante égale à $C \in \mathbb{R}$ au voisinage de p . Montrer que toute dérivation de \mathcal{F}_p vérifie nécessairement $D(C) = 0$.

Exercice 17. Étant donnée une carte $\phi = (x^1, \dots, x^k)$, montrer l'identité

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^\ell} = \delta_\ell^i.$$

Proposition-Définition 2.11. Soit M une variété munie d'un atlas $\{(U_i, \phi_i)\}$. Soit $p \in M$ un point fixé. Il existe un isomorphisme canonique d'espaces vectoriels

$$\mathcal{D} : T_p M \xrightarrow{\cong} \text{Der}(\mathcal{F}_p, \mathbb{R}),$$

$$[(i, \xi)] \mapsto (f_p \mapsto d(f \circ \phi_i^{-1})(x)\xi), \quad x = \phi_i(p).$$

Le contenu de la proposition est le suivant : l'on associe au vecteur tangent représenté par $\xi \in \mathbb{R}^n$ dans la carte ϕ_i la dérivation donnée par la dérivée directionnelle selon ξ .

Démonstration. L'application \mathcal{D} est bien définie et \mathbb{R} -linéaire.

Montrons qu'elle est injective. Fixons une carte (U_i, ϕ_i) , notons $x = \phi_i(p)$ et considérons deux vecteurs $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ tels que $\mathcal{D}[(i, \xi)] = \mathcal{D}[(i, \eta)]$. L'on veut montrer que $\xi = \eta$. On peut supposer sans perte de généralité $\xi \neq 0$. Considérons le germe f_p tel que $f \circ \phi_i^{-1}(y) = \langle y - x, \xi \rangle$. On trouve

$$\|\xi\|^2 = \mathcal{D}[(i, \xi)]f_p = \mathcal{D}[(i, \eta)]f_p = \langle \eta, \xi \rangle.$$

En considérant le germe associé à $y \mapsto \langle y - x, \eta \rangle$ on trouve par ailleurs

$$\|\eta\|^2 = \langle \xi, \eta \rangle.$$

Finalement, les deux égalités $\|\xi\|^2 = \|\eta\|^2 = \langle \eta, \xi \rangle$ impliquent $\eta = \xi$ (on peut par exemple argumenter par le fait que la fonction $\eta \mapsto \langle \eta, \xi \rangle$ définie sur la sphère de rayon $\|\xi\|$ admet un unique maximum en $\eta = \xi$, où elle vaut $\|\xi\|^2$).

Pour conclure que \mathcal{D} est un isomorphisme il suffit de montrer que $\dim \text{Der}(\mathcal{F}_p, \mathbb{R}) \leq \dim T_p M$. Ceci découle du lemme de Hadamard 2.13 ci-dessous : étant donnée une carte $\phi = (x^1, \dots, x^k)$ autour de p avec $\phi(p) = 0$, tout germe de fonction en p s'écrit comme $f_p = f(p) + \sum_{\ell=1}^k x^\ell g_\ell$ avec g_ℓ des germes de fonction en p tels que

$$g_\ell(p) = \frac{\partial}{\partial x^\ell} \Big|_p (g_\ell) = \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial x^\ell}(0).$$

Soit $D \in \text{Der}(\mathcal{F}_p, \mathbb{R})$. En utilisant l'exercice 16 et le fait que $x^\ell(p) = 0$ pour tout ℓ on obtient

$$\begin{aligned} D(f_p) &= D(f(p)) + \sum_{\ell=1}^k D(x^\ell g_\ell) \\ &= \sum_{\ell=1}^k D(x^\ell) g_\ell(p) + x^\ell(p) D(g_\ell) \\ &= \sum_{\ell=1}^k D(x^\ell) \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x^\ell}(0). \end{aligned}$$

Ainsi

$$D = \sum_{\ell=1}^k D(x^\ell) \frac{\partial}{\partial x^\ell}.$$

Les dérivations $\frac{\partial}{\partial x^\ell}$, $\ell = 1, \dots, k$ forment donc un système générateur pour $\text{Der}(\mathcal{F}_p, \mathbb{R})$, de sorte que $\dim \text{Der}(\mathcal{F}_p, \mathbb{R}) \leq k = \dim T_p M$. \square

Corollaire 2.12. *Les dérivations*

$$\frac{\partial}{\partial x^\ell}, \quad \ell = 1, \dots, k$$

associées à une carte $\phi = (x^1, \dots, x^k)$ définie au voisinage d'un point p forment une base de $\text{Der}(\mathcal{F}_p, \mathbb{R})$.

Démonstration. Nous avons déjà montré au courant de la preuve de la proposition 2.11 que les dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial x^\ell}$, $\ell = 1, \dots, k$ forment un système de générateurs pour $\text{Der}(\mathcal{F}_p, \mathbb{R})$. Montrons qu'elles sont linéairement indépendantes. Soit $D = \sum_{\ell} \lambda_\ell \frac{\partial}{\partial x^\ell}$ une combinaison linéaire avec $\lambda_\ell \in \mathbb{R}$. Supposons que $D = 0$ et montrons que tous les coefficients λ_ℓ sont nuls.

En effet, pour tout $i = 1, \dots, k$ l'on a

$$0 = D(x^i) = \sum_{\ell} \lambda_\ell \frac{\partial x^i}{\partial x^\ell} = \sum_{\ell} \lambda_\ell \delta_\ell^i = \lambda_i.$$

Nous avons utilisé l'identité fort utile

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^\ell} = \delta_\ell^i.$$

\square

Nous avons déjà mentionné le fait que les dérivations $\frac{\partial}{\partial x^\ell}$, $\ell = 1, \dots, k$ dépendent du choix de carte $\phi = (x^1, \dots, x^k)$. Il est temps de rendre explicite cette dépendance. Soit $\psi = (y^1, \dots, y^k)$ une autre carte, qui

détermine une autre base de dérivations $\frac{\partial}{\partial y^\ell}$, $\ell = 1, \dots, k$ au point p . Nous avons alors

$$\frac{\partial}{\partial y^\ell} = \sum_i \frac{\partial x^i}{\partial y^\ell} \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

En effet, puisque les $\frac{\partial}{\partial x^i}$, $i = 1, \dots, k$ forment un système générateur l'on peut écrire $\frac{\partial}{\partial y^\ell} = \sum_i \lambda_i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$. On obtient

$$\frac{\partial x^j}{\partial y^\ell} = \sum_i \lambda_i \frac{\partial x^j}{\partial x^i} = \sum_i \lambda_i \delta_i^j = \lambda_j,$$

ce qui démontre la formule souhaitée.

CONVENTION DE SOMMATION D'EINSTEIN. Nous venons de rencontrer à plusieurs reprises des sommes du type $\sum_i \lambda_i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Bientôt nous rencontrerons des sommes impliquant plusieurs indices de sommation. La convention d'Einstein consiste à supprimer le signe somme dans une expression afin d'alléger l'écriture, en sous-entendant que l'on somme sur les indices qui apparaissent deux fois. Ainsi

$$\frac{\partial}{\partial y^\ell} = \sum_i \frac{\partial x^i}{\partial y^\ell} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

s'écrirait

$$\frac{\partial}{\partial y^\ell} = \frac{\partial x^i}{\partial y^\ell} \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Cette formule est facile à retenir ("les ∂x^i se simplifient"!).

À des fins pédagogiques, dans ce cours nous n'allons utiliser la convention de sommation d'Einstein que très rarement, et toujours en y faisant mention explicite.

Pour achever la preuve de la proposition 2.11 nous démontrons maintenant le lemme de Hadamard.

Lemme 2.13 (Hadamard). *Soit M une variété et $p \in M$. Soit $\phi = (x^1, \dots, x^k)$ une carte au voisinage de p . Pour tout germe de fonction lisse $f_p \in \mathcal{F}_p$ il existe des germes de fonctions g_ℓ , $\ell = 1, \dots, k$ définis au voisinage de p tels que*

$$f_p = f(p) + \sum_{\ell=1}^k x^\ell g_\ell.$$

L'on a alors nécessairement

$$g_\ell(p) = \frac{\partial f_p}{\partial x^\ell}.$$

Démonstration. Regardons d'abord le cas d'une application lisse $\bar{f} : B^k(1) \rightarrow \mathbb{R}$, avec $p = 0$. L'on a successivement

$$\begin{aligned} \bar{f}(x) &= \bar{f}(0) + \int_0^1 \frac{d}{dt} \bar{f}(tx) dt \\ &= \bar{f}(0) + \int_0^1 \sum_{\ell=1}^k x^\ell \frac{\partial \bar{f}}{\partial x^\ell}(tx) dt \\ &= \bar{f}(0) + \sum_{\ell=1}^k x^\ell \bar{g}_\ell(x), \end{aligned}$$

où $\bar{g}_\ell(x) = \int_0^1 \frac{\partial \bar{f}}{\partial x^\ell}(tx) dt$ est lisse. (L'on remarque par ailleurs que $\bar{g}_\ell(0) = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x^\ell}(0)$.)

Dans le cas d'un germe f_p , quitte à restreindre le domaine U de la carte et à composer par une homothétie dans \mathbb{R}^k l'on peut supposer que $\phi(U) = B^n(1)$. L'on applique le raisonnement ci-dessus avec $\bar{f} := f \circ \phi^{-1}$ et l'on retrouve la première partie de l'énoncé, avec $g_\ell = \bar{g}_\ell \circ \phi$.

La deuxième partie du lemme découle en appliquant $\frac{\partial}{\partial x^\ell}$ à f_p et en utilisant le fait que $\frac{\partial x^r}{\partial x^\ell} = \delta_\ell^r$. \square

Proposition-Définition 2.14. *Soit $f : M \rightarrow N$ une application lisse entre variétés et $p \in M$ fixé. À travers les isomorphismes canoniques $T_p M \cong \text{Der}(\mathcal{F}_p, \mathbb{R})$ et $T_{f(p)} N \cong \text{Der}(\mathcal{F}_{f(p)}, \mathbb{R})$, la différentielle*

$$df(p) : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$$

s'écrit

$$(df(p)X)h := X(h \circ f), \quad h \in \mathcal{F}_{f(p)}.$$

Démonstration. Choisissons des cartes (U_i, ϕ) autour de p et (V_j, ψ) autour de $f(p)$. Fixons $X \in \text{Der}(\mathcal{F}_p, \mathbb{R})$. Soit $[(i, \xi)] \in T_p M$ tel que $X(g) = d(g \circ \phi^{-1})\xi$. Alors $df(p)[(i, \xi)] = [(j, d(\psi \circ f \circ \phi^{-1})\xi)] \in T_{f(p)} N$ et ce vecteur tangent correspond à la dérivation

$$h \mapsto d(h \circ \psi^{-1})d(\psi \circ f \circ \phi^{-1})\xi = d((h \circ f) \circ \phi^{-1})\xi = X(h \circ f).$$

\square

Finalement, pour clôturer la section rendons explicite la bijection canonique

$$\mathcal{C}_p \cong \text{Der}(\mathcal{F}_p, \mathbb{R})$$

obtenue comme composée des bijections canoniques $T_p M \cong \mathcal{C}_p$ et $T_p M \cong \text{Der}(\mathcal{F}_p, \mathbb{R})$. Étant donnée une classe de courbe $[c] \in \mathcal{C}_p$ et un représentant $c : I \rightarrow M$ avec $0 \in I$ et $c(0) = p$, on lui associe la dérivation

$$f \mapsto \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ c)(t).$$

En effet, étant donnée une carte (U_i, ϕ) autour de p , la classe $[c]$ correspond au vecteur tangent $[(i, \xi)]$ avec $\xi = \frac{d}{dt}\big|_{t=0}(\phi \circ c)(t) = d(\phi \circ c)(0)1$. À son tour, ce vecteur tangent correspond à la dérivation

$$f \mapsto d(f \circ \phi^{-1})\xi = d(f \circ \phi^{-1})d(\phi \circ c)(0)1 = d(f \circ c)(0)1 = \frac{d}{dt}\big|_{t=0}(f \circ c)(t).$$

2.2. Fibré tangent. Champs de vecteurs. Dans la section qui précède nous avons décrit en détail l'espace tangent *en un point*. La vraie force de la notion de vecteur tangent devient visible lorsque l'on considère des familles lisses. Pour donner sens à cette notion il faut "recoller" tous les espaces tangents ponctuels en un unique objet de nature lisse.

Proposition-Définition 2.15. *Soit M une variété lisse de dimension n . L'union disjointe*

$$TM := \sqcup_{p \in M} T_p M = \cup_{p \in M} \{p\} \times T_p M$$

porte une structure naturelle de variété lisse de dimension $2n$ ayant la propriété que la projection canonique

$$\pi : TM \rightarrow M, \quad (p, v) \mapsto p, \quad v \in T_p M$$

est une submersion lisse.

On appelle TM muni de la structure lisse donnée par la proposition le *fibré tangent de M* . Les espaces vectoriels $T_p M$, $p \in M$ s'appellent *fibres du fibré tangent*.

Démonstration. Soit (U_i, ϕ_i) un atlas pour M . On définit un atlas $(\tilde{U}_i, \tilde{\phi}_i)$ pour TM de la manière suivante :

$$\tilde{U}_i := \pi^{-1}(U_i) = \sqcup_{p \in U_i} T_p M,$$

$$\tilde{\phi}_i : \tilde{U}_i \rightarrow \phi_i(U_i) \times \mathbb{R}^n, \quad (p, [(i, \xi)]) \mapsto (\phi_i(p), \xi).$$

Le sens de la dernière formule est le suivant : un vecteur tangent en un point $p \in U_i$ admet un unique représentant $\xi \in \mathbb{R}^n$ dans la carte U_i . L'application $\tilde{\phi}_i$ associe au couple constitué de p et de ce vecteur tangent le couple $(\phi_i(p), \xi) \in U_i \times \mathbb{R}^n$. Chaque $\tilde{\phi}_i$ est clairement injective, et $\tilde{\phi}_i(\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j) = \phi_i(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n$ est un ouvert de \mathbb{R}^{2n} .

Les applications de changement de carte

$$\tilde{\phi}_j \circ \tilde{\phi}_i^{-1} : \tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j = \phi_i(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \phi_j(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n$$

sont données par la formule suivante : (exercice!)

$$(x, \xi) \mapsto (\phi_j \circ \phi_i^{-1}(x), d(\phi_j \circ \phi_i^{-1})(x)\xi).$$

Ce sont par conséquent des difféomorphismes (lisses, avec inverse lisse donnée par la formule analogue dans laquelle on échange les rôles de i et j).

Si l'on munit TM de la plus petite topologie telle que toutes les applications $\tilde{\phi}_i$ soient des homéomorphismes, la collection $(\tilde{U}_i, \tilde{\phi}_i)$ devient un atlas qui munit TM d'une structure de variété.

Montrons que la projection $\pi : TM \rightarrow M$ est une submersion (surjective, par définition). Choisissons une carte (U_i, ϕ_i) sur M et considérons la carte associée $(\tilde{U}_i, \tilde{\phi}_i)$ sur TM . Il suffit de montrer que

$\phi_i \circ \pi \circ \tilde{\phi}_i^{-1} : \phi_i(U_i) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \phi_i(U_i)$ est une submersion. Or cette composition n'est rien d'autre que la projection sur la première composante $(x, \xi) \mapsto x$. \square

Remarque-exercice (la topologie est déterminée par l'atlas).

Dans la preuve précédente nous sommes partis de TM en tant qu'ensemble abstrait et nous avons construit à la fois un atlas *et* une topologie dessus! La situation est générale : soit X un ensemble abstrait, (U_i) une collection de parties de X telle que

$$X = \cup_i U_i,$$

et soient

$$\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$$

des applications injectives telles que $\phi_i(U_i \cap U_j) \subseteq \mathbb{R}^n$ soient des ouverts de \mathbb{R}^n pour tous i, j . Supposons que les applications de transition $\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_j(U_i \cap U_j)$ sont des difféomorphismes lisses. Il existe alors une unique topologie sur X telle que les ϕ_i soient des homéomorphismes sur image et telle que $U \subseteq X$ est un ouvert si et seulement si $U \cap U_i$ est un ouvert pour tout i . En munissant X de cette topologie, la famille $\{(U_i, \phi_i)\}$ forme un atlas et munit X d'une structure de variété.

Exercice 18. Regardons les vecteurs tangents comme des dérivations ponctuelles. Étant donné l'atlas (U_i, ϕ_i) avec $\phi_i = (x_i^1, \dots, x_i^n)$ on déduit pour chaque i et chaque point $p \in U_i$ la base $\frac{\partial}{\partial x_i^\ell}$, $\ell = 1, \dots, n$ de $\text{Der}(\mathcal{F}_p, \mathbb{R})$. Toute dérivation $X \in \text{Der}(\mathcal{F}_p, \mathbb{R})$ s'écrit dans la carte U_i de manière unique comme $X = \sum_\ell X_i^\ell \frac{\partial}{\partial x_i^\ell}$. Montrer que la carte $\tilde{\phi}_i$ agit comme

$$\tilde{\phi}_i : X \in \text{Der}(\mathcal{F}_p, \mathbb{R}) \mapsto (x_i^1(p), \dots, x_i^n(p), X_i^1(p), \dots, X_i^n(p)).$$

Définition 2.16. Un champ de vecteurs lisse sur une variété M est une application lisse $X : M \rightarrow TM$ telle que

$$\pi \circ X = \text{Id}_M.$$

On dit aussi que X est une section lisse de la projection π .

On note

$$\mathcal{X}(M)$$

l'espace vectoriel des champs de vecteurs lisses sur M , avec les opérations d'addition et de multiplication par des scalaires définies point par point.

Exercice 19. Montrer qu'un champ de vecteurs lisse sur une variété M équivaut à la donnée d'une collection de vecteurs tangents

$$X(p) \in T_p M, \quad p \in M$$

telle que, pour toute carte $(U, \phi = (x^1, \dots, x^n))$ sur M , en écrivant

$$X(p) = \sum_{\ell} X^{\ell}(p) \frac{\partial}{\partial x^{\ell}}$$

les applications $X^{\ell} : U_i \rightarrow \mathbb{R}$ soient lisses.

Exercice 20. Soit $X \in \mathcal{X}(M)$ un champ de vecteurs lisse sur une variété M . Soient

$$X^1, \dots, X^n$$

les composantes de X dans une carte locale $\phi = (x^1, \dots, x^n)$, de sorte que $X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Montrer que les composantes de X dans une autre carte locale $\psi = (y^1, \dots, y^n)$ sont

$$\tilde{X}^{\ell} = \sum_i X^i \frac{\partial y^{\ell}}{\partial x^i}, \quad \ell = 1, \dots, n,$$

de sorte que $X = \sum_{\ell} \tilde{X}^{\ell} \frac{\partial}{\partial y^{\ell}}$.

Le fibré tangent TM se projette sur M , mais il contient aussi la variété M de manière canonique. En effet, le lecteur pourra vérifier que l'application

$$M \rightarrow TM, \quad p \mapsto (p, 0)$$

est bien définie et est un plongement. L'image de cette application est appelée *la section nulle du fibré tangent* et est notée parfois 0_M .

2.3. La notion de fibré vectoriel. Nous venons de définir une structure de variété sur le fibré tangent TM . Néanmoins, celui-ci possède une structure plus riche : chaque fibre possède une *structure d'espace vectoriel qui varie de manière lisse d'une fibre à l'autre*. Le sens précis de cette affirmation est le suivant : toute fibre possède un voisinage saturé \tilde{U}_i qui est diffeomorphe à $\phi_i(U_i) \times \mathbb{R}^n$ par un diffeomorphisme $\tilde{\phi}_i$ qui envoie les fibres dans TM sur les fibres $\{pt\} \times \mathbb{R}^n$ de la première projection, la structure d'espace vectoriel sur les fibres voisines étant induite par la structure d'espace vectoriel de \mathbb{R}^n via ce diffeomorphisme. Par *voisinage saturé* on entend un voisinage qui contient la fibre passant par chacun de ses points. Le fait que la structure d'espace vectoriel induite sur un même espace tangent T_pM est indépendant du choix de carte $\tilde{\phi}_i$, $p \in U_i$ est une conséquence du fait que les applications de changement de carte

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_j \circ \tilde{\phi}_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \phi_j(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n, \\ (x, \xi) &\longmapsto (\phi_j \circ \phi_i^{-1}(x), d(\phi_j \circ \phi_i^{-1})(x)\xi) \end{aligned}$$

sont linéaires dans la composante ξ (à x fixé). On a en fait une application lisse

$$\phi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow GL_n(\mathbb{R}), \quad x \mapsto d(\phi_j \circ \phi_i^{-1})(x).$$

Toutes ces données sont organisées dans la définition générale suivante.

Définition 2.17. *Un fibré vectoriel localement trivial lisse de rang r est la donnée d'une submersion surjective*

$$\pi : E \rightarrow M$$

et d'une structure d'espace vectoriel de dimension r sur chaque fibre $E_p := \pi^{-1}(p)$, $p \in M$, telles que la condition suivante soit satisfaite : il existe un recouvrement ouvert (U_i) de M et des diffeomorphismes

$$\Phi_i : \pi^{-1}(U_i) \xrightarrow{\cong} U_i \times \mathbb{R}^r$$

qui font commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\Phi_i} & U_i \times \mathbb{R}^r \\ & \searrow \pi & \swarrow \text{pr}_1 \\ & & U_i \end{array}$$

et qui induisent des isomorphismes linéaires $E_p \xrightarrow{\cong} \{p\} \times \mathbb{R}^r$.

On appelle π la projection, E l'espace total du fibré, M la base du fibré, (Φ_i) les applications de trivialisations. On note $E|_U := \pi^{-1}(U)$.

Par la suite nous dirons simplement *fibré vectoriel*, le caractère lisse et localement trivial étant sous-entendu, le rang n'étant pas spécifié.

Proposition-Définition 2.18. *Étant donné un fibré vectoriel $E \xrightarrow{\pi} M$, une section de E est une application lisse*

$$s : M \rightarrow E$$

telle que

$$\pi \circ s = \text{Id}_M.$$

L'espace des sections de E porte une structure naturelle d'espace vectoriel donnée par l'addition ponctuelle des sections. On le note

$$\Gamma(E), \text{ ou } \Gamma(M, E).$$

□

Comme nous l'avons déjà vu dans le cas du fibré tangent, tout fibré vectoriel $E \xrightarrow{\pi} M$ contient de manière canonique la base M en tant que sous-variété donnée par la *section nulle*. En effet, toute section $s \in \Gamma(E)$ réalise un plongement de M dans E , et la section nulle – l'élément neutre dans $\Gamma(E)$ – est canoniquement définie

$$M \rightarrow E, \quad p \mapsto (p, 0).$$

L'image de la section nulle est appelée parfois par abus de langage *section nulle*, et est notée 0_E .

Exemple. Le fibré trivial $\theta_M^r := (M \times \mathbb{R}^r \xrightarrow{\text{pr}_1} M)$. Celui-ci possède une trivialisatation globale tautologique donnée par l'identité. Les sections du fibré trivial ne sont rien d'autre que les fonctions lisses sur M à valeurs dans \mathbb{R}^r .

POINT DE VUE : FONCTIONS VS. SECTIONS. Étant donné un fibré vectoriel E sur une variété M , les sections de E doivent être regardées comme des généralisations des fonctions lisses sur M . Ce point de vue est particulièrement important dans le contexte de la géométrie différentielle complexe : alors qu'une variété complexe compacte ne possède pas de fonctions holomorphes non-constantes, il existe souvent des fibrés en droites holomorphes qui possèdent des sections non-constantes. Or il est très important de pouvoir se placer dans un cadre dans lequel on peut définir des analogues globaux des fonctions, puisque l'on a déjà vu que l'étude des fonctions et de leurs ensembles de niveau permet de comprendre la variété de base.

Définition 2.19. Un fibré $E \xrightarrow{\pi} M$ de rang r est trivialisable s'il existe une application de trivialisatation globale

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\Phi} & M \times \mathbb{R}^r \\ \pi \searrow & & \swarrow \text{pr}_1 \\ & M & \end{array}$$

i.e. un difféomorphisme global qui induit des isomorphismes linéaires $E_p \xrightarrow{\cong} \{p\} \times \mathbb{R}^r$, $p \in M$.

On utilise souvent la terminologie *fibré trivial* au lieu de *fibré trivialisable*. La distinction réside dans le fait de pouvoir donner un isomorphisme *canonique* avec un fibré trivial, ou bien dans le fait de connaître l'existence d'un isomorphisme *ad hoc*. Nous utiliserons les deux appellations sans distinction, tout en restant fidèles à notre convention d'écrire $E \cong \theta_M^r$ pour un isomorphisme canonique, respectivement $E \simeq \theta_M^r$ pour un isomorphisme quelconque.

Remarque. Il existe une notion d'isomorphisme de fibrés (difféomorphisme qui préserve les fibres et qui est linéaire dans les fibres), de même qu'une notion de morphisme de fibrés (application lisse qui envoie fibre sur fibre et qui est linéaire sur les fibres). Autant dire que l'on peut définir une catégorie de fibrés vectoriels sur une base M , notée $\underline{\text{Vect}}(M)$.

Exercice 21. Le fibré tangent $TM \xrightarrow{\pi} M$ à une variété de dimension n porte une structure naturelle de fibré vectoriel de rang n . L'espace des sections de TM est par définition l'espace des champs de vecteurs lisses sur M , i.e. $\Gamma(TM) = \mathcal{X}(M)$. [Cet exercice est presque tautologique. La seule différence entre la structure que nous avons déjà mise en évidence sur TM et la définition d'un fibré vectoriel est que, dans le cas du premier, nos applications de trivialisations $\tilde{\phi}_i$ aboutissent dans $\phi_i(U_i) \times \mathbb{R}^n$, plutôt que dans $U_i \times \mathbb{R}^n$.]

Remarque. Une question importante est celle de comprendre combien de types d'isomorphisme de fibrés de rang r y a-t-il sur une variété donnée M . Une première étape est de comprendre si un fibré donné est trivialisable ou pas. Étant donné un fibré trivialisable, une autre question importante est de comprendre combien de classes d'équivalences de trivialisations possibles il porte. La réponse à chacune de ces questions mène à des questions de topologie algébrique (la référence classique en la matière est le livre *Characteristic classes* de Milnor et Stasheff).

Exemple. Un fibré de rang 1, ou *fibré en droites*, est trivial si et seulement si il admet une section partout non-nulle. En effet, soit $L \rightarrow M$ un tel fibré et supposons qu'il existe $s \in \Gamma(L)$ telle que $s(p) \neq 0$ pour tout $p \in M$. Alors $\Phi : M \times \mathbb{R} \rightarrow L$, $(p, \lambda) \mapsto \lambda s(p)$ est un isomorphisme de fibrés. Réciproquement, si $\Phi : M \times \mathbb{R} \rightarrow L$ est un isomorphisme de fibrés, alors $s(p) := \Phi(p, 1)$ est une section partout non-nulle.

Exemple. Le fibré tangent au cercle est trivial. En effet, prenons comme modèle pour le cercle $S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$. En tout point $p \in S^1$ l'espace tangent s'identifie à $p^\perp \subset \mathbb{R}^2$ et il admet une section partout non-nulle donnée par $p = (x, y) \mapsto (-y, x) \in p^\perp$.

Le lecteur n'aura pas manqué de remarquer que les fibrés vectoriels et les variétés sont définis par la même démarche : ce sont des objets obtenus en recollant des modèles locaux simples. Pour les variétés, ce sont les ouverts de \mathbb{R}^n . Pour les fibrés, ce sont les fibrés triviaux au-dessus des (ouverts de) variétés. Nous avons vu dans la section précédente que la donnée d'un atlas détermine la structure de variété. De la même manière, la donnée d'une collection appropriée d'applications de trivialisations détermine un fibré vectoriel. Ceci constitue la motivation de la construction qui suit.

Exemple (les changements de trivialisations déterminent le fibré vectoriel). Soit M une variété, (U_i) un recouvrement ouvert et $\Phi_{ji} : U_i \cap U_j \rightarrow GL_r(\mathbb{R})$ une collection d'applications lisses qui vérifie la *condition de cocycle*

$$\Phi_{ii} = \text{Id sur } U_i, \quad \Phi_{kj}\Phi_{ji}\Phi_{ik} = \text{Id sur } U_i \cap U_j \cap U_k.$$

Il existe un fibré vectoriel E de rang r sur M muni d'applications de trivialisations $\Phi_i : E|_{U_i} \xrightarrow{\cong} U_i \times \mathbb{R}^r$ telles que $\Phi_{ji} = \Phi_j \circ \Phi_i^{-1}$.

En effet, l'on définit

$$E := \sqcup_i U_i \times \mathbb{R}^r / \sim,$$

où $(i, x, v) \sim (j, y, w)$ si et seulement si $x = y \in U_i \cap U_j$ et $\Phi_{ji}(x)v = w$.

Exemple-exercice (section comme collection de fonctions compatibles avec les changements de trivialisations). Soit $\Phi_{ji} : U_i \cap U_j \rightarrow GL_r(\mathbb{R})$ le cocycle de définition d'un fibré E . La donnée d'une section s de E est équivalente à la donnée d'une collection de fonctions $s_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^r$ telles que

$$s_j|_{U_i \cap U_j} = \Phi_{ji} \cdot s_i|_{U_i \cap U_j}.$$

En effet, étant donnée s l'on pose $s_i := \text{pr}_2 \circ \Phi_i \circ s|_{U_i}$. Réciproquement, l'on pose $s|_{U_i} := \Phi_i^{-1} \circ (\text{Id}, s_i)$.

$$\begin{array}{ccc} E|_{U_i} & \xrightarrow{\Phi_i} & U_i \times \mathbb{R}^r \\ \searrow \pi & & \swarrow \text{pr}_2 \\ & U_i & \\ \nearrow s & & \nwarrow (\text{Id}, s_i) \end{array}$$

Exemple-exercice (bande de Möbius). Nous allons décrire un fibré non-trivial de rang 1 sur le cercle S^1 . Toujours dans le modèle pris ci-dessus, considérons les deux ouverts $U_1 := \{(x, y) \in S^1 : x > -\frac{1}{2}\}$ et $U_2 := \{(x, y) \in S^1 : x < \frac{1}{2}\}$. Notons $U_1 \cap U_2 = V^+ \sqcup V^-$, où V^+ contient les points de l'intersection pour lesquels $y > 0$, et V^- contient les points de l'intersection pour lesquels $y < 0$. On définit une application de transition

$$\Phi_{12} : V^\pm \rightarrow GL_1(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^*, \quad \Phi_{12}|_{V^\pm} = \pm 1.$$

Montrer que le fibré de rang 1 associé n'est pas trivial (l'on pourra montrer que toute section doit nécessairement s'annuler).

Exemple. Le fibré tangent à S^2 n'est pas trivial. Ceci est un théorème profond, que nous allons démontrer plus tard dans le cours. De façon plus précise, nous allons démontrer que tout champ de vecteurs sur S^2 possède au moins un zéro.

Exercice 22. Le fibré tangent à S^3 est trivial.

Un problème classique de géométrie différentielle était le fait de déterminer le nombre maximal de champs de vecteurs linéairement indépendants sur la sphère S^n . Ce problème a été résolu par Frank Adams en 1962 (F. Adams, Vector Fields on Spheres, *Annals of Mathematics* 75 : 603–632).

DE L'IMPORTANCE DES FIBRÉS VECTORIELS. Nous avons déjà mentionné le fait que les sections de fibrés jouent le rôle de fonctions sur la base, un point de vue particulièrement important en géométrie complexe. Sans entrer dans les détails nous donnons encore quelques points de vue pour souligner l'importance de la notion de fibré vectoriel.

(i) Les champs de vecteurs, les formes différentielles et, de manière plus générale, les tenseurs, sont naturellement des sections de fibrés vectoriels. La notion de fibré est indispensable pour s'affranchir de coordonnées lorsque l'on travaille avec des objets de nature linéaire.

(ii) Les fibrés apparaissent naturellement lorsque l'on étudie les petites déformations de sous-variétés. En effet, le théorème du voisinage tubulaire stipule qu'un voisinage d'une sous-variété est diffeomorphe à un voisinage de la section nulle dans son *fibré normal*.

(iii) Les espaces de sections de fibrés sont le domaine naturel d'action des opérateurs différentiels sur des variétés. Ceux-ci apparaissent par exemple lorsque l'on linéarise des équations aux dérivées partielles non-linéaires de nature géométrique.

(iv) En physique la donnée d'un fibré $E \rightarrow M$ est vue comme la donnée d'une structure supplémentaire sur un espace de nature physique (la base M). Les sections de E modélisent la notion de *champ sur M* .

Pour finir cette section et pour donner une meilleure intuition de l'analogie entre sections de fibrés vectoriels et fonctions, nous traitons un exemple classique qui est fondamental en géométrie algébrique.

Exemple (polynômes homogènes comme sections de fibrés en droites sur $\mathbb{R}P^n$).

L'espace projectif réel de dimension n , noté $\mathbb{R}P^n$, est l'ensemble des droites de \mathbb{R}^{n+1} . Il peut être décrit de manière équivalente comme le

quotient de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ pour la relation d'équivalence

$$x \sim \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^*, x = \lambda x'.$$

On note la classe d'équivalence d'un point (x_0, \dots, x_n) , ou encore la droite dirigée par le vecteur (x_0, \dots, x_n) , par $[x_0 : \dots : x_n]$.

L'on munit $\mathbb{R}P^n$ d'une structure de variété en considérant le recouvrement donné par les $n + 1$ ouverts

$$V_i := \{[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{R}P^n : x_i \neq 0\}, \quad i \in \{0, \dots, n\}$$

et les cartes

$$\phi_i : V_i \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad [x_0 : \dots : x_n] \mapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right).$$

L'on vérifie sans peine que les cartes sont bijectives et que les applications de changement de carte $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$, $j < i$ sont données par la formule

$$(y_1, \dots, y_n) \mapsto \left(\frac{y_1}{y_{j+1}}, \dots, \frac{y_j}{y_{j+1}}, \frac{y_{j+2}}{y_{j+1}}, \dots, \frac{y_i}{y_{j+1}}, \frac{1}{y_{j+1}}, \frac{y_{i+1}}{y_{j+1}}, \dots, \frac{y_n}{y_{j+1}} \right).$$

Une formule similaire vaut pour son inverse $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$. Les applications de changement de carte sont par conséquent des difféomorphismes et munissent $\mathbb{R}P^n$ d'une structure de variété.

Remarque. Voici deux autres descriptions alternatives de $\mathbb{R}P^n$, expliquées dans la section suivante : $\mathbb{R}P^n$ est le quotient de S^n par l'action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ donnée par l'application antipodale $x \mapsto -x$, et c'est aussi le quotient de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ par l'action propre et libre du groupe de Lie \mathbb{R}^* donnée par homothéties.

Le *fibré tautologique* sur $\mathbb{R}P^n$ est le fibré de rang 1 dont la fibre au-dessus d'un point $d \in \mathbb{R}P^n$ qui représente une droite $d \subset \mathbb{R}^{n+1}$ est la droite d . On le note

$$\tau \rightarrow \mathbb{R}P^n, \quad \tau = \{(d, v) : d \in \mathbb{R}P^n, v \in d\}.$$

La structure de fibré vectoriel est donnée par les application de trivialisation suivantes définies au-dessus des V_i , $i = 0, \dots, n$:

$$\Phi_i : \tau|_{V_i} \xrightarrow{\cong} V_i \times \mathbb{R}$$

envoie un élément

$$([x_0 : \dots : x_n], \lambda(x_0/x_i, \dots, x_{i-1}/x_i, 1, x_{i+1}/x_i, \dots, x_n/x_i)) \in \tau|_{V_i}$$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$ sur

$$([x : 0 \dots : x_n], \lambda) \in V_i \times \mathbb{R}.$$

En d'autres mots, la trivialisation Φ_i utilise le générateur distingué d'une droite appartenant à V_i caractérisé par la condition $x_i = 1$.

L'on vérifie que

$$\Phi_j \circ \Phi_i^{-1}([x_0 : \dots : x_n], \lambda) = ([x_0 : \dots : x_n], \lambda \frac{x_j}{x_i}).$$

De manière équivalente, on peut écrire

$$\Phi_j \circ \Phi_i^{-1}([x_0 : \dots : x_n], \lambda) = ([x_0 : \dots : x_n], \Phi_{ji}([x_0 : \dots : x_n])\lambda),$$

avec

$$\Phi_{ji} : V_i \cap V_j \rightarrow GL(1, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^*, \quad [x_0 : \dots : x_n] \mapsto \frac{x_j}{x_i}.$$

Le *fibré hyperplan* $L \rightarrow \mathbb{R}P^n$ est par définition le fibré en droites dont les fonctions de transition sont données par

$$\Phi_{ji} : V_i \cap V_j \rightarrow GL(1, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^*, \quad \Phi_{ji}([x_0 : \dots : x_n]) = \frac{x_i}{x_j}.$$

Nous verrons plus tard que L est le fibré dual de τ .

Soit $k \in \mathbb{Z}$. La k -ème puissance tensorielle du fibré hyperplan, notée $L^{\otimes k} \rightarrow \mathbb{R}P^n$, est par définition le fibré en droites dont les fonctions de transition sont données par

$$\Phi_{ji} : V_i \cap V_j \rightarrow GL(1, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^*, \quad \Phi_{ji}([x_0 : \dots : x_n]) = \left(\frac{x_i}{x_j}\right)^k.$$

Proposition 2.20. *Il existe une bijection canonique*

$$\Gamma(L^{\otimes k}) \cong \{f : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \text{ lisse et homogène de degré } k\}.$$

Démonstration. La condition d'homogénéité s'écrit $f(\lambda x) = \lambda^k f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Étant donnée une section $s \in \Gamma(L^{\otimes k})$ présentée comme une collection de sections $s_i : V_i \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$s_j([x_0 : \dots : x_n]) = \left(\frac{x_i}{x_j}\right)^k s_i([x_0 : \dots : x_n]) \text{ sur } V_i \cap V_j,$$

l'on définit

$$f|_{V_i}(x_0, \dots, x_n) := x_i^k s_i([x_0 : \dots : x_n]).$$

La condition de compatibilité sur les s_i assure précisément la bonne définition de f . La fonction f est lisse et homogène de degré k par construction.

Réciproquement, étant donnée f lisse et homogène de degré k , l'on pose

$$s_i([x_0 : \dots : x_n]) := \frac{f(x_0, \dots, x_n)}{x_i^k}.$$

L'homogénéité de f assure la bonne définition des s_i et leur compatibilité, de sorte qu'elles se recollent en une section de $L^{\otimes k}$. \square

Un corollaire de cette construction est le fait que les polynômes homogènes de degré k sur \mathbb{R}^{n+1} s'identifient naturellement aux sections de $L^{\otimes k}$. Ceci est une instance emblématique du principe selon lequel les sections de fibrés généralisent la notion de fonction.

3. EXEMPLES ET CONSTRUCTIONS DE VARIÉTÉS

Le but de cette section est de présenter des familles d'exemples et des constructions générales de variétés.

3.1. Produit. Soient M et N deux variétés, munies d'atlas $\{(U_i, \phi_i)\}$ et respectivement $\{(V_j, \psi_j)\}$. Le produit $M \times N$ possède une structure naturelle de variété de dimension $\dim M + \dim N$, définie par l'atlas $\{(U_i \times V_j, \phi_i \times \psi_j)\}$.

3.2. Somme connexe. La somme connexe de deux variétés M et M' de même dimension k est définie intuitivement de la manière suivante : on considère deux points $p \in M$, $p' \in M'$, deux cartes (U, ϕ) , (U', ϕ') autour de p et p' respectivement, deux ouverts relativement compacts $V \subset\subset U$ et $V' \subset\subset U'$ modelés via ces cartes sur une même boule $B^k(\epsilon)$, on enlève V et V' de M , resp. M' et on recolle le résultat en identifiant la frontière de V à la frontière de V' via leur identification commune avec la sphère $S^{k-1}(\epsilon)$. Le résultat est noté $M \# M'$.

Le lecteur trouvera une description d'un atlas dans le livre de Lafontaine, p. 85, exercice 28 du chapitre 2. La question qui se pose naturellement est celle de la dépendance du type de difféomorphisme de $M \# M'$ par rapport aux différents choix (points, cartes, ouverts). Cette étude fait intervenir la notion d'*orientabilité* d'une variété, que nous verrons plus loin. Plus précisément : si M ou M' n'est pas orientable, le type de difféomorphisme de $M \# M'$ ne dépend pas des choix. Si M et M' sont orientables, le type de difféomorphisme de $M \# M'$ ne dépend pas des choix à condition d'imposer aux cartes de préserver l'orientation.

Le fait d'écrire une variété comme somme connexe est la manière la plus naïve de la "casser" en morceaux plus simples. Ce n'est pas toujours possible. On dit qu'une variété est *irréductible* si elle ne peut pas être écrite comme somme connexe. Les seules variétés de dimension 2 compactes irréductibles sont la sphère, le tore, et le plan projectif. À partir de la dimension 3 il existe une infinité de variétés compactes irréductibles en chaque dimension.

Exercice 23. Soit M^n une variété de dimension n et soit S^n la sphère de même dimension. Montrer que $M \# S^n$ est difféomorphe à M .

3.3. Variétés affines. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} et

$$P_1, \dots, P_\ell \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_N]$$

une collection finie de polynômes. On note $\mathcal{I} \subset \mathbb{K}[X_1, \dots, X_N]$ l'idéal engendré par ces polynômes. La *variété affine définie par l'idéal \mathcal{I}* est par définition

$$V_{\mathcal{I}}(\mathbb{K}) := \{x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{K}^N : P(x) = 0, \forall P \in \mathcal{I}\}.$$

Si l'application $P = (P_1, \dots, P_\ell) : \mathbb{K}^N \rightarrow \mathbb{K}^\ell$ est submersive en 0, alors $V_{\mathcal{I}}(\mathbb{K})$ est une sous-variété de \mathbb{K}^N , réelle ou complexe, selon que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

3.4. Variétés projectives. Soit à nouveau $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . On appelle *polynôme homogène (de degré k)* un polynôme $P \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_N]$ tel que

$$P(\lambda X_1, \dots, \lambda X_N) = \lambda^k P(X_1, \dots, X_N).$$

Par exemple $P(x, y, z) = x^3 + 2y^3 + 5z^3 + xyz$ est un polynôme homogène de degré 3, mais $P(x, y) = x^2 + y^3$ n'est pas homogène.

Soient $P_1, \dots, P_\ell \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_N]$ des polynômes homogènes. La *variété projective définie par le système d'équations polynomiales $\mathcal{P} := (P_1 = \dots = P_\ell = 0)$* est par définition

$$V_{\mathcal{P}}(\mathbb{K}) := \{[x_0 : \dots : x_N] \in \mathbb{K}P^N : P_i(x_0, \dots, x_N) = 0, \forall i\}.$$

On voit que l'homogénéité des P_i garantit la bonne définition de $V_{\mathcal{P}}(\mathbb{K})$: deux points (x_0, \dots, x_N) et (x'_0, \dots, x'_N) dans $\mathbb{K}^{N+1} \setminus \{0\}$ définissent la même classe $[x_0 : \dots : x_N] \in \mathbb{K}P^N$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $(x_0, \dots, x_N) = \lambda(x'_0, \dots, x'_N)$. Ainsi $P_i(x_0, \dots, x_N) = 0$ si et seulement si $P_i(x'_0, \dots, x'_N) = 0$.

Si l'application $(P_1, \dots, P_\ell) : \mathbb{K}^{N+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{K}^\ell$ est submersive au-dessus de 0, alors $V_{\mathcal{P}}(\mathbb{K})$ est une sous-variété lisse fermée de $\mathbb{K}P^N$. Puisque $\mathbb{K}P^N$ est compact, on déduit que $V_{\mathcal{P}}(\mathbb{K})$ est compacte aussi.

Un point de vue intrinsèque sur cette construction est de voir $V_{\mathcal{P}}(\mathbb{K})$ comme le lieu commun des zéros des sections de fibrés $L^{\otimes k_i}$ déterminées par les polynômes P_i homogènes de degré k_i .

Les variétés affines et les variétés projectives sont l'objet d'étude de la géométrie algébrique. La géométrie différentielle y joue un rôle!

3.5. Actions de groupes discrets. Soit Γ un groupe. Une *action lisse de Γ sur M* est un morphisme de groupes

$$\Gamma \rightarrow \text{Diff}(M).$$

De manière équivalente, une action lisse est la donnée d'une application

$$\Gamma \times M \rightarrow M, \quad (\gamma, p) \mapsto \gamma \cdot p$$

telle que $(\gamma_1 \gamma_2) \cdot p = \gamma_1 \cdot (\gamma_2 \cdot p)$ ("action") et telle que l'application $p \mapsto \gamma \cdot p$ soit un difféomorphisme pour tout $\gamma \in \Gamma$ (action "lisse").

L'on peut penser une action de groupe comme étant une manière de réaliser un groupe abstrait Γ comme groupe de symétries d'un objet géométrique (ici, une variété). L'on peut étudier de cette manière un groupe abstrait Γ via ses différentes "incarnations" géométriques.

On parle aussi de “représentation” d’un groupe. Le plus souvent l’on s’intéresse aux représentations linéaires, i.e. aux morphismes

$$\Gamma \rightarrow GL(V),$$

avec V un espace vectoriel. Le point de vue des représentations est omniprésent en mathématiques et se décline sous une myriade de façons.

Dans cette section nous adoptons le point de vue opposé : nous allons utiliser les actions de groupes non pas pour étudier le groupe Γ , mais pour étudier la variété cible M et construire d’autres variétés à partir de celle-ci.

On appelle *orbite du point* $x \in M$ l’ensemble $\{\gamma \cdot x : \gamma \in \Gamma\}$, noté $\Gamma \cdot x$. On appelle *espace d’orbites*, ou *espace quotient*, et on le note

$$M/\Gamma,$$

l’ensemble des classes d’équivalence de points de M pour la relation d’équivalence

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists \gamma \in \Gamma, \gamma \cdot x = y.$$

Il existe une application naturelle de projection

$$\pi : M \rightarrow M/\Gamma, \quad x \mapsto \Gamma \cdot x.$$

On munit M/Γ de la *topologie quotient* : une partie $U \subset M/\Gamma$ est ouverte si et seulement si $\pi^{-1}(U) \subset M$ est un ouvert.

DIGRESSION : TOPOLOGIE QUOTIENT. Soit \mathcal{R} une relation d’équivalence sur un espace topologique M (par exemple la relation d’équivalence donnée par le fait d’appartenir à la même orbite d’une action de groupe). L’*espace topologique quotient* M/\mathcal{R} est défini comme étant l’ensemble des classes d’équivalence pour la relation \mathcal{R} , muni de la *topologie quotient* définie comme suit : les ouverts $U \subseteq M/\mathcal{R}$ sont par définition les parties telles que $\pi^{-1}(U) \subseteq M$ soit ouvert. Ici $\pi : M \rightarrow M/\mathcal{R}$ est la projection canonique qui associe à tout élément sa classe d’équivalence.

Exercice. Soit Y un espace topologique quelconque. Une application $f : M/\mathcal{R} \rightarrow Y$ est continue si et seulement si $f \circ \pi : M \rightarrow Y$ est continue.

$$\begin{array}{ccc} M & & \\ \pi \downarrow & \searrow f \circ \pi & \\ M/\mathcal{R} & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

La notion de topologie quotient donne un sens précis au fait de *recoler* des espaces topologiques. Soient X, Y deux espaces topologiques et $A \subseteq X, B \subseteq Y$ deux parties munies de la topologie induite. Supposons que l’on se soit donné un homéomorphisme $\phi : A \xrightarrow{\cong} B$. On définit

le recollement de X et Y selon A et B via ϕ comme étant l'espace topologique quotient

$$X \cup_{\phi} Y := X \cup Y / \sim$$

pour la relation d'équivalence \sim définie comme suit : deux points de X ou deux points de Y sont équivalents si et seulement si ils coïncident, et deux points $x \in X$ et $y \in Y$ sont équivalents si et seulement si $x \in A$, $y \in B$ et $y = \phi(x)$.

Exemples. (0) un "chapeau de sorcière" peut être décrit comme recollement d'un cône circulaire avec un anneau, le long d'un cercle de bord. Bien-sûr, l'espace qui en résulte est homéomorphe à un disque.

(1) l'on peut décrire la sphère S^n comme recollement de deux disques D^n le long de leur bord. On écrit $S^n = D^n \sqcup_{\text{Id}} D^n$.

(2) l'on peut décrire $\mathbb{R}P^2$ comme étant homéomorphe au recollement le long du bord d'un disque avec une bande de Möbius. L'on écrit $\mathbb{R}P^2 = D^2 \sqcup_{\partial} \text{Möbius}$.

(3) l'on peut décrire le tore T^2 comme recollement de deux cylindres le long de leurs bords ; ou bien comme recollement d'un cylindre avec lui-même le long des deux composantes de bord. Cette même construction fournit la bouteille de Klein si l'on change la manière d'identifier deux cercles en la composant avec une réflexion.

La notion de topologie quotient donne aussi un sens précis au fait d'écraser sur un point une partie d'un espace topologique. Soit X un espace topologique et $A \subseteq X$. On définit sur X une relation d'équivalence en demandant que deux points distincts soient équivalents si et seulement si ils appartiennent à A . L'espace topologique quotient est noté X/A et possède un point distingué qui est la classe d'équivalence de l'ensemble A (on dit que c'est un *espace topologique pointé*).

Exemples. (1) D^n/S^{n-1} est homéomorphe à S^n .

(2) S^n/D^n est homéomorphe à S^n , où D^n est un disque fermé plongé dans S^n .

(3) Si $A \subset \mathbb{C}$ est un anneau fermé et C est une composante de bord, le quotient A/C est homéomorphe au disque D^2 .

FIN DE LA DIGRESSION.

En vue du théorème nous donnons trois définitions importantes.

Soit $\Gamma \times M \rightarrow M$ une action de groupe sur une variété. On dit que l'action est *propre* si pour tous compacts $K, L \subset M$ l'on a

$$\#\{\gamma \in \Gamma : \gamma(K) \cap L \neq \emptyset\} < \infty.$$

De manière équivalente, si l'on regarde Γ comme espace topologique muni de la topologie discrète, une action est propre si l'application

$$\Gamma \times M \rightarrow M \times M, \quad (\gamma, x) \mapsto (\gamma \cdot x, x)$$

est propre, i.e. la préimage de tout compact est un compact.

On dit que l'action est *libre* si

$$\gamma \cdot x \neq x$$

pour tout $x \in M$ et pour tout $\gamma \in \Gamma$ différent de l'élément neutre.

Une application continue $f : X \rightarrow Y$ est appelée un *revêtement* si pour tout $y \in Y$ il existe un voisinage ouvert $y \in U \subseteq Y$ tel que $f^{-1}(U)$ soit une union disjointe d'ouverts V_i tels que $f|_{V_i} : V_i \rightarrow U$ soit un homéomorphisme. On parle d'un *revêtement lisse* si f est un revêtement, X, Y sont des variétés et f est un difféomorphisme local (en particulier $f|_{V_i} : V_i \rightarrow U$ est un difféomorphisme).

DIGRESSION-OUVERTURE : REVÊTEMENTS. L'on énonce ici sans preuve quelques faits de base sur les revêtements. Une référence possible est le cours de W.S. Massey, *A Basic Course in Algebraic Topology*, Springer, GTM, chapitre V. Dans la dernière partie de cette digression nous utilisons la notion de *groupe fondamentale*.

Soit $f : X \rightarrow Y$ un revêtement avec X, Y connexes et connexes par arcs. Soient $y \in Y$ et $x \in f^{-1}(y)$ des points base fixés.

- *relèvements de chemins* : tout chemin dans Y d'origine y se relève de manière unique à un chemin dans X d'origine x .
- *relèvement des homotopies* : l'autre extrémité du chemin relevé dans X ne dépend que de la classe d'homotopie à extrémités fixées du chemin dans Y . On obtient ainsi une *action de $\pi_1(Y, y)$ sur la fibre $f^{-1}(y)$* .
- le *groupe des automorphismes du revêtement*, noté $\text{Aut}(X, f)$, est le groupe des homéomorphismes $\phi : X \rightarrow X$ qui préservent les fibres de f , i.e.

$$f \circ \phi = f.$$

- l'action d'un élément $\phi \in \text{Aut}(X, f)$ sur un point détermine uniquement l'action de ϕ sur un voisinage de ce point. Il en découle qu'une transformation $\phi \in \text{Aut}(X, f)$ est uniquement déterminée par l'image d'un point. En particulier $\text{Aut}(X, f)$ agit librement sur X .
- le groupe $\text{Aut}(X, f)$ agit transitivement sur chaque fibre si et seulement si $f_*\pi_1(X, x)$ est un sous-groupe distingué de $\pi_1(Y, y)$, $y = f(x)$. L'on parle dans ce cas de *revêtement régulier*.

FIN DE LA DIGRESSION-OUVERTURE.

Théorème 3.1. *Soit Γ groupe agissant sur une variété séparée M .*

Si l'action est propre, le quotient M/Γ est séparé.

Si l'action est propre et libre, la projection $\pi : M \rightarrow M/\Gamma$ est un revêtement. Le quotient M/Γ possède une unique structure de variété telle que la projection $\pi : M \rightarrow M/\Gamma$ soit un revêtement lisse.

Le lecteur pourra trouver une preuve très détaillée de ce résultat dans le livre de Lafontaine, chapitre II.F, preuve du théorème 49, p. 74.

Démonstration. Supposons que l'action soit propre et montrons que M/Γ est séparé. Sinon, il existe $p \neq q \in M/\Gamma$ tels que tous deux voisinages de p et q s'intersectent. Fixons deux préimages x, y pour p et q respectivement. L'on trouve des suites $\gamma_n \in \Gamma, x_n, y_n \in M$ telles que $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y$ et $\gamma_n \cdot x_n = y_n$. Puisque x et y possèdent des voisinages relativement compacts dans M , l'hypothèse de propriété implique le fait qu'une infinité de termes de la suite γ_n doivent être égaux. En notant leur valeur commune γ on trouve $\gamma \cdot x = y$, donc $p = q$.

Supposons maintenant que l'action soit propre et libre. Un argument topologique similaire montre que :

pour tout $x \in M$ il existe un voisinage ouvert V tel que

$$\gamma \cdot V \cap V = \emptyset.$$

En particulier la collection $\{\gamma \cdot V : \gamma \in \Gamma\}$ consiste en des ouverts deux à deux disjoints. En notant $U := \pi(V) = \pi(\gamma \cdot V)$ on voit que $\pi^{-1}(U) = \sqcup_{\gamma} \gamma \cdot V$ et $\pi|_{\gamma \cdot V} : \gamma \cdot V \rightarrow U$ est un homéomorphisme local. Donc π est un revêtement.

Si π est un revêtement lisse, c'est en particulier un difféomorphisme local sur image. Or, pour que le homéomorphisme $\pi|_V : V \rightarrow U$ soit un difféomorphisme local, la structure différentiable sur U doit nécessairement être induite par celle de V via π . L'on vérifie directement que la collection des (cartes qui recouvrent les) ouverts U de la forme précédente forme un atlas. \square

Exemple. Soit $\Gamma = \mathbb{Z}$ agissant sur \mathbb{R} par $k \cdot x := x + k$. L'orbite du point $0 \in \mathbb{R}$ est $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$, l'action est propre et libre, et \mathbb{R}/\mathbb{Z} est homéomorphe à $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Exemple. Considérons $M = S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ et $\Gamma = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ agissant sur S^1 par

$$k(\text{mod } n) \cdot z := e^{\frac{2ik\pi}{n}} z.$$

L'orbite de $1 \in S^1$ est le groupe $\{\zeta^k : k \in \{0, \dots, n-1\}, \zeta = e^{\frac{2i\pi}{n}}\} \subset S^1$. Si l'on regarde S^1 comme \mathbb{R}/\mathbb{Z} , on voit que $S^1/\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{R}/\frac{1}{n}\mathbb{Z}$.

Exercice 24. L'action de \mathbb{Z} sur \mathbb{R}^2 par $n \cdot (x, y) := (2^n x, 2^{-n} y)$ n'est pas propre.

3.6. Groupes de Lie : exemples. Dans le contexte des variétés il est naturel de considérer des groupes pour lesquels la structure de groupe est compatible avec la structure de variété : les groupes de Lie. Ce sont des objets d'une importance centrale en mathématiques.

Définition 3.2. *Un groupe de Lie est une variété G munie d'une structure de groupe différentiable au sens suivant : les opérations de multiplication*

$$m : G \times G \rightarrow G, \quad m(g_1, g_2) := g_1 g_2$$

et d'inversion

$$\iota : G \rightarrow G, \quad \iota(g) := g^{-1}$$

sont lisses.

Notre but dans cette section est de donner des exemples. Une étude plus détaillée de quelques notions de base concernant les groupes de Lie suivra plus tard. L'un des théorèmes importants du sujet est le suivant :

Théorème. *Un sous-groupe fermé d'un groupe de Lie est un groupe de Lie.* \square

Pour la preuve on pourra consulter le livre de Warner, chapitre 3, et plus précisément la preuve du théorème 3.21.

L'un des objets centraux en théorie des groupes de Lie est l'espace tangent en l'identité $T_e G$. Celui-ci porte une structure d'algèbre de Lie, que nous allons définir plus tard. On le note souvent $Lie(G)$, ou encore \mathfrak{g} , et on l'appelle *l'algèbre de Lie associée au groupe G* .

Exemples.

1. Le *groupe général linéaire sur \mathbb{R}* , noté $GL(n, \mathbb{R})$: c'est l'ensemble des matrices réelles de dimension n inversibles, vu comme ouvert dans $M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ et muni de la topologie et de la structure différentiable induites. C'est une variété de dimension n^2 .

1bis. Le *groupe général linéaire sur \mathbb{C}* , noté $GL(n, \mathbb{C})$: c'est l'ensemble des matrices complexes de dimension n inversibles, vu comme ouvert dans $M_n(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{n^2}$ et muni de la topologie et de la structure différentiable induites. Dimension sur \mathbb{C} égale à n^2 .

2. Le *groupe orthogonal $O(n)$* est le sous-groupe fermé de $GL(n, \mathbb{R})$ défini par les conditions

$$AA^t = \text{Id}.$$

Il est compact et possède deux composantes connexes, distinguées par les conditions $\det A = \pm 1$.

L'équation de définition de $O(n)$ est submersive (exercice!) et l'espace tangent en l'identité à $O(n)$ est par conséquent

$$T_{\text{Id}}O(n) \cong \{X \in M_n(\mathbb{R}) : X + X^t = 0\}.$$

Ainsi

$$\dim O(n) = (n-1)n/2.$$

3. Le *groupe spécial orthogonal* $SO(n)$ est la composante connexe de l'identité dans $O(n)$. Il est donc défini par les conditions

$$AA^t = \text{Id}, \quad \det A = 1.$$

Sa dimension est bien-sûr la même que celle de $O(n)$.

4. Le *groupe unitaire* $U(n)$ est le sous-groupe fermé de $GL(n, \mathbb{C})$ défini par les conditions

$$A\bar{A}^t = \text{Id}.$$

Il est connexe et compact. Noter que l'équation de définition, quoique submersive, n'est pas holomorphe mais seulement lisse au sens réel! Le groupe $U(n)$ est donc une variété réelle et non pas complexe. Son espace tangent en l'identité est

$$T_{\text{Id}}U(n) \cong \{X \in M_n(\mathbb{C}) : X + \bar{X}^t = 0\}.$$

Sa dimension sur \mathbb{R} est donc

$$\dim U(n) = 2(n-1)n/2 + n = n^2.$$

L'application déterminant est lisse et définit un morphisme de groupes

$$\det : U(n) \rightarrow U(1).$$

5. Le *groupe spécial unitaire* $SU(n)$ est le noyau de l'application déterminant restreinte à $U(n)$. Il est donc défini comme sous-variété de $GL(n, \mathbb{C})$ par les équations

$$AA^t = \text{Id}, \quad \det A = 1.$$

Puisque tout morphisme surjectif de groupes de Lie est submersif, on déduit que

$$\dim SU(n) = n^2 - 1.$$

Le groupe $SU(n)$ est connexe et compact (fermé dans compact).

6. Le *groupe symplectique réel* $Sp(2n, \mathbb{R})$ est défini comme le sous-groupe de $GL(4n, \mathbb{R})$ donné par les conditions

$$A^t J A = J, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -\text{Id}_n \\ \text{Id}_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Noter le fait que $J^2 = -\text{Id}_{2n}$. C'est un groupe non-compact, connexe. L'équation de définition est submersive et son espace tangent en l'identité est

$$T_{\text{Id}}Sp(2n, \mathbb{R}) \cong \{X \in M_{2n}(\mathbb{R}) : JX + X^t J = 0\}.$$

La condition équivalente $X^t = -JXJ$ implique le fait que sa dimension est égale à

$$\dim Sp(2n, \mathbb{R}) = n(2n+1).$$

Pour le démontrer l'on pourra écrire une matrice X par blocs sous la forme $X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$.

Remarque. De façon intrinsèque, étant donné un espace vectoriel V :

- on définit $GL(V)$ comme le groupe des automorphismes linéaires de V ;
- lorsque V est un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire g , on définit $O(V, g)$ comme le groupe des automorphismes linéaires qui préservent g , et $SO(V, g)$ comme la composante connexe de l'identité dans $O(V, g)$;
- lorsque V est un espace vectoriel complexe muni d'une métrique hermitienne h , on définit $U(V, h)$ comme le groupe des automorphismes \mathbb{C} -linéaires qui préservent h , et $SU(V, h)$ comme le noyau de l'application déterminant $\det : U(V, h) \rightarrow U(1)$;
- lorsque V est un espace vectoriel réel et ω une forme symplectique, i.e. une forme bilinéaire anti-symétrique non-dégénérée, on définit $Sp(V, \omega)$ comme l'ensemble des automorphismes linéaires qui préservent ω .

Exercice 25. Vérifier que les définitions intrinsèques récupèrent les définitions qui les précèdent dans les cas suivants :

- le produit scalaire euclidien sur \mathbb{R}^n donné par

$$g(x, y) = \sum_{k=1}^n x_k y_k,$$

où $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$;

- le produit hermitien standard sur \mathbb{C}^n donné par

$$h(z, w) = \sum_{k=1}^n \bar{z}_k w_k,$$

où $z = (z_1, \dots, z_n)$, $w = (w_1, \dots, w_n)$;

- la forme symplectique standard sur \mathbb{R}^{2n} donnée par

$$\omega(X, X') = \sum_{k=1}^n x_k y'_k - y_k x'_k = g(JX, X'),$$

où $X = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$, $X' = (x'_1, \dots, x'_n, y'_1, \dots, y'_n)$.

Identifions \mathbb{C}^n à \mathbb{R}^{2n} via l'isomorphisme $z \mapsto (\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z))$. Vérifier que la multiplication par i dans \mathbb{C}^n correspond à l'action de J dans \mathbb{R}^{2n} . Vérifier que

$$h = g + i\omega.$$

(L'un des messages de ce dernier point est que, même si vous n'avez pas encore entendu parler explicitement de forme symplectique, vous avez implicitement déjà rencontré cette notion : ce n'est rien d'autre que la partie imaginaire d'un produit hermitien.)

3.7. Actions de groupes de Lie. La notion de fibré principal.

Notre but dans cette section est de donner des conditions sous lesquelles le quotient d'une variété par une action de groupe de Lie est encore une variété. Cette section peut être lue comme la contrepartie "continue" de la section "discrète" §3.5.

Une *action d'un groupe de Lie* G sur une variété M est une application lisse

$$G \times M \rightarrow M, \quad (g, p) \mapsto g \cdot p$$

telle que $g_1 \cdot (g_2 \cdot p) = (g_1 g_2) \cdot p$. On en déduit en particulier un morphisme de groupes

$$G \rightarrow \text{Diff}(M).$$

On note parfois une action de G sur M par le symbole $G \curvearrowright M$. On dit que M est un G -espace.

On dit qu'une action est *propre* si l'application

$$G \times M \rightarrow M \times M, \quad (g, p) \mapsto (g \cdot p, p)$$

est propre, i.e. la préimage d'un compact est un compact. De manière équivalente, une action est propre si et seulement si pour tous compacts $K, L \subseteq M$, l'ensemble $\{g \in G : gK \cap L \neq \emptyset\} \subseteq G$ est compact.

Exercice 26. Toute action d'un groupe de Lie compact est propre. Une action d'un groupe de Lie non-compact sur une variété compacte n'est jamais propre.

On dit qu'une action est *libre* si $g \cdot p \neq p$ pour tout $p \in M$ et pour tout $g \in G$ qui est différent de l'élément neutre.

Exercice 27. Vérifier que les définitions d'action propre, resp. libre coïncident avec les définitions du §3.5 dans le cas particulier des actions de groupes discrets, vus comme groupes de Lie de dimension 0.

En continuant le parallèle avec la section §3.5, le lecteur est en droit de se demander quel est l'analogue "continu" de la notion de revêtement. La réponse est : la notion de G -fibré principal.

Définition 3.3. Soit G un groupe de Lie et M, B des variétés. Un G -fibré principal d'espace total M et base B est la donnée d'une action libre de G sur M et d'une submersion surjective $\pi : M \rightarrow B$ dont les fibres sont exactement les orbites de M sous l'action de G , ayant la propriété suivante : il existe un recouvrement ouvert (U_i) de B et des difféomorphismes $\Phi_i : \pi^{-1}(U_i) \xrightarrow{\cong} U_i \times G$ qui commutent avec l'action de G (donnée sur $U_i \times G$ par translations sur le deuxième facteur), et

qui font commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 \pi^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\Phi} & U_i \times G \\
 \searrow \pi & & \swarrow \text{pr}_1 \\
 & U_i &
 \end{array}$$

On dit aussi que l'application Φ_i dans la définition est G -équivariante. Plus généralement, étant donnés deux G -espaces M et N , une application $f : M \rightarrow N$ est dite G -équivariante si $f(g \cdot p) = g \cdot f(p)$.

Lorsque M, B sont uniquement des espaces topologiques sans structure de variété, l'action de G est seulement continue, et les Φ_i sont des homéomorphismes, on parle de G -fibré principal topologique.

Exercice 28. Les G -fibrés principaux connexes sur B avec G un groupe discret quelconque sont exactement les revêtements connexes réguliers de B (avec G donné par le groupe des automorphismes du revêtement).

Théorème 3.4. Soit G un groupe de Lie agissant sur une variété séparée M .

Si l'action est propre, le quotient M/G est séparé.

Si l'action est propre et libre la projection $\pi : M \rightarrow M/G$ est un G -fibré principal : pour tout $p \in M/G$ il existe un voisinage $p \in U \subseteq M/G$ et un homéomorphisme

$$\Phi : \pi^{-1}(U) \xrightarrow{\cong} U \times G$$

qui commute avec l'action de G (donnée sur $U \times G$ par translation sur le deuxième facteur).

L'espace des orbites M/G porte une unique structure de variété telle que la projection π admette des sections locales lisses. Dans ce cas les homéomorphismes Φ ci-dessus sont des difféomorphismes, la projection π est lisse et la dimension de M/G est $\dim M - \dim G$.

Le lecteur trouvera une preuve détaillée de ce théorème dans le cas où M est un groupe de Lie et G est un sous-groupe fermé agissant par translations dans le livre de Warner, preuve du théorème 3.58. Nous donnons seulement une esquisse pour mettre en évidence les idées principales. Nous allons surtout utiliser le théorème pour donner des définitions alternatives de certains espaces importants. Le lecteur curieux pourra approfondir.

Esquisse de démonstration. La preuve du fait que le quotient est séparé lorsque l'action est propre est à quelques détails près la même que dans le cas d'une action libre de groupe discret (Théorème 3.1).

Par ailleurs, lorsque l'action est propre les applications d'évaluation

$$ev_x : G \rightarrow M, \quad g \mapsto g \cdot x \quad (x \in M)$$

sont propres. Ceci entraîne que toutes les orbites sont fermées.

Supposons désormais que l'action est propre et libre. Chaque application d'évaluation est alors un plongement et chaque orbite est une sous-variété de M de dimension $\dim G$.

Soit $p = G \cdot x \in M/G$, avec $x \in M$ un choix de point sur l'orbite.

Affirmation : il existe une sous-variété $V \subset M$ (difféomorphe à un disque) de dimension $\dim M - \dim G$, passant par x , telle que $T_x V \cap T_x(G \cdot x) = \{0\}$ (on dit que V est "transverse" à $G \cdot x$), et telle que toute orbite $G \cdot y$ a au plus un point d'intersection, transverse, avec V .

Pour démontrer l'affirmation on raisonne par contradiction. L'on trouve alors des suites $x_n, y_n \rightarrow x$, avec $x_n, y_n \in V$, $x_n \neq y_n$, et $y_n = g_n \cdot x_n$. Puisque l'action est libre on obtient $g_n \neq e$, l'élément neutre de G . Par propriété on obtient, quitte à extraire une sous-suite, $g_n \rightarrow e$. Soit \mathcal{G} un voisinage compact de $e \in G$. Puisque $\mathcal{G} \cdot x$ est transverse à V avec un unique point d'intersection, alors $\mathcal{G} \cdot x'$, avec $x' \in V$ proche de x , est aussi transverse à V avec un unique point d'intersection. En prenant $n \gg 0$ et $x' = x_n$, on obtient une contradiction avec le fait que $g_n \rightarrow e$.

L'on considère alors l'application

$$\Psi : V \times G \rightarrow M, \quad (y, g) \mapsto g \cdot y.$$

Cette application est injective par définition de V . Elle est aussi G -équivariante, où l'action de G sur $V \times G$ se fait par translations sur le deuxième facteur. Par ailleurs

$$d\Psi(y, e) : T_y V \times T_e G \rightarrow T_y M$$

est un isomorphisme puisque V est transverse aux orbites $G \cdot y$, $y \in V$. Puisque Ψ est G -équivariante on déduit que

$$d\Psi(y, g) : T_y V \times T_g G \rightarrow T_{g \cdot y} M$$

est aussi un isomorphisme pour tout $g \in G$. Il s'ensuit que Ψ est un difféomorphisme local, mais comme Ψ est une application injective on déduit que c'est un difféomorphisme sur image.

Ceci démontre le fait que $\pi : M \rightarrow M/G$ est un G -fibré principal topologique. L'existence d'une structure de variété découle de la preuve : les coordonnées sur la variété V fournissent des coordonnées locales autour de $p = G \cdot x \in M/G$. L'unicité de la structure de variété découle d'une analyse attentive de la preuve. \square

Remarque. La notion de G -fibré principal est une généralisation de la notion de fibré vectoriel. Elle est définie selon la même démarche : recollement de modèles locaux du type $U \times G$, avec G un groupe de Lie.

Exemple (espace projectif complexe). Considérons l'action du groupe de Lie \mathbb{C}^* sur $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ donnée par

$$\lambda \cdot (z_0, \dots, z_n) := (\lambda z_0, \dots, \lambda z_n).$$

L'espace des orbites de cette action s'identifie canoniquement avec l'espace des droites complexes dans \mathbb{C}^{n+1} . Cette action est évidemment libre. Elle est aussi propre. Cela découle de l'existence du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} U(1) \times S^{2n+1} & \longrightarrow & S^{2n+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \end{array} ,$$

de la compacité de la sphère unité $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ et du groupe unitaire $U(1) \subset \mathbb{C}^*$, et du fait que l'inclusion $S^{2n+1} \hookrightarrow \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ induit une bijection au niveau des espaces d'orbites. Dans le diagramme ci-dessus les flèches verticales sont les inclusions canoniques, et la première flèche horizontale désigne la restriction de l'action de $U(1) \subset \mathbb{C}^*$ à S^{2n+1} .

Par conséquent l'espace d'orbites possède une structure naturelle de variété lisse. On l'appelle *espace projectif complexe* et on le note

$$\mathbb{C}P^n := \mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1}) := \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} / \mathbb{C}^* \cong S^{2n+1} / S^1.$$

3.8. Espaces homogènes. Un cas particulier de la construction précédente est celui où un sous-groupe fermé H d'un groupe de Lie G agit sur G par translations à gauche :

$$H \times G \rightarrow G, \quad (h, g) \mapsto hg.$$

Cette action est toujours libre et propre et le quotient G/H porte une structure naturelle de variété. On appelle G/H un *espace homogène*.

Remarque. Lorsque H est un sous-groupe distingué, la structure de groupe naturelle sur G/H est compatible avec cette structure de variété lisse, de sorte que G/H est un groupe de Lie.

Bien évidemment, le groupe G lui-même agit transitivement sur G/H . Le théorème qui suit nous assure que toute variété sur laquelle G agit transitivement est un espace homogène. On dit qu'une action de G sur M est *transitive* si pour tous $x, y \in M$ il existe $g \in G$ tel que $g \cdot x = y$. De manière équivalente, l'espace d'orbites de l'action est réduit à un point.

Théorème 3.5. *Soit M une variété sur laquelle agit transitivement un groupe de Lie G ayant un nombre fini de composantes connexes. Pour tout point $p \in M$ on note*

$$G_p := \{g \in G : g \cdot p = p\}$$

le stabilisateur du point p .

(i) Le stabilisateur G_p de tout point p est un sous-groupe fermé de G . Étant donnés deux points p et q , leurs stabilisateurs sont conjugués : il existe $g \in G$ tel que

$$G_p = gG_qg^{-1}.$$

(ii) Pour tout point $p \in M$ l'application

$$\Phi_p : G/G_p \longrightarrow M, \quad [g] \mapsto g \cdot p$$

est un difféomorphisme.

Le contenu du théorème est le suivant : la classe des espaces homogènes coïncide avec la classe des variétés munies d'actions transitives de groupes de Lie.

Démonstration. Le point (i) découle directement des définitions.

Pour le point (ii), l'on voit que l'application Φ_p est lisse, bijective, G -équivariante, et un difféomorphisme local en $[e]$ puisque

$$d\Phi_p([e]) : T_{[e]}(G/G_p) \longrightarrow T_pM$$

est bijective. Par G -équivariance on déduit que Φ_p est un difféomorphisme local en tout point. Par bijectivité, c'est un difféomorphisme global. \square

Exemples.

(1) *Sphères.* Le groupe $O(n)$ des isométries de l'espace euclidien \mathbb{R}^n agit transitivement sur la sphère unité S^{n-1} avec stabilisateur isomorphe à $O(n-1)$. En effet, le stabilisateur du point $(1, 0, \dots, 0)$ est le sous-groupe des matrices orthogonales qui sont diagonales par blocs, avec un bloc de taille 1 égal à 1 et un autre bloc de taille $n-1$ qui est une matrice orthogonale. Ainsi

$$S^{n-1} \simeq O(n)/O(n-1).$$

De même

$$S^{n-1} \simeq SO(n)/SO(n-1).$$

Le groupe $U(n)$ des isométries de \mathbb{C}^n agit transitivement sur la sphère unité S^{2n-1} avec stabilisateur isomorphe à $U(n-1)$. Ainsi

$$S^{2n-1} \simeq U(n)/U(n-1),$$

et aussi

$$S^{2n-1} \simeq SU(n)/SU(n-1).$$

(2) *Espaces projectifs.* Regardons $\mathbb{R}P^n$ comme l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Le groupe $O(n+1)$ agit transitivement sur cet ensemble avec stabilisateur isomorphe à $O(n) \times O(1)$. En effet, un élément de $O(n)$ qui fixe une droite d est uniquement déterminé par son action sur d^\perp et par son action sur d . L'action sur d^\perp s'identifie à $O(n)$,

tandis que l'action sur d s'identifie à $O(1) = \{\pm 1\}$. Nous obtenons une bijection naturelle

$$\mathbb{R}P^n \simeq O(n+1)/O(n) \times O(1)$$

via laquelle on peut induire sur $\mathbb{R}P^n$ une structure d'espace homogène, et en particulier de variété. Sa dimension est égale à n .

De manière similaire, regardons $\mathbb{C}P^n$ comme l'ensemble des droites vectorielles complexes dans $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$. Le groupe $U(n+1)$ agit transitivement sur cet ensemble avec stabilisateur isomorphe à $U(n) \times U(1)$, et nous obtenons une bijection naturelle

$$\mathbb{C}P^n \simeq U(n+1)/U(n) \times U(1).$$

Via cette bijection nous pouvons induire sur $\mathbb{C}P^n$ une structure d'espace homogène, et donc de variété. À noter le fait que cette construction fournit une structure de variété lisse réelle puisque $U(n)$ est un groupe de Lie réel. Mais l'espace projectif $\mathbb{C}P^n$ est une variété complexe ! Sa dimension sur \mathbb{C} vaut n .

Exercice. La structure différentiable d'espace homogène sur $\mathbb{K}P^n$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ coïncide avec celle donnée par la construction d'espace quotient vue plus haut.

(3) *Variétés de Grassmann, ou Grassmanniennes.* Soit $G_{\mathbb{R}}(k, n)$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension k dans \mathbb{R}^n . Le groupe $O(n)$ agit transitivement sur $G_{\mathbb{R}}(k, n)$ avec stabilisateur isomorphe à $O(k) \times O(n-k)$. En effet, un élément qui fixe un sous-espace V de dimension k est déterminé par son action sur V et par son action sur V^\perp . Le groupe des isométries linéaires de V s'identifie à $O(k)$, tandis que le groupe des isométries linéaires de V^\perp s'identifie à $O(n-k)$. On obtient une bijection naturelle

$$G_{\mathbb{R}}(k, n) \simeq O(n)/O(k) \times O(n-k)$$

que l'on peut utiliser pour induire sur $G_{\mathbb{R}}(k, n)$ une structure d'espace homogène, et donc de variété lisse. On l'appelle *Grassmannienne des k -plans réels dans \mathbb{R}^n* . Sa dimension est $k(n-k)$. Noter le fait que $\mathbb{R}P^n = G_{\mathbb{R}}(1, n+1)$.

Soit $G_{\mathbb{C}}(k, n)$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels complexes de dimension k dans \mathbb{C}^n . Le groupe $U(n)$ agit transitivement sur $G_{\mathbb{C}}(k, n)$ avec stabilisateur isomorphe à $U(k) \times U(n-k)$ (même argument que ci-dessus). La bijection naturelle

$$G_{\mathbb{C}}(k, n) \simeq U(n)/U(k) \times U(n-k)$$

peut être utilisée pour induire sur $G_{\mathbb{C}}(k, n)$ une structure d'espace homogène, et donc de variété lisse. On l'appelle *Grassmannienne des k -plans complexes dans \mathbb{C}^n* . Sa dimension sur \mathbb{R} vaut $2k(n-k)$. Comme

pour le cas particulier de $\mathbb{C}P^n = G_{\mathbb{C}}(1, n+1)$, même si cette construction fournit une structure de variété réelle sur $G_{\mathbb{C}}(k, n)$, celle-ci est en fait une variété complexe.

(4) *Variétés de Stiefel.* Soit $V_{\mathbb{R}}(k, n)$ l'ensemble des k -repères réels dans \mathbb{R}^n , dont les points sont constitués par les tuples ordonnés de k vecteurs linéairement indépendants. Le groupe $GL(n, \mathbb{R})$ agit transitivement sur $V_{\mathbb{R}}(k, n)$. Le stabilisateur est isomorphe au sous-groupe $H \subset GL(n, \mathbb{R})$ constitué des matrices qui s'écrivent par blocs sous la forme $\begin{pmatrix} \text{Id}_k & * \\ 0 & A \end{pmatrix}$, avec $A \in GL(n-k, \mathbb{R})$. L'on a une bijection naturelle

$$V_{\mathbb{R}}(k, n) \simeq GL(n, \mathbb{R})/H$$

qui induit une structure d'espace homogène, et donc de variété, sur $V_{\mathbb{R}}(k, n)$. On l'appelle *variété de Stiefel des k -repères dans \mathbb{R}^n* . Sa dimension est kn .

Soit $V_{\mathbb{C}}(k, n)$ l'ensemble des k -repères complexes dans \mathbb{C}^n , dont les points sont constitués par les tuples ordonnés de k vecteurs de \mathbb{C}^n linéairement indépendants sur \mathbb{C} . Le groupe $GL(n, \mathbb{C})$ agit transitivement sur $V_{\mathbb{C}}(k, n)$. Le stabilisateur est isomorphe au sous-groupe $K \subset GL(n, \mathbb{C})$ constitué des matrices qui s'écrivent par blocs sous la forme $\begin{pmatrix} \text{Id}_k & * \\ 0 & A \end{pmatrix}$, avec $A \in GL(n-k, \mathbb{C})$. L'on a une bijection naturelle

$$V_{\mathbb{C}}(k, n) \simeq GL(n, \mathbb{C})/K$$

qui induit une structure d'espace homogène, et donc de variété, sur $V_{\mathbb{C}}(k, n)$. On l'appelle *variété de Stiefel des k -repères dans \mathbb{C}^n* . Cette fois-ci, la construction fournit d'emblée une structure de variété complexe sur $V_{\mathbb{C}}(k, n)$, de dimension complexe kn .

Remarque. Une des raisons d'être de la description des grassmanniennes et des variétés de Stiefel en tant qu'espace homogènes est qu'elle est très compacte et fournit la structure différentiable comme cas particulier d'un théorème général. Il est néanmoins très utile de comprendre de manière explicite les atlas sur ces variétés. Voici un point de départ pour le lecteur.

Exercice 29. Soit $V \in G_{\mathbb{R}}(k, n)$ et $F \subset \mathbb{R}^n$ un sous-espace de dimension $n-k$ transverse à V , i.e. $F \cap V = \{0\}$. Pour chaque telle paire (V, F) on définit

$$\mathcal{O}_F(V) := \{V' \in G_{\mathbb{R}}(k, n) : V' \cap F = \{0\}\}.$$

Il existe une bijection canonique

$$\phi_{F,V} : \mathcal{O}_F(V) \rightarrow \text{Hom}(V, F)$$

qui associe à un sous-espace V' l'unique application linéaire $V \rightarrow F$ dont le graphe est V' . Le lecteur pourra montrer que la collection

$(\mathcal{O}_F(V), \phi_{F,V})$ définit un atlas sur $G_{\mathbb{R}}(k, n)$, muni de la topologie induite par les $\phi_{F,V}$.

DIGRESSION-OUVERTURE : GRASSMANNIENNES ET VARIÉTÉS DE STIEFEL. Nous donnons ici quelques propriétés supplémentaires de ces variétés, qui font intervenir les notions de fibré vectoriel et de fibré principal.

Il existe une projection canonique

$$\pi : V_{\mathbb{R}}(k, n) \longrightarrow G_{\mathbb{R}}(k, n)$$

qui associe à un k -repère le k -plan qu'il engendre. Ceci définit sur $V_{\mathbb{R}}(k, n)$ une structure de $GL(k, \mathbb{R})$ -fibré principal de base $G_{\mathbb{R}}(k, n)$.

La grassmannienne $G_{\mathbb{R}}(k, n)$ est la base d'un fibré vectoriel $E_{\mathbb{R}}(k, n)$ de rang k canonique, appelé *fibré tautologique* : la fibre en un point p représenté par un k -plan V_p est le k -plan V_p lui-même.

Le fibré $E_{\mathbb{R}}(k, n)$ est un fibré universel au sens suivant : pour tout fibré vectoriel $E \rightarrow M^n$ de rang k , il existe $N \gg n$ et une application lisse $f : M \rightarrow G_{\mathbb{R}}(k, N)$ telle que $E \simeq f^*E_{\mathbb{R}}(k, N)$. Ici $f^*E_{\mathbb{R}}(k, N)$ est le fibré vectoriel sur M *tiré-en-arrière par f* , dont la fibre en un point p est la fibre de $E_{\mathbb{R}}(k, N)$ au point $f(p)$. Cette dernière construction est tout-à-fait générale et joue le rôle de changement de base pour les fibrés vectoriels. L'étude de ces fibrés universels mène naturellement vers la théorie des *classes caractéristiques*. La référence classique est le livre de J. Milnor et J. Stasheff, *Characteristic classes*. L'existence du fibré universel est la raison principale d'être des grassmanniennes.

Les variétés de Stiefel, elles, sont importantes puisqu'elles fournissent une interprétation des classes caractéristiques mentionnées ci-dessus en tant qu'obstructions à l'existence de collections de sections qui sont linéairement indépendantes en tout point. La meilleure référence sur cette question est le livre classique de N. Steenrod, *The topology of fibre bundles*, Princeton University Press, 1951.

Les espaces projectifs $\mathbb{C}P^n$ sont importants pour deux raisons : (i) Une sous-variété complexe de $\mathbb{C}P^n$ est nécessairement algébrique, i.e. définie par l'annulation d'un système d'équations polynomiales. En particulier les sous-variétés complexes de $\mathbb{C}P^n$ sont sujettes aux méthodes de la géométrie algébrique. (ii) Nous avons à disposition un critère pour décider quand est-ce qu'une variété complexe kählerienne se plonge dans $\mathbb{C}P^n$ (théorème de plongement de Kodaira).

FIN DE LA DIGRESSION-OUVERTURE.

4. CHAMPS DE VECTEURS. FLOTS. DIFFÉOMORPHISMES

4.1. Un champ de vecteurs est une équation différentielle.

4.1.1. *Heuristique.* Nous adoptons dans cette section le point de vue des *vecteurs tangents comme directions infinitésimales de mouvement*. Lorsque l'on se donne une direction infinitésimale de mouvement $X(p)$ en chaque point p d'une variété M , la notion qui se présente naturellement est celle de *courbe intégrale*, une courbe dont le vecteur vitesse en chaque point coïncide avec la valeur du champ de vecteurs au point respectif. La collection de toutes ces courbes intégrales est le *flot* du champ de vecteurs.

Imaginons la surface d'un lac avec une brise légère soufflant à la surface sans faire de vagues. Celle-ci imprime à la surface de l'eau une tendance de mouvement : c'est un champ de vecteurs. La trajectoire d'une goutte d'huile sur la surface de l'eau est une courbe intégrale. Le flot de ce champ de vecteurs n'est rien d'autre que le mouvement que l'on observe sur toute la surface du lac. Tout comme le vent peut changer de direction avec le temps, il est naturel de considérer des champs de vecteurs qui dépendent du temps.

L'on peut répéter l'exercice d'imagination précédent avec le mouvement de l'air à la surface de la terre : l'on observe alors le flot d'un champ de vecteurs sur une variété, la sphère S^2 .

4.1.2. *Courbes intégrales. Équations différentielles.* On rappelle qu'un champ de vecteurs est une section lisse de TM , et l'on a noté $\mathcal{X}(M) := \Gamma(TM)$ l'espace vectoriel des champs de vecteurs sur M .

Un champ de vecteurs *dépendant du temps*, noté (X_t) , est une application lisse

$$X : \mathbb{R} \times M \rightarrow TM, \quad \forall t \in \mathbb{R}, X_t := X(t, \cdot) \in \mathcal{X}(M).$$

L'on suppose ici que X_t est défini pour $t \in \mathbb{R}$ uniquement par souci de simplification ; le lecteur saura adapter la discussion au cas où X_t est défini pour t appartenant à un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$. Les champs de vecteurs que nous allons généralement considérer seront indépendants du temps, i.e. $X \in \mathcal{X}(M)$.

Définition 4.1. *Soit (X_t) un champ de vecteurs dépendant du temps. Une courbe intégrale de (X_t) est une courbe lisse*

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$$

telle que

$$\dot{\gamma}(t) = X_t(\gamma(t)), \quad \forall t \in I.$$

Soit (U, ϕ) une carte sur M . En prenant le premier point de vue (en termes de cartes) sur les vecteurs tangents, un champ de vecteurs (dépendant du temps) (X_t) sur U correspond par définition à une application lisse $F : \mathbb{R} \times \phi(U) \rightarrow \mathbb{R}^n$, i.e. à un champ de vecteurs tel qu'on le définit habituellement dans un cours d'équations différentielles. Par ailleurs, $\gamma : I \rightarrow U$ est une courbe intégrale pour (X_t) si et seulement si $x := \phi \circ \gamma : I \rightarrow \phi(U)$ satisfait l'équation

$$x'(t) = F(t, x(t)), \quad \forall t \in I,$$

ce qui signifie que $x = \phi \circ \gamma$ est une solution de l'équation différentielle ordinaire (ÉDO) définie par F . La donnée d'un champ de vecteurs équivaut ainsi dans chaque carte à la donnée d'une équation différentielle sur un ouvert de \mathbb{R}^n .

Le raisonnement précédent est formellement tautologique. Pourtant il nous apporte quelque chose de précieux : l'*objet analytique* qu'était une équation différentielle est devenu désormais un *objet géométrique*, à savoir un champ de vecteurs. Désormais, une équation différentielle sur une variété est la donnée d'un champ de vecteurs.

L'une des conséquences dramatiques de ce point de vue est la suivante : *résoudre* une équation différentielle devient irrélevant. La forme particulière de la solution dépend fortement de la carte choisie. Ce qui est rélevant est le fait de *comprendre* les propriétés globales du champ de vecteurs en question. Ce point de vue a sans doute son origine dans les travaux de Poincaré, qui a étudié en premier les propriétés qualitatives des équations différentielles.

Voici une conséquence plus terre-à-terre de la discussion précédente :

Tout résultat de nature locale valable pour une ÉDO reste vrai pour les champs de vecteurs dans le cadre des variétés.

Il y a deux résultats qui jouent un rôle central dans la théorie : le théorème d'existence et unicité locale de Cauchy-Lipschitz et le théorème de dépendance lisse par rapport aux conditions initiales. Nous énonçons chacun d'entre eux dans sa version classique euclidienne, et dans la version "transportée" sur les variétés. Le lecteur pourra se convaincre de l'équivalence des deux formulations.

Théorème 4.2 (Cauchy-Lipschitz, version euclidienne). *Soient $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ et $I \subseteq \mathbb{R}$ ouverts et $F : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs continu par rapport aux deux variables et Lipschitz par rapport à la deuxième variable. Pour tous $x_0 \in \Omega$, $t_0 \in I$ il existe une unique solution de l'ÉDO*

$$x'(t) = F(t, x(t))$$

définie au voisinage de t_0 et telle que

$$x(t_0) = x_0.$$

□

Théorème 4.2bis. (Cauchy-Lipschitz, version variétés). Soient M une variété et $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ un champ de vecteurs dépendant du temps. Pour tous $p_0 \in M$ et $t_0 \in \mathbb{R}$ il existe une unique courbe intégrale γ du champ (X_t) , i.e.

$$\dot{\gamma}(t) = X_t(\gamma(t)),$$

définie au voisinage de t_0 et telle que

$$\gamma(t_0) = p_0.$$

□

Notons la conséquence directe suivante : soient γ_1, γ_2 deux courbes intégrales d'un même champ de vecteurs définies sur deux intervalles ouverts d'intersection non-vide. Si $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$ pour un certain t_0 , alors γ_1 et γ_2 coïncident sur leur intervalle commun de définition. (L'on pourra montrer que le lieu des points où elles coïncident est non-vide, ouvert et fermé.)

Théorème 4.3 (dépendance lisse par rapport aux conditions initiales, version euclidienne). Soient $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ et $I \subseteq \mathbb{R}$ des ouverts et $F : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs lisse. Pour $x_0 \in \Omega$ et $t_0 \in I$ on note

$$t \mapsto \varphi^{t, t_0}(x_0)$$

l'unique solution de l'équation différentielle $x'(t) = F(t, x(t))$ prenant la valeur x_0 à l'instant t_0 .

Pour tous $x_0 \in \Omega$ et $t_0 \in I$ l'application

$$(t, s, x) \mapsto \varphi^{t, s}(x) \in \Omega$$

est définie sur un voisinage ouvert de (t_0, t_0, x_0) dans $I \times I \times \Omega$ et est lisse (par rapport aux trois variables). □

Théorème 4.3bis. (dépendance lisse par rapport aux conditions initiales, version variétés). Soient M variété et $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ champ de vecteurs qui dépend du temps. Pour $p_0 \in M$ et $t_0 \in \mathbb{R}$ on note

$$t \mapsto \varphi^{t, t_0}(p_0)$$

l'unique courbe intégrale de (X_t) prenant la valeur p_0 à l'instant t_0 .

Pour tous $p_0 \in M$ et $t_0 \in \mathbb{R}$ l'application

$$(t, s, x) \mapsto \varphi^{t, s}(x) \in M$$

est définie sur un voisinage ouvert de (t_0, t_0, p_0) dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times M$ et est lisse (par rapport aux trois variables). □

La manière de lire ce dernier théorème est la suivante : étant donné un point p_0 et un instant t_0 , les courbes intégrales passant par des points proches de p_0 à des instants proches de t_0 ont un intervalle commun de définition et varient dans une famille lisse.

4.2. Flots. Difféomorphismes. Redressement.

4.2.1. *Flot. Complétude.* Nous donnons maintenant la définition du flot d'un champ de vecteurs. Pour ne pas compliquer inutilement la notation en prenant en compte des domaines de définition variables, nous nous restreignons aux champs de vecteurs complets.

Définition 4.4. *Un champ de vecteurs est complet si toute courbe intégrale est définie sur \mathbb{R} .*

Définition 4.5. *Étant donné un champ de vecteurs complet $X \in \mathcal{X}(M)$, son flot est l'application*

$$\varphi_X : \mathbb{R} \times M \rightarrow M, \quad (t, p) \mapsto \varphi_X^t(p),$$

où $\varphi_X^t(p)$ est l'unique courbe intégrale qui passe par p à l'instant $t = 0$.

Étant donné un champ de vecteurs complet dépendant du temps $X = (X_t)$ sur une variété M , son flot à deux paramètres est l'application

$$\varphi_X : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times M, \quad (t, s, p) \mapsto \varphi_X^{t,s}(p),$$

où $\varphi_X^{t,s}(p)$ est l'unique courbe intégrale qui passe par p à l'instant $t = s$.

Un champ de vecteurs qui ne dépend pas du temps $X \in \mathcal{X}(M)$ peut être vu comme étant un champ dépendant du temps (X_t) avec $X_t \equiv X$. Alors $\varphi_X^t = \varphi_X^{t,0}$. Par ailleurs $\varphi_X^{t,s} = \varphi_X^{t-\tau, s-\tau}$, $\tau \in \mathbb{R}$. Ainsi, pour $X \in \mathcal{X}(M)$ le flot à un paramètre détermine de manière unique le flot à deux paramètres par la formule $\varphi_X^{t,s} = \varphi_X^{t-s,0} = \varphi_X^{t-s}$. Ceci justifie le fait que, pour les champs de vecteurs qui ne dépendent pas du temps, l'on considère uniquement le flot à un paramètre.

Le résultat suivant fournit un critère de complétude et montre que, dans le cas des variétés compactes, le fait de considérer des champs de vecteurs complets ne restreint aucunément le degré de généralité de la discussion. Étant donné un champ de vecteurs $X \in \mathcal{X}(M)$ on définit son *support* comme étant

$$\text{supp}(X) := \overline{\{p \in M : X(p) \neq 0\}}.$$

Étant donné un champ de vecteurs dépendant du temps $X = (X_t)$, on définit son support comme étant

$$\text{supp}(X) := \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \text{supp}(X_t).$$

Proposition 4.6. *Soit $X = (X_t)$ un champ de vecteurs dépendant du temps à support compact. Alors X est complet.*

En particulier, tout champ de vecteurs sur une variété compacte est complet.

Le plan de la preuve est le suivant. Nous argumentons par contradiction et montrons que toute courbe intégrale peut se prolonger au-delà d'une éventuelle borne finie de son intervalle maximal de définition. Pour cela il suffit de nous assurer qu'il existe une borne inférieure uniforme sur la taille de l'intervalle de définition de toute courbe intégrale.

Démonstration. Le théorème de dépendance lisse par rapport aux paramètres nous assure que, pour tout point $p_0 \in M$ et pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, il existe un voisinage ouvert $p_0 \in U$ et il existe $\epsilon > 0$ tels que la courbe intégrale $t \mapsto \varphi_X^{t,s}(p)$ soit définie sur $]s - \epsilon, s + \epsilon[$ pour tout $p \in U$ et $s \in]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[$.

Bien-sûr, lorsque $p_0 \notin \text{supp}(X)$ l'on peut prendre $U = \text{supp}(X)^c$ et $\epsilon = \infty$, toutes les courbes intégrales par p_0 étant constantes. Par ailleurs, le support de X étant compact, l'on peut le recouvrir par un nombre fini d'ouverts U comme ci-dessus si t_0 est fixé, ou bien si t_0 varie dans un compact. Nous obtenons :

Pour tout compact $K \subset \mathbb{R}$ il existe $\epsilon > 0$ tel que la courbe intégrale $t \mapsto \varphi_X^{t,s}(p)$ soit définie sur $]s - \epsilon, s + \epsilon[$ pour tout $s \in K$ et $p \in M$.

Supposons maintenant que $t \mapsto \gamma(t)$ est une courbe intégrale de X ayant un intervalle maximal de définition $I \subsetneq \mathbb{R}$. Pour fixer les idées l'on peut supposer que $I =]a, b[$ avec $-\infty \leq a < b < \infty$. Considérons un compact $K = [b - \eta, b + \eta]$ avec $\eta > 0$ assez petit pour que $a < b - \eta < b$ et choisissons $\epsilon > 0$ satisfaisant la condition ci-dessus et tel que $b - \eta < b - \frac{\epsilon}{2}$. La courbe intégrale

$$t \mapsto \varphi_X^{t, b - \frac{\epsilon}{2}}(\gamma(b - \frac{\epsilon}{2}))$$

coïncide avec $\gamma(t)$ en $t = b - \frac{\epsilon}{2}$, et par conséquent sur un voisinage de $b - \frac{\epsilon}{2}$. En même temps elle est définie sur un intervalle de taille 2ϵ centré en $b - \frac{\epsilon}{2}$. Cette courbe définit alors un prolongement de γ à $]a, b + \frac{\epsilon}{2}[$, ce qui contredit le choix de b . \square

Nous arrivons maintenant au résultat le plus important de cette section : le flot d'un champ de vecteurs est une famille de difféomorphismes.

Proposition 4.7 (propriétés du flot). *Soit $X = (X_t)$ un champ de vecteurs complet. Pour tous $t, s, \tau \in \mathbb{R}$ l'on a la relation*

$$\varphi_X^{t,s} \circ \varphi_X^{s,\tau} = \varphi_X^{t,\tau}, \quad \varphi_X^{s,s} = \text{Id}_M.$$

En particulier l'application

$$\varphi_X^{t,s} : M \rightarrow M, \quad p \mapsto \varphi_X^{t,s}(p)$$

est un difféomorphisme de M dont l'inverse est $\varphi_X^{s,t}$.

Lorsque X ne dépend pas du temps, on a de plus

$$\varphi_X^t \circ \varphi_X^s = \varphi_X^s \circ \varphi_X^t = \varphi_X^{t+s}.$$

En particulier l'application

$$\mathbb{R} \rightarrow \text{Diff}(M), \quad t \mapsto \varphi_X^t$$

est un morphisme de groupes. On dit que $t \mapsto \varphi_X^t$ est un groupe à 1 paramètre de difféomorphismes. L'inverse de φ_X^t est φ_X^{-t} .

Ce qu'il faut surtout retenir de cette proposition est que les champs de vecteurs sont un outil pour construire des difféomorphismes. À chaque fois que vous souhaitez construire un difféomorphisme, la première chose à essayer sera de l'obtenir comme flot au temps 1 (par exemple) d'un champ de vecteurs approprié.

Exercice 30. Donner un exemple de champ de vecteurs dépendant du temps dont le flot ne vérifie pas la relation de groupe à un paramètre de difféomorphismes.

Démonstration de la proposition 4.7. Toutes les affirmations sont immédiates à partir des définitions, sauf l'identité $\varphi_X^t \circ \varphi_X^s = \varphi_X^{t+s}$. Fixons $s \in \mathbb{R}$, $p \in M$. Nous allons montrer que les courbes

$$\gamma_1(t) := \varphi_X^t \circ \varphi_X^s(p), \quad \gamma_2(t) := \varphi_X^{t+s}(p), \quad t \in \mathbb{R}$$

coïncident en montrant qu'elles sont toutes les deux courbes intégrales du champ X . Puisqu'elles coïncident de manière évidente en $t = 0$, elles coïncident partout.

L'on a effectivement

$$\dot{\gamma}_1(t) = \frac{d}{dt} \varphi_X^t(\varphi_X^s(p)) = X(\varphi_X^t(\varphi_X^s(p))) = X(\gamma_1(t)),$$

et

$$\dot{\gamma}_2(t) = \frac{d}{dt} \varphi_X^{t+s}(p) = X(\varphi_X^{t+s}(p)) = X(\gamma_2(t)).$$

□

4.2.2. *Difféomorphismes.* On dit qu'une courbe $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \text{Diff}(M)$ est continue, respectivement lisse si l'application $\mathbb{R} \times M \rightarrow M$, $(t, p) \mapsto \gamma(t)(p)$ est continue, respectivement lisse. On dit qu'un difféomorphisme φ est *isotope à l'identité* s'il existe une application continue $\gamma : [0, 1] \rightarrow \text{Diff}(M)$ telle que $\gamma(0) = \text{Id}_M$ et $\gamma(1) = \varphi$. On note

$$\text{Diff}_0(M) \subset \text{Diff}(M)$$

l'ensemble des difféomorphismes de M qui sont isotopes à l'identité.

Exercice 31. Montrer que $\text{Diff}_0(M)$ est un sous-groupe distingué de $\text{Diff}(M)$. [C'est la composante connexe de l'identité dans la topologie compacte-ouverte sur $\text{Diff}(M)$.]

Le quotient $\text{Diff}(M)/\text{Diff}_0(M)$ s'appelle *groupe modulaire de M* (en anglais : *mapping class group*). C'est un groupe très important. Notons aussi le théorème suivant dû à Filipkiewicz (Ergodic Th. Dyn. Syst. 2 (1982), 159–171) : deux variétés connexes M et N sont difféomorphes si et seulement si $\text{Diff}_0(M)$ et $\text{Diff}_0(N)$ sont isomorphes.

Il se trouve que l'ensemble des difféomorphismes φ qui peuvent être obtenus comme flots de champs de vecteurs coïncide avec $\text{Diff}_0(M)$. Pour le démontrer il suffit de savoir que $\text{Diff}_0(M)$ est connexe par arcs lisses (ceci dépasse légèrement le cadre de notre discussion). Si φ_t , $t \in [0, 1]$ est une courbe lisse dans $\text{Diff}_0(M)$ qui relie Id_M à φ , alors φ_t est de manière tautologique le flot du champ de vecteurs défini par

$$X_t(\varphi_t(p)) := \frac{d}{dt}\varphi_t(p).$$

Voici maintenant un exemple d'application de la philosophie selon laquelle les champs de vecteurs sont des outils robustes pour construire des difféomorphismes.

Proposition 4.8. *Soit M une variété connexe. Le groupe $\text{Diff}_0(M)$ agit transitivement sur M , i.e.*

$$\forall p, q \in M, \exists \varphi \in \text{Diff}_0(M), \varphi(p) = q.$$

Dans l'exercice préliminaire ci-dessous, on dit qu'une courbe $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ est lisse si elle admet une extension lisse à un voisinage de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} . Plus généralement, étant donné un fermé $A \subset X$ dans une variété, on dit qu'une application $f : A \rightarrow Y$ vers une variété Y est lisse si elle admet une extension lisse à un ouvert $U \supseteq A$.

Exercice 32. Montrer que les affirmations suivantes sont équivalentes pour une variété M :

- (1) M est connexe ;
- (2) M est connexe par arcs ;
- (3) M est connexe par arcs lisses, i.e. pour tous $p, q \in M$ il existe une courbe lisse $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ telle que $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$;
- (4) M est connexe par arcs lisses qui sont des plongements.

Démonstration de la proposition 4.8. Choisissons une courbe lisse et injective $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ avec $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$. Puisque γ a un domaine de définition compact, elle admet une extension à un voisinage de $[0, 1] \subset \mathbb{R}$, notée encore γ , qui est un plongement. Nous allons construire un champ de vecteurs $X \in \mathcal{X}(M)$ à support compact tel que $X(\gamma(t)) = \dot{\gamma}(t)$. Alors $\varphi_X^t(\gamma(0)) = \gamma(t)$ et en particulier $\varphi_X^1(p) = q$.

Pour ce faire, nous allons construire X avec cette propriété localement au voisinage de chaque point $\gamma(t)$, et nous allons "recoller" ces champs de vecteurs locaux au moyen d'une partition de l'unité.

Pour chaque t dans le domaine de définition de (l'extension de) γ il existe une carte (U, ϕ) au voisinage de $\gamma(t)$ qui redresse $\text{im}(\gamma)$, i.e. $\phi(U \cap \text{im}(\gamma)) = \phi(U) \cap (\mathbb{R} \times \{0\})$. Le champ de vecteurs $\frac{d}{dt}\phi(\gamma(t))$ défini le long de $\text{im}(\phi \circ \gamma) \subset \mathbb{R} \times \{0\}$ détermine un unique champ de vecteurs indépendant des coordonnées (x_2, \dots, x_n) sur $\phi(U)$. Celui-ci correspond via ϕ à un champ de vecteurs $X \in \mathcal{X}(U)$ qui étend de manière lisse $\dot{\gamma}(t)$.

Recouvrons $\text{im}(\gamma)$ par un nombre fini de cartes (U_i, ϕ_i) qui redressent γ , avec des champs de vecteurs $X_i \in \mathcal{X}(U_i)$ qui étendent $\dot{\gamma}$ sur $\text{im} \gamma \cap U_i$. Considérons une partition de l'unité ρ_i subordonnée au recouvrement $M = \cup_i U_i \cup (M \setminus \text{im}(\gamma|_{[0,1]}))$. Une telle partition de l'unité est une collection de fonctions lisses $\{\rho_i, \rho\}$ avec $\text{supp}(\rho_i) \subset U_i$, $\text{supp}(\rho) \subset M \setminus \text{im}(\gamma|_{[0,1]})$, $0 \leq \rho_i, \rho \leq 1$ et $\rho + \sum_i \rho_i = 1$. Nous discutons l'existence générale d'un tel objet dans la section suivante §4.2.3.

Puisque $\text{supp}(\rho_i) \subset U_i$ le champ de vecteurs $\rho_i X_i$ se prolonge par zéro en un champ de vecteurs lisse sur M . Posons

$$X := \sum_i \rho_i X_i \in \mathcal{X}(M).$$

Ce champ de vecteurs convient puisqu'en tout point $\gamma(t)$ l'on a

$$X(\gamma(t)) = \sum_i \rho_i(\gamma(t)) X_i(\gamma(t)) = \sum_i \rho_i(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) = \left(\sum_i \rho_i \right) \dot{\gamma}(t) = \dot{\gamma}(t).$$

L'on utilise ici le fait que $\sum_i \rho_i(\gamma(t)) = 1$ pour tout $t \in [0, 1]$ puisque $\text{supp}(\rho) \cap \text{im}(\gamma|_{[0,1]}) = \emptyset$. \square

La preuve de cette proposition est très instructive : elle vous montre d'un côté une manière exemplaire de construire un difféomorphisme comme flot d'un champ de vecteurs, et d'un autre côté une manière exemplaire de recoller des objets définis localement en un objet global à l'aide d'une partition de l'unité.

4.2.3. Partitions de l'unité.

Nous avons rencontré dans la preuve de la proposition précédente la notion de partition lisse de l'unité. Nous donnons dans cette section la définition générale et démontrons un théorème d'existence. Nous rappelons que nous travaillons sous les hypothèses de *séparation* et de *base dénombrable* pour les variétés. Cette section fait naturellement suite à la section 1.6.

Définition 4.9. Soit (U_i) un recouvrement ouvert d'une variété M . Une partition de l'unité lisse subordonnée au recouvrement (U_i) est une famille de fonctions lisses

$$\rho_i : M \rightarrow [0, 1]$$

telle que la famille $\{\text{supp}(\rho_i)\}$ soit localement finie, i.e.

$$\forall K \subseteq M \text{ compact, } \#\{i : \text{supp}(\rho_i) \cap K \neq \emptyset\} < \infty$$

et

$$\sum_i \rho_i = 1.$$

Notons que la condition de finitude locale pour la famille des supports de ρ_i est essentiellement imposée pour assurer le fait que la somme $\sum_i \rho_i(p)$ est finie en chaque point $p \in M$.

Théorème 4.10 (existence des partitions de l'unité). *Soit (U_i) un recouvrement ouvert fini d'une variété M . Il existe une partition de l'unité lisse subordonnée à ce recouvrement.*

Démonstration. Ce résultat est essentiellement un corollaire de l'existence de fonctions de troncature lisses démontrée dans la section 1.6. En effet, l'on démontre qu'il existe des ouverts $V_i \subset U_i$ tels que $\{V_i\}$ soit un recouvrement de M et $\overline{V_i} \subset U_i$ (exercice!). Choisissons des fonctions de troncature lisses $f_i : M \rightarrow [0, 1]$ telles que $f_i|_{\overline{V_i}} = 1$ et $\text{supp}(f_i) \subset U_i$. L'on définit

$$\rho_i := f_i / \sum_j f_j.$$

La famille $\{\rho_i\}$ est alors la partition de l'unité recherchée. \square

Il existe un résultat analogue pour des recouvrements qui ne sont pas finis. Nous l'énonçons sans démonstration et renvoyons le lecteur intéressé au livre de Warner, *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*.

On dit qu'un recouvrement ouvert (V_j) est un *raffinement* d'un recouvrement ouvert (U_i) si $\forall j, \exists i, V_j \subseteq U_i$.

Théorème 4.11. *Soit (U_i) un recouvrement ouvert quelconque d'une variété M . Il existe un raffinement localement fini et une partition de l'unité lisse subordonnée à ce raffinement.* \square

Remarque. Un espace topologique ayant la propriété que tout recouvrement ouvert admet un raffinement localement fini est dit *paracompact*. Le théorème précédent contient en particulier l'énoncé suivant : une variété séparée et à base dénombrable est paracompacte.

4.2.4. *Redressement.* Toute la discussion que nous avons développé jusqu'à présent à propos des champs de vecteurs tourne autour de la notion de courbe intégrale. Le théorème qui suit affirme que, à un changement de variable près, les courbes intégrales au voisinage d'un point où le champ de vecteurs ne s'annule pas sont toutes standard.

Théorème 4.12 (redressement, ou forme normale au voisinage d'un point de non-annulation). Soit $X \in \mathcal{X}(M)$ et $p \in M$ tel que

$$X(p) \neq 0.$$

Il existe une carte (U, ϕ) , $\phi = (x^1, \dots, x^n)$ au voisinage de p telle que

$$X|_U = \frac{\partial}{\partial x^1}.$$

En particulier

$$\varphi_X^t(x^1, \dots, x^n) = (t + x^1, x^2, \dots, x^n).$$

Démonstration. Soit (V, ψ) , $\psi = (y^1, \dots, y^n)$ une carte quelconque au voisinage de p , avec $\psi(p) = 0$. Quitte à composer par un automorphisme linéaire au but, l'on peut supposer que $X(p) = \frac{\partial}{\partial y^1}|_p$ (égalité au point p , qui utilise la condition $X(p) \neq 0$). La carte ψ détermine en particulier une sous-variété T de dimension $n - 1$ transverse à la courbe intégrale par p , donnée par $T := \psi^{-1}(\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1} \cap \psi(V))$. (On la note T comme “tranche”, ou “transversale”. Le fait que T soit *transverse* en p à la courbe intégrale par p signifie que $T_p M = T_p T \oplus \mathbb{R}\langle X(p) \rangle$.)

Définissons

$$\chi(y^1, \dots, y^n) := \varphi_X^{y^1}(\psi^{-1}(0, y^2, \dots, y^n)).$$

(L'on suit les lignes de flot de X en nous appuyant sur T , Figure 3) L'on vérifie que $d\chi(0)$ est bijective : elle envoie le vecteur e_i de la base canonique dans \mathbb{R}^n sur $\frac{\partial}{\partial y^i}|_p$. C'est donc un difféomorphisme local. Par ailleurs χ envoie par définition les trajectoires du champ de vecteurs constant e_1 sur \mathbb{R}^n sur les lignes de flot de X . Ceci signifie que le difféomorphisme

$$\phi := \chi^{-1}$$

convient. □

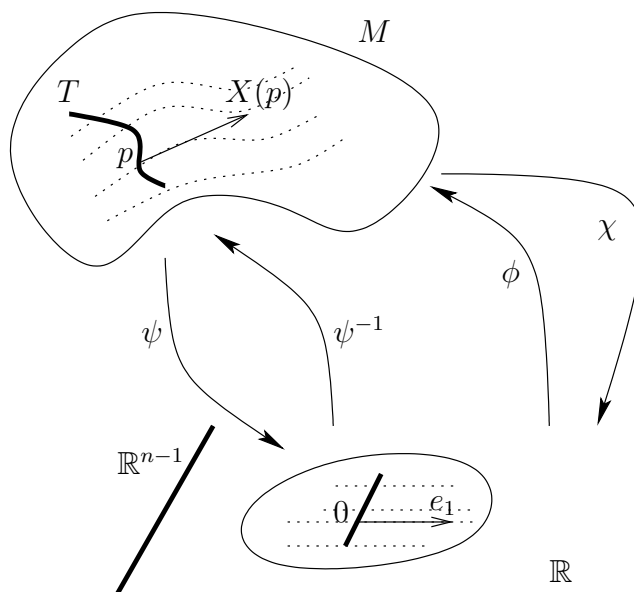


FIGURE 3. Redressement d'un champ de vecteurs au voisinage d'un point où il ne s'annule pas.

4.3. Crochet de Lie. Dérivée de Lie.

4.3.1. *Champs de vecteurs en tant que vecteurs tangents au groupe des difféomorphismes.* Soit M une variété connexe et $\text{Diff}(M)$ son groupe de difféomorphismes. Nous expliquons dans cette section l'identification

$$T_{\text{Id}}\text{Diff}(M) \cong \mathcal{X}(M).$$

Pour définir $T_{\text{Id}}\text{Diff}(M)$ nous procédons par analogie avec le cas des variétés de dimension finie – d'une certaine manière nous regardons $\text{Diff}(M)$ comme une variété de dimension infinie, quoique non modelée sur un espace de Banach, mais plutôt sur un espace de Fréchet. Ainsi, un vecteur tangent sera une classe d'équivalence de germes de courbes lisses à valeurs dans $\text{Diff}(M)$.

On dit qu'une courbe $\varphi :]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow \text{Diff}(M)$ est lisse si l'application $]-\epsilon, \epsilon[\times M \rightarrow M, (t, p) \mapsto \varphi_t(p)$ est lisse. Nous définissons une relation d'équivalence sur les germes de telles courbes φ tels que $\varphi_0 = \text{Id}$ de la manière suivante :

$$\varphi \sim \psi \Leftrightarrow \forall p \in M, \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\varphi_t(p) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\psi_t(p) \in T_pM.$$

Autrement dit, deux courbes dans $\text{Diff}(M)$ sont équivalentes si et seulement si leurs tendances infinitésimales de mouvement sont les mêmes en chaque point de la variété. Nous notons l'ensemble des classes d'équivalence de tels germes de courbes par $T_{\text{Id}}\text{Diff}(M)$ et l'appelons *espace tangent à $\text{Diff}(M)$ en l'identité*.

La correspondance bijective

$$T_{\text{Id}}\text{Diff}(M) \cong \mathcal{X}(M)$$

est donnée par

$$[\varphi] \mapsto \left\{ \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \varphi_t(p) : p \in M \right\} \in \mathcal{X}(M).$$

Son inverse associe à un champ de vecteurs X la classe d'équivalence de son flot $t \mapsto \varphi_X^t$ vu comme courbe dans $\text{Diff}(M)$:

$$X \mapsto [\varphi_X] \in T_{\text{Id}}\text{Diff}(M).$$

La question qui se pose naturellement est la suivante :

Est-ce que $\mathcal{X}(M)$ porte une structure algébrique canonique qui reflète la structure de groupe canonique sur $\text{Diff}(M)$?

La réponse est affirmative : $\mathcal{X}(M)$ porte une structure canonique d'algèbre de Lie réelle. Ceci reflète le principe général suivant :

L'analogie infinitésimal de la notion de groupe est la notion d'algèbre de Lie.

4.3.2. Crochet de Lie.

Définition 4.13. Soient $X, Y \in \mathcal{X}(M)$. Le crochet de Lie des champs de vecteurs X et Y est le champ de vecteurs

$$[X, Y] \in \mathcal{X}(M)$$

défini en tant que dérivation comme suit :

$$[X, Y]f := X(Yf) - Y(Xf), \quad f \in \mathcal{F}(M).$$

Le contenu de la définition est le suivant. Pour toute fonction $f \in \mathcal{F}(M)$ les dérivées directionnelles selon X , respectivement Y définissent des fonctions $Xf, Yf \in \mathcal{F}(M)$. Celles-ci sont dérivées à leur tour par rapport à Y , respectivement X . De manière équivalente, le crochet est défini en chaque point $p \in M$ par la relation

$$[X, Y]_p f := X_p(Yf) - Y_p(Xf), \quad p \in M, \quad f \in \mathcal{F}_p.$$

Le crochet définit bien une dérivation en chaque point $p \in M$:

$$\begin{aligned} [X, Y]_p(fg) &= X_p(Y(fg)) - Y_p(X(fg)) \\ &= X_p((Yf)g + f(Yg)) - Y_p((Xf)g + f(Xg)) \\ &= X_p(Yf) \cdot g(p) + Y_p f \cdot X_p g + X_p f \cdot Y_p g + f(p) \cdot X_p(Yg) \\ &\quad - Y_p(Xf) \cdot g(p) - X_p f \cdot Y_p g - Y_p f \cdot X_p g - f(p) \cdot Y_p(Xg) \\ &= [X, Y]_p f \cdot g(p) + f(p) \cdot [X, Y]_p g. \end{aligned}$$

Le fait que le crochet de Lie soit bien un champ de vecteurs lisse est une conséquence de son expression en coordonnées locales. Écrivons dans une carte locale

$$X = \sum_i X_i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Y = \sum_j Y_j \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Alors

$$\begin{aligned} [X, Y]_p f &= \sum_i X_i \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sum_j Y_j \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) - \sum_j Y_j \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\sum_i X_i \frac{\partial f}{\partial x^i} \right) \\ &= \sum_{i,j} X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} + X_i Y_j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - Y_j \frac{\partial X_i}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial x^i} - Y_j X_i \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} \\ &= \sum_{i,j} X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} - Y_j \frac{\partial X_i}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial x^i}, \quad \forall f \in \mathcal{F}_p \end{aligned}$$

de sorte que

$$[X, Y] = \sum_j \left(\sum_i X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x^i} - Y_j \frac{\partial X_i}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Proposition-Définition 4.14. *Soit M une variété. L'espace vectoriel $\mathcal{X}(M)$ muni du crochet de Lie*

$$[\cdot, \cdot] : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$$

est une algèbre de Lie sur \mathbb{R} . Ceci signifie que le crochet vérifie les axiomes suivants :

- (BILINÉARITÉ) *le crochet est bilinéaire sur \mathbb{R} ;*
- (ANTI-SYMMÉTRIE) *le crochet est anti-symétrique, i.e.*

$$[X, Y] = -[Y, X] ;$$

- (JACOBI) *le crochet vérifie la relation de Jacobi*

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

Démonstration. Vérification directe (mais instructive!). □

Exercice 33. Le crochet de Lie vérifie les deux propriétés de dérivation suivantes

$$[fX, Y] = f[X, Y] - Y(f)X,$$

$$[X, fY] = f[X, Y] + X(f)Y,$$

pour tous $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ et $f \in \mathcal{F}(M)$.

Il est important de noter que $[X, Y]_p$ ne dépend pas seulement des valeurs de X et Y en p , mais du comportement de X et Y au voisinage de p . De manière plus précise, le crochet dépend du comportement de X le long d'une courbe intégrale de Y par le point p , et du comportement de Y le long d'une courbe intégrale de X par p .

En particulier, si $\varphi : M \rightarrow N$ est une application lisse et si l'on note

$$\varphi_* := d\varphi,$$

pour tous deux champs de vecteurs $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ l'on peut parler du crochet $[\varphi_*X, \varphi_*Y]_{\varphi(p)}$. L'on a alors

$$[\varphi_*X, \varphi_*Y]_{\varphi(p)} = \varphi_*[X, Y]_p, \quad p \in M.$$

Cette formule est en particulier vraie lorsque φ est un difféomorphisme. Bien-sûr, dans ce cas elle n'exprime rien d'autre que l'invariance du crochet par changement de coordonnées. Pour démontrer la formule dans le cas général l'on choisit une fonction $f \in \mathcal{F}_{\varphi(p)}$ quelconque et l'on calcule

$$\begin{aligned} (\varphi_*[X, Y]_p)f &= [X, Y]_p(f \circ \varphi) \\ &= X_p(Y(f \circ \varphi)) - Y_p(X(f \circ \varphi)) \\ &= X_p((\varphi_*Yf) \circ \varphi) - Y_p((\varphi_*Xf) \circ \varphi) \\ &= \varphi_*X_{\varphi(p)}((\varphi_*Y)f) - \varphi_*Y_{\varphi(p)}((\varphi_*X)f) \\ &= [\varphi_*X, \varphi_*Y]_{\varphi(p)}f. \end{aligned}$$

4.3.3. *Dérivée de Lie, I.* Le crochet admet une formulation de nature géométrique en tant que dérivée de Lie. Nous l'expliquons dans cette section. Cette formulation présente plusieurs avantages : (1) elle nous permet de comprendre de manière précise en quel sens une algèbre de Lie est l'analogue linéaire d'un groupe ; (2) elle nous fournit un point de vue important sur le crochet en tant que mesure du défaut de commutation de deux flots ; (2bis) elle nous permet de comprendre le crochet comme défaut de fermeture de parallélogrammes infinitésimaux construits sur deux flots.

Nous avons besoin de deux définitions préliminaires.

Définition 4.15. *Soit $\varphi : M \rightarrow N$ un difféomorphisme.*

*Étant donné $X \in \mathcal{X}(M)$ on définit son poussé-en-avant par φ comme étant le champ de vecteurs $\varphi_*X \in \mathcal{X}(N)$ donné par (Figure 4)*

$$(\varphi_*X)_{\varphi(p)} := d\varphi(p)X_p,$$

ou encore

$$(\varphi_*X)_q := d\varphi(\varphi^{-1}(q))X_{\varphi^{-1}(q)},$$

ou encore

$$(\varphi_*X)_q = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi \circ \varphi_X^t \circ \varphi^{-1}(q).$$

*Étant donné $Y \in \mathcal{X}(N)$ on définit son tiré-en-arrière par φ comme étant le champ de vecteurs $\varphi^*Y \in \mathcal{X}(M)$ donné par (Figure 4)*

$$\varphi^*Y := (\varphi^{-1})_*Y,$$

ou encore

$$(\varphi^*Y)_p := d\varphi^{-1}(\varphi(p))Y_{\varphi(p)},$$

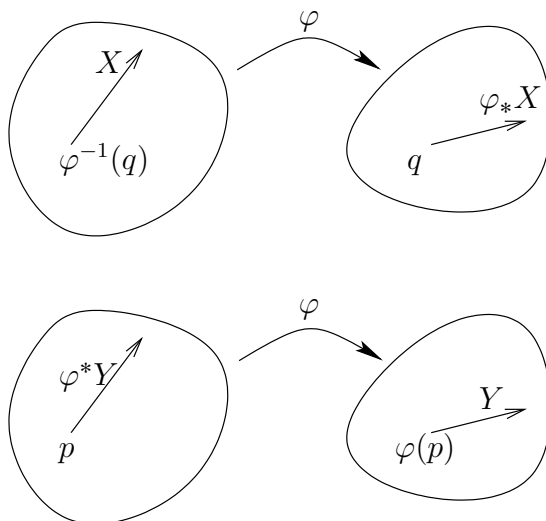


FIGURE 4. Poussé-en-avant et tiré-en-arrière de champs de vecteurs.

ou encore

$$(\varphi^*Y)_p = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \varphi^{-1} \circ \varphi_Y^t \circ \varphi(p).$$

Le lecteur pourra vérifier que ces deux opérations sont inverses l'une de l'autre :

$$\varphi_*\varphi^*Y = Y, \quad \varphi^*\varphi_*X = X.$$

Exercice 34. Soient φ et ψ deux difféomorphismes composables. Montrer que

$$(\varphi\psi)^* = \psi^*\varphi^*, \quad (\varphi\psi)_* = \varphi_*\psi_*.$$

Exercice 35. Montrer que le flot de φ_*X est conjugué au flot de X , et le flot de φ^*Y est conjugué au flot de Y . Plus précisément :

$$\varphi_{\varphi_*X}^t = \varphi \circ \varphi_X^t \circ \varphi^{-1}, \quad \varphi_{\varphi^*Y}^t = \varphi^{-1} \circ \varphi_Y^t \circ \varphi.$$

Exercice 36. Montrer que γ est une courbe intégrale de X si et seulement si $\varphi \circ \gamma$ est une courbe intégrale de φ_*X . Montrer que δ est une courbe intégrale de Y si et seulement si $\varphi^{-1} \circ \delta$ en est une pour φ^*Y .

Exercice 37. Montrer que $(\varphi_X^t)^*X = X$ et $(\varphi_X^t)_*X = X$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Justifier ceci par un dessin.

Nous avons déjà secrètement rencontré les opérations φ_* et φ^* sur les champs de vecteurs, par exemple lorsque nous avons démontré le théorème de redressement. Celui-ci peut être reformulé de la manière suivante : pour tout champ de vecteurs $X \in \mathcal{X}(M)$ et tout $p \in M$ tel que $X(p) \neq 0$, il existe un difféomorphisme sur image $\phi : U \xrightarrow{\cong} \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ défini au voisinage de p tel que $\phi_*X = e_1$, le champ de vecteurs constant égal à $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ sur $\phi(U)$ (ou encore $\phi^*e_1 = X$).

Ces opérations doivent être lues comme des opérations de transfert de structure (ici, des champs de vecteurs) entre variétés en utilisant des applications différentiables (ici, des difféomorphismes). De manière générale, les opérations de ce type sont très importantes à l'intérieur de n'importe quelle théorie.

Définition 4.16. Soient $X, Y \in \mathcal{X}(M)$. La dérivée de Lie de Y dans la direction X est définie comme

$$L_X Y := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\varphi_X^t)^* Y.$$

Le contenu de la définition est le suivant. Pour tout point $p \in M$ l'on considère la courbe dans $T_p M$ donnée par $t \mapsto ((\varphi_X^t)^* Y)_p$. La dérivée de cette courbe en $t = 0$ est identifiée à un élément de $T_p M$, que l'on appelle *dérivée de Lie au point p* et que l'on note $(L_X Y)_p$. Il découle par ailleurs directement de la définition que

$$(4.1) \quad L_X Y = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \varphi_X^{-t} \varphi_Y^s \varphi_X^t.$$

Exercice 38. Montrer que l'on a l'identité

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} (\varphi_X^t)^* Y = (\varphi_X^{t_0})^* L_X Y.$$

La dérivée de Lie est une opération fondamentale de dérivation sur une variété. Elle s'étend aux formes différentielles et aux tenseurs de type quelconque, comme nous le verrons plus tard.

Proposition 4.17. Pour tous $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ l'on a

$$L_X Y = [X, Y].$$

Démonstration. Pour alléger la notation on pose $\varphi^t := \varphi_X^t$ et $\psi^t := \varphi_Y^t$. Nous calculons successivement pour $f \in \mathcal{F}_p$:

$$\begin{aligned} (L_X Y)_p f &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} f \circ \varphi^{-t} \psi^s \varphi^t(p) \\ &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f \circ \varphi^{-t} \psi^s \varphi^t(p) \\ &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \left(- (Xf) \circ \psi^s(p) + \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f \circ \psi^s \varphi^t(p) \right) \\ &= -Y_p(Xf) + \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} f \circ \psi^s \varphi^t(p) \\ &= -Y_p(Xf) + \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (Yf) \circ \varphi^t(p) \\ &= -Y_p(Xf) + X_p(Yf). \end{aligned}$$

Dans la quatrième égalité nous utilisons le fait que, si $F(\sigma, \tau)$ est une fonction dérivable de deux variables réelles, alors $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F(-t, t) = -\frac{\partial F}{\partial \sigma}(0, 0) + \frac{\partial F}{\partial \tau}(0, 0)$. \square

L'identité $L_X Y = [X, Y]$ entraîne le fait que la valeur de $L_X Y$ en un point p ne dépend que des valeurs de X sur une courbe intégrale de Y par p , respectivement des valeurs de Y sur une courbe intégrale de X par p . L'on a par ailleurs

$$L_{fX} Y = fL_X Y - Y(f)X, \quad L_X(fY) = fL_X Y + X(f)Y.$$

Avertissement : $L_X Y$ ne dépend pas que de la valeur de X au point p , mais bien du comportement de X le long d'une courbe intégrale de Y : la formule implique bien des dérivées des coefficients de X dans une carte locale. De même pour Y .

Exercice 39. Démontrer l'identité

$$-[X, Y] = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\varphi_X^t)^* Y.$$

4.3.4. *Crochet de Lie comme défaut de commutation de flots.* La proposition 4.17 implique le corollaire suivant.

Corollaire 4.18. Avec la notation $\psi^s = \varphi_Y^s$, $\varphi^t = \varphi_X^t$, l'on a :

$$[X, Y] = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \psi^{-s} \varphi^{-t} \psi^s \varphi^t.$$

Démonstration. En utilisant la dernière formule dans la définition de $(\varphi^t)^* Y$ on obtient

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \psi^{-s} \varphi^{-t} \psi^s \varphi^t(p) = -Y(p) + ((\varphi^t)^* Y)_p,$$

d'où le résultat, puisque le terme $-Y(p)$ s'annule après dérivation. \square

La quantité $\varphi^{-t} \psi^s \varphi^t$, qui était déjà apparue dans la preuve de la proposition 4.17 comme conséquence de la définition de la dérivée de Lie, est maintenant mise en contexte : elle n'était qu'un avatar de la quantité $\psi^{-s} \varphi^{-t} \psi^s \varphi^t$, que l'on appelle *commutateur* des éléments $\varphi^t, \psi^s \in \text{Diff}(M)$. Pour tout groupe G l'on définit le commutateur de deux éléments $g, h \in G$ comme $[g, h] := h^{-1}g^{-1}hg$. Il est clair que g et h commutent si et seulement si $[g, h] = 1$. Avec cette notation l'on peut écrire

$$[X, Y] = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} [\varphi^t, \psi^s].$$

Proposition 4.19. On note $\varphi^t := \varphi_X^t$ et $\psi^s := \varphi_Y^s$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :

- (1) $[X, Y] = 0$;
- (2) $(\varphi^t)^* Y = Y, \forall t$;
- (3) $(\psi^s)^* X = X, \forall s$;
- (4) $[\varphi^t, \psi^s] = 0, \forall s, t$, i.e. les flots de X et Y commutent.

Démonstration. (1) \Leftrightarrow (2). Le crochet $[X, Y]$ est nul si et seulement si $L_X Y = 0$. Par l'exercice 38 ceci équivaut à l'annulation de $\frac{d}{dt}(\varphi^t)^* Y$, donc au fait que $(\varphi^t)^* Y$ est indépendant du temps et donc égal à Y .

(1) \Leftrightarrow (3) se démontre de la même manière, ou bien découle de ce qui précède par anti-symétrie du crochet.

(2) \Leftrightarrow (4) Deux champs de vecteurs coïncident si et seulement si leurs flots coïncident. Or le flot de $(\varphi^t)^* Y$ est $s \mapsto \varphi^{-t} \psi^s \varphi^t$, alors que le flot de Y est $s \mapsto \psi^s$. \square

Pour clôturer cette section mentionnons la conséquence géométrique suivante du corollaire 4.18. C'est l'interprétation du crochet en tant que "défaut de fermeture de parallélogrammes infinitésimaux" annoncé en début de section.

Proposition 4.20. *On a*

$$[X, Y] = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_Y^{-\sqrt{t}} \varphi_X^{-\sqrt{t}} \varphi_Y^{\sqrt{t}} \varphi_X^{\sqrt{t}}.$$

Démonstration. Notons encore $\varphi^t := \varphi_X^t$ et $\psi^s := \varphi_Y^s$. À p fixé l'on considère la fonction

$$F : (s, t) \mapsto \psi^{-s} \varphi^{-t} \psi^s \varphi^t(p).$$

L'on a

$$\frac{\partial F}{\partial s}(0, 0) = \frac{\partial F}{\partial t}(0, 0) = \frac{\partial^2 F}{\partial s^2}(0, 0) = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(0, 0) = 0.$$

En combinaison avec le calcul du corollaire 4.18, ceci implique le fait que, dans des coordonnées locales euclidiennes induites par une carte quelconque, l'on a

$$(4.2) \quad F(s, t) = p + st[X, Y]_p + o(\|(s, t)\|^2).$$

La conclusion de la proposition en découle directement. \square

DIGRESSION : ALGÈBRES DE LIE ET GROUPES.

Nous avons déjà mentionné le fait que la notion d'algèbre de Lie est l'analogue linéaire de la notion de groupe. Nous pouvons maintenant préciser cette analogie, qui fournit une motivation pour l'étude des groupes de Lie.

Une algèbre de Lie consiste en la donnée de deux objets : un espace vectoriel V et un crochet de Lie $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V$. L'on pense à l'algèbre de Lie comme étant l'espace tangent à un groupe G au point $e \in G$. Ainsi, l'espace vectoriel V constitue un modèle local pour le groupe en tant que variété. Mais qu'en est-il de la loi de groupe ?

La loi de groupe peut être pensée comme étant une déformation de la loi de groupe abélien induite par ce modèle local. En prenant ce

point de vue, le crochet mesure la non-trivialité de cette déformation au premier ordre significatif. De manière équivalente, le crochet mesure le défaut de commutativité au premier ordre significatif. Ce point de vue est illustré par la formule (4.2).

La proposition 4.19 semble indiquer que, lorsque le groupe G n'est pas abélien, le crochet n'est pas identiquement nul. Ceci est vrai, mais très surprenant : il pourrait en principe y avoir des déformations de la structure de groupe abélien qui sont nulles au premier ordre significatif, mais qui sont néanmoins non-triviales. Il n'en est rien. Il se trouve que la fonction F dans (4.2) admet un développement de Taylor dans lequel tous les coefficients s'expriment comme crochets itérés de X et Y . C'est une instance de la fameuse formule de Baker-Campbell-Hausdorff en théorie des groupes de Lie.

De la même manière, si le crochet est identiquement nul alors le groupe G est abélien et sa loi de groupe est donnée localement au voisinage de l'identité par la loi de groupe abélien sur l'espace vectoriel V sous-jacent à l'algèbre de Lie.

FIN DE LA DIGRESSION

4.4. Groupes de Lie et algèbres de Lie. Le but de cette section est d'illustrer les concepts de champ de vecteurs, flot, crochet de Lie, poussé-en-avant et tiré-en-arrière dans le cas important des groupes de Lie. Nous donnons par ailleurs dans le §4.4.2 un aperçu rapide la théorie générale des groupes de Lie.

4.4.1. *Notions de base.* Soit G un groupe de Lie, c'est-à-dire une variété lisse munie d'une structure de groupe telle que la multiplication $G \times G \rightarrow G$, $(g, h) \mapsto gh$ et l'inversion $G \rightarrow G$, $g \mapsto g^{-1}$ soient des opérations lisses. On note $e \in G$ l'élément neutre.

Le groupe G agit sur lui-même par *translations à gauche*

$$g \cdot h := gh, \quad g \in G, h \in G.$$

L'on note $L_g : G \rightarrow G$, $h \mapsto gh$ le difféomorphisme de G induit par l'élément $g \in G$. Ainsi, l'action par translations à gauche s'identifie au morphisme de groupes $G \rightarrow \text{Diff}(G)$, $g \mapsto L_g$.

Définition 4.21. *Un champ de vecteurs $V \in \mathcal{X}(G)$ est dit invariant à gauche si*

$$\forall g \in G, (L_g)_* V = V.$$

Remarque. Cette définition est à contraster avec le fait que sur une variété arbitraire il n'existe pas de moyen de mettre en évidence des classes remarquables de champs de vecteurs. Par contre, sur une variété munie de structure supplémentaire, telle un groupe de Lie, les champs de vecteurs compatibles avec la structure fournissent l'une des clés d'étude de la variété en question. Ce sera le cas avec les champs invariants à gauche.

Dans cette section nous allons étudier les notions développées dans les sections précédentes dans le cas des champs de vecteurs invariants à gauche.

L'ensemble des champs de vecteurs invariants à gauche forme un sous-espace vectoriel de $\mathcal{X}(G)$, que l'on note \mathcal{X}^G . La définition implique qu'un champ de vecteurs $V \in \mathcal{X}^G$ est uniquement déterminé par sa valeur en $e \in G$ via la relation

$$V_g = dL_g(e)V_e, \quad g \in G.$$

Réciproquement, cette relation définit un champ de vecteurs invariant à gauche à partir d'un vecteur arbitraire $V_e \in T_e G$. Nous obtenons donc :

Proposition 4.22. *L'évaluation*

$$\mathcal{X}^G \rightarrow T_e G, \quad V \mapsto V_e$$

est un isomorphisme linéaire. L'application réciproque est

$$T_e G \rightarrow \mathcal{X}^G, \quad X \mapsto \tilde{X}, \quad \tilde{X}_g := dL_g(e)X.$$

□

Corollaire 4.23. *La dimension de l'espace vectoriel \mathcal{X}^G des champs de vecteurs invariants à gauche est égale à $\dim G$.* □

Exercice 40. Un champ de vecteurs $V \in \mathcal{X}^G$ est identiquement nul si et seulement si il s'annule en un point $g \in G$.

Exemple. Soit $G = (\mathbb{R}, +)$. C'est une groupe de Lie de dimension 1. Un champ de vecteurs V est invariant à gauche si et seulement si $(L_x)_*V = V$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Or $((L_x)_*V)_y = dL_x(L_x^{-1}(y))V_{L_x^{-1}(y)} = dL_x(y-x)V_{y-x} = V_y$. La dernière égalité utilise le fait que l'espace tangent à \mathbb{R} en tout point s'identifie canoniquement à \mathbb{R} , et le fait que la différentielle d'une translation est égale à l'identité via cette identification. Ainsi V est invariant à gauche si et seulement si il est constant $V = cte \frac{\partial}{\partial x}$, où x est la coordonnée canonique sur \mathbb{R} .

Les champs invariants à gauche peuvent être vus comme généralisant les champs constants sur un espace vectoriel. L'on peut donner un sens précis à ce point de vue.

Proposition 4.24. *Le fibré tangent à un groupe de Lie est canoniquement trivial.*

Démonstration. Soit G un groupe de Lie. L'on a un isomorphisme de fibrés entre TG et le fibré trivial $G \times T_eG$ de fibre G , défini par

$$\Phi : G \times T_eG \xrightarrow{\cong} TG, \quad (g, X) \mapsto dL_g(e)X.$$

L'inverse de Φ envoie $\xi \in T_gG$ sur $(g, dL_{g^{-1}}(g)\xi)$. □

Exercice 41. Un champ de vecteurs sur G est invariant à gauche si et seulement si c'est l'image par Φ d'une section constante du fibré trivial $G \times T_eG$.

Exemples. Les fibrés TS^1, TS^3, TS^7 sont triviaux. Les sphères S^1 et S^3 sont des groupes de Lie, en tant que sphères unité dans \mathbb{C} , respectivement dans le corps des quaternions \mathbb{H} . La sphère S^7 est la sphère unité dans \mathbb{O} , le "corps" des octonions. Celui-ci est un espace vectoriel normé de dimension 8 muni d'une multiplication qui n'est pas commutative, ni associative. Le manque d'associativité fait que la structure multiplicative induite sur S^7 n'est pas une structure de groupe. Néanmoins, elle peut être utilisée pour trivialisier TS^7 .

Remarque. L'on peut montrer que S^0, S^1, S^3 et S^7 sont les seules sphères qui sont parallélisables (Bott-Milnor 1958, Kervaire 1958). Par ailleurs, l'on peut montrer – et c'est plus facile – que les seules sphères qui admettent des structures de groupes de Lie sont S^0, S^1 et S^3 (cf. <http://math.stackexchange.com/questions/12453/>).

Nous passons maintenant à l'étude de la complétude des champs de vecteurs invariants à gauche. Lorsque le groupe de Lie G est non-compact le support d'un champ de vecteurs invariant à gauche non-nul est non-compact. Le critère de complétude donné à la section 4.2 ne s'applique donc pas. Néanmoins, nous avons le résultat suivant.

Proposition 4.25. *Tout champ de vecteurs invariant à gauche est complet.*

Nous allons utiliser dans la preuve la notation suivante :

$$g_* := dL_g.$$

Démonstration. Soit $V \in \mathcal{X}^G$ et notons $\varphi := \varphi_V$ son flot, avec $t \mapsto \varphi^t(g)$ définie localement au voisinage de zéro pour tout $g \in G$.

Affirmation : Pour $g \in G$ et $t \in \mathbb{R}$ de module assez petit l'on a

$$\varphi^t(g) = g\varphi^t(e).$$

Preuve de l'affirmation : la courbe $\delta(t) := g\varphi^t(e)$ vérifie

$$\dot{\delta}(t) = g_*(V(\varphi^t(e))) = V(g\varphi^t(e)) = V(\delta(t)),$$

avec $\delta(0) = g$. C'est donc la courbe intégrale du champ V par le point g et elle coïncide nécessairement avec $\varphi^t(g)$. \square

Il s'ensuit que, pour $g \in G$ et $t, s \in \mathbb{R}$ de module assez petit l'on a

$$\varphi^{t+s}(g) = g\varphi^s(e)\varphi^t(e),$$

et en particulier

$$\varphi^{t+s}(e) = \varphi^t(e)\varphi^s(e).$$

Ceci suggère de définir, pour $t \in \mathbb{R}$ et $N \gg 0$ assez grand (tel que t/N appartienne au voisinage de zéro où $\varphi^{\frac{t}{N}}(e)$ est défini), la courbe

$$\gamma(t) := g(\varphi^{\frac{t}{N}}(e))^N.$$

La relation $\varphi^{t+s}(e) = \varphi^t(e)\varphi^s(e)$, valable pour t et s assez petits, implique le fait que la définition ne dépend pas du choix de $N \gg 0$ (exercice!). Bien-sûr, lorsque $t \rightarrow \infty$ nous sommes obligés de choisir $N \rightarrow \infty$.

Notons $g_k = (\varphi^{\frac{t}{N}}(e))^k$, $k = 0, \dots, N$ avec $g_0 := e$, de sorte que $g_k g_{N-k} = g_N$ pour tout k . La courbe γ est lisse et vérifie $\gamma(0) = g$ et

$$\dot{\gamma}(t) = \sum_{k=0}^{N-1} g_* g_{k*} \frac{1}{N} V(g_{N-k}) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N} V(g g_k g_{N-k}) = V(\gamma(t)).$$

Il s'ensuit que γ est la courbe intégrale de V par g . Puisqu'elle est définie sur \mathbb{R} et $g \in G$ est arbitraire, on en déduit que V est complet. \square

Nous passons maintenant à la description des flots de champs de vecteurs invariants à gauche.

Remarque 4.26. Soit $V \in \mathcal{X}^G$. La relation

$$\varphi_V^t(g) = g\varphi_V^t(e),$$

qui était au cœur de la preuve ci-dessus, vaut pour tout $t \in \mathbb{R}$ et peut être reformulée de manière plus conceptuelle comme suit. Considérons l'anti-homomorphisme de groupes $R : G \rightarrow \text{Diff}(G)$, $g \mapsto R_g : h \mapsto hg$ (on appelle R_g translation à droite, et la terminologie "anti-homomorphisme" désigne le fait que $R(g_1g_2) = R(g_2)R(g_1)$). Nous avons alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\varphi_V} & \text{Diff}(G) \\ & \searrow \varphi_V(e) & \nearrow R \\ & & G \end{array}$$

Autrement dit, le groupe à 1 paramètre dans $\text{Diff}(G)$ donné par φ_V factorise par le groupe à 1 paramètre dans G donné par $\varphi_V(e)$.

Définition 4.27. Un groupe à un paramètre dans G est un morphisme lisse de groupes

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow G.$$

De manière équivalente, on demande que la relation suivante soit satisfaite :

$$\varphi^{t+s} = \varphi^t \varphi^s = \varphi^s \varphi^t, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Proposition 4.28. Pour tout groupe à un paramètre φ dans G il existe un unique champ de vecteurs invariant à gauche V tel que

$$\varphi = \varphi_V(e).$$

Démonstration. L'unicité découle de ce que V est uniquement déterminé par V_e , qui doit nécessairement être égal à $\frac{d}{dt}|_{t=0}\varphi^t$.

Pour l'existence on définit V comme étant l'unique champ de vecteurs invariant à gauche tel que $V_e = \frac{d}{dt}|_{t=0}\varphi^t$. Puisque $\frac{d}{dt}|_{t=t_0}\varphi^t = \frac{d}{ds}|_{s=0}\varphi^{t_0+s} = \frac{d}{ds}|_{s=0}\varphi^{t_0}\varphi^s = \varphi_*^{t_0}V_e = V_{\varphi^{t_0}}$, l'on déduit que φ^t est la courbe intégrale de V telle que $\varphi^0 = e$, de sorte que $\varphi = \varphi_V(e)$. \square

Corollaire 4.29. Pour tout $X \in T_e G$ il existe un unique groupe à un paramètre φ dans G tel que

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}\varphi^t = X.$$

Démonstration. L'unicité découle de ce que φ^t est nécessairement une courbe intégrale par e pour le champ de vecteurs invariant à gauche \tilde{X} qui étend X . L'existence découle de l'existence de cette courbe intégrale et de la complétude de \tilde{X} . \square

Remarque. La condition de lissité dans la définition d'un groupe à 1 paramètre dans G est superflue : il suffirait d'imposer la continuité, dans quel cas on peut démontrer que φ est nécessairement lisse (cf. Warner, *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*).

Définition 4.30. Soit G un groupe de Lie. L'application exponentielle de G est définie par

$$\exp : T_e G \rightarrow G, \quad \exp(X) = \varphi_{\tilde{X}}^1(e),$$

où $\tilde{X} \in \mathcal{X}^G$ est l'unique champ de vecteurs invariant à gauche tel que

$$\tilde{X}_e = X.$$

Exercice 42. Montrer l'identité

$$\exp(tX) = \varphi_{\tilde{X}}^t(e), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ainsi $t \mapsto \exp(tX)$ est l'unique groupe à 1 paramètre dans G dont la dérivée en 0 vaut $X \in T_e G$.

L'application exponentielle est lisse (dépendance lisse du flot d'un champ de vecteurs par rapport aux paramètres) et vérifie

$$\exp(0) = e.$$

Proposition 4.31 (Premier théorème de Lie). *L'application exponentielle de G est un difféomorphisme local en 0.*

Démonstration. L'identité $\exp(tX) = \varphi_{\tilde{X}}^t(e)$ implique

$$d\exp(e)X = X.$$

Ainsi $d\exp(e) : T_e G \rightarrow T_e G$ est l'identité et on conclut par le théorème d'inversion locale. \square

La motivation pour la terminologie "exponentielle" est fournie par le cas des groupes de matrices. L'on rappelle que, pour une matrice $A \in M(n, \mathbb{R})$, on définit son exponentielle e^A par la formule

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Proposition 4.32. Soit $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Pour tout $A \in M(n, \mathbb{R}) = T_{\mathrm{Id}}\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ l'on a

$$\exp(A) = e^A.$$

Démonstration. Il découle de la définition que $t \mapsto e^{tA}$, $t \in \mathbb{R}$ est un groupe à un paramètre dans $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, dont la dérivée en 0 vaut A . On conclut par l'unicité du groupe à un paramètre dont la dérivée en 0 est fixée. \square

Nous étudions maintenant le crochet de Lie en relation avec les champs de vecteurs invariants à gauche.

Proposition-Définition 4.33. *L'espace \mathcal{X}^G des champs de vecteurs invariants à gauche est invariant par crochet de Lie.*

On appelle $T_e G$ muni du crochet induit via l'isomorphisme $\mathcal{X}^G \cong T_e G$ l'algèbre de Lie du groupe G . On la note

$$\text{Lie}(G),$$

ou encore

$$\mathfrak{g} := \text{Lie}(G).$$

Démonstration. Soient $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathcal{X}^G$. Pour tout $g \in G$ nous avons

$$g_*[\tilde{X}, \tilde{Y}] = [g_*\tilde{X}, g_*\tilde{Y}] = [\tilde{X}, \tilde{Y}],$$

de sorte que $[\tilde{X}, \tilde{Y}] \in \mathcal{X}^G$. \square

Proposition 4.34. *Soient $X, Y \in \mathfrak{g}$. Nous avons*

$$[X, Y] = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \exp(tX) \exp(sY) \exp(-tX).$$

Démonstration. C'est une conséquence directe du fait que le crochet de Lie sur les champs de vecteurs est égal à la dérivée de Lie, combiné avec l'équation (4.1) et le fait que les flots vus comme éléments de G agissent par multiplication à droite (Remarque 4.26). \square

Corollaire 4.35. *Le crochet de Lie sur $\mathfrak{gl}_n := T_{\text{Id}}GL(n, \mathbb{R}) \cong M(n, \mathbb{R})$ est donné par le commutateur des matrices, i.e.*

$$[X, Y] = XY - YX.$$

Démonstration. La formule précédente fournit

$$\begin{aligned} [X, Y] &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} e^{tX} e^{sY} e^{-tX} \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} e^{tX} Y e^{-tX} \\ &= XY - YX. \end{aligned}$$

\square

Proposition 4.36. *Un groupe de Lie G connexe est commutatif si et seulement si le crochet de Lie sur $\text{Lie}(G)$ est identiquement nul.*

Démonstration. Montrons que $[\cdot, \cdot] = 0$ si et seulement si

$$gh = hg$$

pour tous g, h dans un voisinage de l'élément neutre $e \in G$.

Nous avons vu que $\exp : T_e G \rightarrow G$ est un difféomorphisme local en 0. Si G est commutatif au voisinage de e , alors la proposition 4.34 implique

directement que le crochet est nul. Réciproquement, si le crochet est nul la proposition 4.19 nous assure que les flots de deux champs de vecteurs invariants à gauche arbitraires commutent. L'on conclut alors par surjectivité de \exp sur un voisinage ouvert de $e \in G$.

Montrons maintenant que G est commutatif si et seulement si il existe un voisinage ouvert de l'identité dont les éléments commutent. Pour cela, il suffit de montrer l'affirmation suivante :

Soit $e \in V \subset G$ ouvert fixé. Pour tout $g \in G$ il existe $n \geq 1$ et $g_1, \dots, g_n \in V$ tels que $g = g_1 \dots g_n$.

Pour la preuve, nous montrons que l'ensemble \mathcal{G} des éléments qui satisfont cette condition est non-vide, ouvert et fermé. Le fait qu'il soit non-vide est immédiat à partir de la définition. Le fait qu'il soit ouvert découle de ce que L_g est un difféomorphisme pour tout g . En effet, si $g = g_1 \dots g_n$ avec $g_1, \dots, g_n \in V$, l'ensemble $L_g(V)$ est un ouvert autour de g et tout élément de cet ouvert s'écrit par définition $g' = g\bar{g} = g_1 \dots g_n \bar{g}$, avec $\bar{g} \in V$. Le fait qu'il soit fermé se démontre de manière similaire : si $g^\nu \rightarrow g$, $\nu \rightarrow \infty$ avec $g^\nu \in \mathcal{G}$, il existe ν assez grand tel que $g^\nu \in L_g(V)$ et g^ν suffisamment proche de g , de sorte que $g^\nu = g\bar{g}$ avec $\bar{g} \in V$ suffisamment proche de e . Il s'ensuit que $\bar{g}^{-1} \in V$ et donc $g = g^\nu \bar{g}^{-1} \in \mathcal{G}$. \square

Cette proposition clôt le parallèle entre groupes de Lie et la discussion de la section 4.3. Dans ce qui suit nous donnons quelques aperçus de la théorie générale des groupes de Lie.

4.4.2. Aperçu de la théorie générale des groupes de Lie.

GUIDE DE LECTURE POUR CETTE SECTION. Le seul résultat que nous démontrons en détail dans cette section est la proposition 4.38. Vous pouvez par ailleurs démontrer tous seuls les affirmations contenues dans la partie qui traite de la représentation adjointe. Les parties concernant la formule de Baker-Campbell-Hausdorff, la correspondance entre groupes de Lie et algèbres de Lie, et la théorie des représentations, doivent être lues comme des digressions/ouvertures. Vous pourrez par ailleurs revenir dessus plus tard.

La proposition 4.36 montre que le crochet de Lie sur $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$ est une mesure du défaut de commutativité du groupe G . Comme nous l'avons déjà discuté, le crochet est une quantité qui mesure ce défaut de commutativité au premier ordre significatif. Le fait surprenant est que, en fait, le crochet détermine entièrement la loi de groupe si G est connexe ! C'est le contenu de la formule de Baker-Campbell-Hausdorff, que je considère comme étant l'une des plus belles formules des mathématiques, et que j'explique plus bas.

Représentation adjointe. Le groupe G agit sur lui-même par conjugaison

$$G \times G \rightarrow G, \quad g \cdot h := ghg^{-1}.$$

On note $C_g \in \text{Diff}(G)$ le difféomorphisme $h \mapsto ghg^{-1}$, de sorte que l'action ci-dessus se traduit en un morphisme de groupes

$$C : G \rightarrow \text{Diff}(G), \quad g \mapsto C_g.$$

Cette action fixe l'élément neutre $e \in G$.

La *représentation adjointe de G sur \mathfrak{g}* est le morphisme de groupes de Lie

$$\text{Ad} : G \rightarrow GL(\mathfrak{g}), \quad g \mapsto dC_g(e).$$

La *représentation adjointe de \mathfrak{g} sur \mathfrak{g}* est le morphisme d'algèbres de Lie

$$\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) = \text{End}(\mathfrak{g}), \quad X \mapsto \text{ad}_X, \quad \text{ad}_X(Y) := [X, Y].$$

L'on vérifie que la relation

$$\text{ad}_{[X, Y]} = [\text{ad}_X, \text{ad}_Y]$$

est en fait équivalente à l'identité de Jacobi sur \mathfrak{g} . L'on vérifie par ailleurs de manière similaire à la preuve du corollaire 4.35 que

$$\text{ad}_X = d\text{Ad}(e) \cdot X.$$

En particulier, l'unicité du groupe à un paramètre tangent à un vecteur donné implique l'identité fondamentale $\text{Ad}(\exp(tX)) = \exp(t\text{ad}_X)$, $t \in \mathbb{R}$, $X \in \mathfrak{g}$, ou encore

$$\text{Ad} \circ \exp = \exp \circ \text{ad}.$$

Il est par ailleurs vrai en toute généralité que la dérivée en l'identité d'un morphisme de groupes de Lie est un morphisme d'algèbres de Lie, cf. plus bas.

Formule de Baker-Campbell-Hausdorff. Étant donnés des voisinages $0 \in U \subset \mathfrak{g}$ et $e \in V \subset G$ tels que $\exp : U \xrightarrow{\simeq} V$ soit un difféomorphisme, on note

$$\ln := \exp^{-1} : V \xrightarrow{\simeq} U.$$

Théorème 4.37 (Formule de Baker-Campbell-Hausdorff). *Pour $X, Y \in \mathfrak{g}$ proches de 0, on a*

$$\ln(\exp X \exp Y) = X + \int_0^1 F(e^{\text{ad}_X} e^{t\text{ad}_Y})(Y) dt,$$

où

$$F(z) = \frac{z \ln z}{z - 1}, \quad |z - 1| < 1.$$

Ici il faut comprendre F comme étant une fonction bien définie et holomorphe dans le disque $\{|z - 1| < 1\}$, admettant un développement en série entière $F(z) = \sum_{m \geq 0} a_m (z - 1)^m$. Pour l'expression intégrale ci-dessus la variable z dans cette série entière est remplacée par $e^{\text{ad}_X} e^{\text{ad}_Y}$, regardé en tant qu'endomorphisme de \mathfrak{g} . Le lecteur pourra trouver une preuve de cette formule par exemple dans le livre de Brian Hall intitulé *Lie groups, Lie algebras, and representations. An elementary introduction*, GTM 222, Springer, New York, 2003.

La forme précise de cette formule importe peu. Ce qui compte est qu'elle fournit une expression *analytique* pour $\ln(\exp X \exp Y)$ en termes de crochets itérés de X et Y . La formule peut être réécrite sous la forme beaucoup plus suggestive

$$\ln(\exp X \exp Y) = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \frac{1}{12}([X, [X, Y]] - [Y, [X, Y]]) + \dots$$

où les \dots indiquent une expression analytique en des crochets itérés d'ordre au moins trois. L'on voit apparaître les endomorphismes ad_X , ad_Y lorsque l'on écrit les différents termes de la somme précédente sous la forme $[X, Y] = \text{ad}_X(Y)$, $[X, [X, Y]] = (\text{ad}_X)^2(Y)$, $[Y, [X, Y]] = \text{ad}_Y \text{ad}_X(Y)$ etc. L'on voit aussi apparaître le crochet $[X, Y]$ comme premier terme significatif au-delà de l'addition $X + Y$. Lorsque le crochet est identiquement nul sur \mathfrak{g} , la formule se réduit à

$$\ln(\exp X \exp Y) = X + Y,$$

ce qui n'est rien d'autre qu'une version plus fine de notre proposition 4.36, avec l'information supplémentaire que l'application exponentielle induit dans ce cas localement un morphisme de groupes de Lie entre \mathfrak{g} et G ! Il est tout à fait remarquable que la représentation adjointe $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ joue un rôle clé aussi bien dans la formule de Baker-Campbell-Hausdorff, que dans la théorie abstraite des algèbres de Lie.

La formule de Baker-Campbell-Hausdorff implique en particulier le fait que la loi d'algèbre de Lie détermine la loi de groupe de Lie localement. Un argument similaire à celui de la deuxième partie de la preuve de la proposition 4.36 implique que, si G est connexe, la loi de groupe est alors uniquement déterminée globalement.

Correspondance entre groupes de Lie et algèbres de Lie. Nous avons à disposition les outils nécessaires pour montrer qu'un morphisme de groupes de Lie induit un morphisme d'algèbres de Lie.

Proposition 4.38. *Soit $f : G \rightarrow H$ un morphisme de groupes de Lie. Alors*

$$\tilde{f} := df(e) : \text{Lie}(G) \rightarrow \text{Lie}(H)$$

est un morphisme d'algèbres de Lie, c'est-à-dire

$$\tilde{f}[X, Y] = [\tilde{f}X, \tilde{f}Y], \quad X, Y \in \text{Lie}(G).$$

Démonstration. Nous utilisons la formule de la proposition 4.34 afin d'obtenir

$$\begin{aligned}
\tilde{f}[X, Y] &= df(e) \cdot \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \exp(tX) \exp(sY) \exp(-tX) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} f(\exp(tX) \exp(sY) \exp(-tX)) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} f(\exp(tX)) f(\exp(sY)) f(\exp(-tX)) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \exp(t\tilde{X}) \exp(s\tilde{Y}) \exp(-t\tilde{X}) \\
&= [\tilde{f}X, \tilde{f}Y].
\end{aligned}$$

Dans la troisième égalité nous utilisons le fait que f est un morphisme de groupes, et dans la quatrième égalité nous utilisons l'identité

$$f(\exp(tX)) = \exp(t\tilde{f}X).$$

Cette dernière découle de l'unicité du groupe à un paramètre tangent à $\tilde{f}X = df(e) \cdot X$. \square

La réciproque de cette proposition est aussi vraie : étant donné un morphisme d'algèbres de Lie $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$, il existe un unique morphisme de groupes de Lie $G \rightarrow H$ défini localement au voisinage de $e \in G$ qui l'induit. C'est le "*deuxième théorème de Lie*", qui est une conséquence directe de la formule de Baker-Campbell-Hausdorff. De plus, si G est connexe et simplement connexe alors le morphisme en question peut être défini sur G tout entier !

Le "*troisième théorème de Lie*" affirme que toute algèbre de Lie de dimension finie est l'algèbre de Lie d'un "germe en l'identité d'un groupe de Lie", qui s'étend de surcroît en un unique groupe de Lie connexe et simplement connexe. L'ingrédient essentiel de cette correspondance est à nouveau la formule de Baker-Campbell-Hausdorff, à laquelle se rajoute le théorème de Ado, qui affirme que toute algèbre de Lie de dimension finie se réalise comme sous-algèbre de Lie de \mathfrak{gl}_n pour un certain $n \gg 1$. Pour ce dernier théorème on renvoie au livre de James E. Humphreys intitulé *Introduction to Lie algebras and representation theory*, GTM 9, Springer, 1978, qui est l'une des références classiques pour la théorie des algèbres de Lie.

De manière condensée on peut exprimer le troisième théorème de Lie comme établissant une équivalence de catégories entre :

- la catégorie des algèbres de Lie de dimension finie,
- la catégorie des "germes en l'identité de groupes de Lie", et
- la catégorie des groupes de Lie connexes et simplement connexes.

Dans tous les cas, le message clé de la théorie des groupes de Lie est le suivant :

La structure (non-linéaire) d'un groupe de Lie connexe est contrôlée par la structure (linéaire) de son algèbre de Lie.

Ou encore :

La théorie des groupes de Lie connexes et simplement connexes, de nature non-linéaire, est entièrement déterminée par la théorie des algèbres de Lie, de nature linéaire.

C'est sans doute la première fois que vous rencontrez une manifestation de la démarche générale de "linéarisation" ayant un tel degré de sophistication.

Théorie des représentations. L'on rencontre une manifestation tangible de ce principe en théorie des représentations : une *représentation linéaire de groupe de Lie sur un espace vectoriel V* , c'est-à-dire un morphisme de groupes de Lie $G \rightarrow GL(V)$, détermine un morphisme d'algèbres de Lie $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V) = \text{End}(V)$, que l'on appelle aussi *représentation (linéaire) de l'algèbre de Lie \mathfrak{g}* . Les représentations des algèbres de Lie, qui sont des objets de nature linéaire, sont plus simples à étudier que les représentations de groupes, qui sont des objets de nature non-linéaire. Dans le cas des groupes connexes et simplement connexes, les deux théories sont équivalentes !

Dans des situations concrètes, ce sont souvent les représentations de groupes qui sont les objets primordiaux d'intérêt puisqu'elles correspondent à des *symétries globales*. (Les représentations d'algèbres de Lie, elles, correspondent à des *symétries infinitésimales*.) À titre d'exemple, lorsqu'une équation différentielle linéaire ou une équation aux dérivées partielles linéaire est invariante sous l'action d'un groupe de Lie, ce même groupe agit sur son espace de solutions (qui est un espace vectoriel), donnant ainsi naissance à une représentation linéaire. Si l'on sait *a priori* comment un groupe donné peut agir, cela permet parfois de résoudre l'équation presque sans faire de calcul ... au prix d'une théorie.