TD de géométrie différentielle

16/09/14

Equivalence entre les définitions de sous-variétés

(graphe) $\Rightarrow$ (def)

Soit $p \in M$. On suppose que M satisfait "graphe" : il existe un voisinage U de p dans $\mathbb{R}^n$ et, quitte à permuter les coordonnées, un voisinage W de $(p_1, \dots, p_k)$ dans $\mathbb{R}^k$ (où $(p_1 \dots p_n)$ sont les coordonnées de p dans $\mathbb{R}^n$) et une application C^∞ $f : W \to \mathbb{R}^{n-k}$ telle que

$$U \cap M = Gr(f) = \{(x, f(x)), x \in W\}$$

En particulier, la projection $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} & \to & \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \\ (x, y) & \mapsto & (x, 0) \end{array}$ induit une bijection entre $U \cap M$ et $W \times \{0\}$.

Il s'agit donc simplement d'étendre cette bijection en un difféomorphisme d'un voisinage de $U \cap M$ dans $\mathbb{R}^n$ dans un voisinage de $W \times \{0\}$. Or en restriction à $U \cap M$, la projection ci-dessus est de la forme :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \supset U \cap M & \longrightarrow & \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \\ (x, y) & \longmapsto & (x, y - f(x)), \end{array}$$

application que l'on peut prolonger à $W \times \mathbb{R}^{n-k}$ tout entier, et qui induit un difféomorphisme ϕ de $W \times \mathbb{R}^{n-k}$ dans $W \times \mathbb{R}^{n-k}$. En effet cette application est C^∞ car f l'est et $\forall (x', y') \in W \times \mathbb{R}^{n-k}$, $(x', y') = (x, y - f(x)) \iff x = x'$ et $y = y' + f(x) = y' + f(x')$ donc ϕ admet pour inverse $\begin{array}{ccc} \phi^{-1} : W \times \mathbb{R}^{n-k} & \longrightarrow & W \times \mathbb{R}^{n-k} \\ (x', y') & \longmapsto & (x', y' + f(x')) \end{array}$, qui est elle aussi C^∞.

Enfin, en posant $U' = U \cap (W \times \mathbb{R}^{n-k})$, on a

$$\underline{\phi(U' \cap M)} = \phi\Big(\underset{\underset{W \times \mathbb{R}^{n-k}}{\cap}}{(U \cap M)} \cap W \times \mathbb{R}^{n-k}\Big) = \phi(U \cap M) = W \times \{0\} = \underline{(\mathbb{R}^k \times \{0\}) \cap}$$

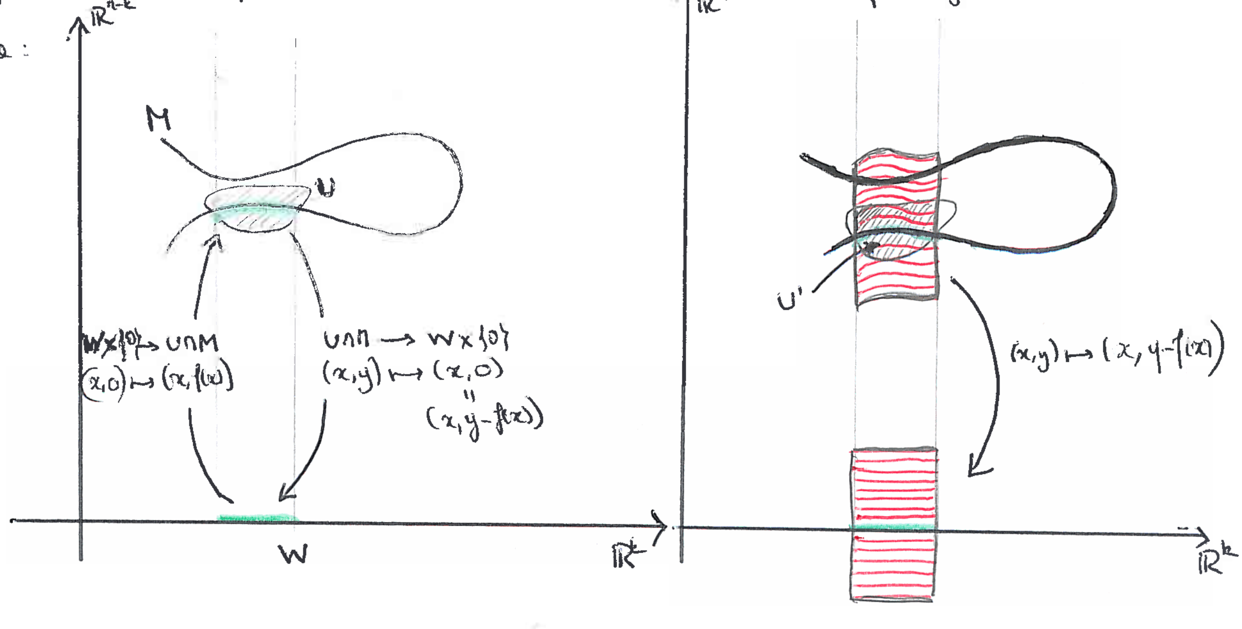
On a donc trouvé un difféo local de $\mathbb{R}^n$ qui redresse M au voisinage de p. Ceci étant vrai $\forall p \in M$, M satisfait (def).

En images

On part de :

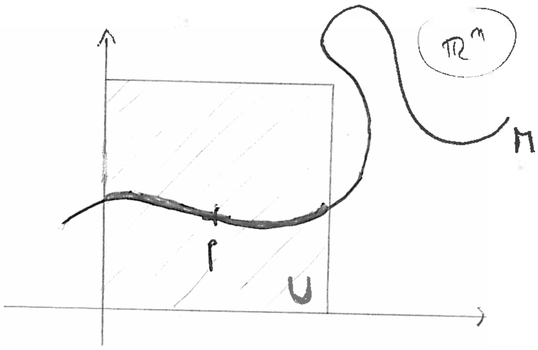
On part de:

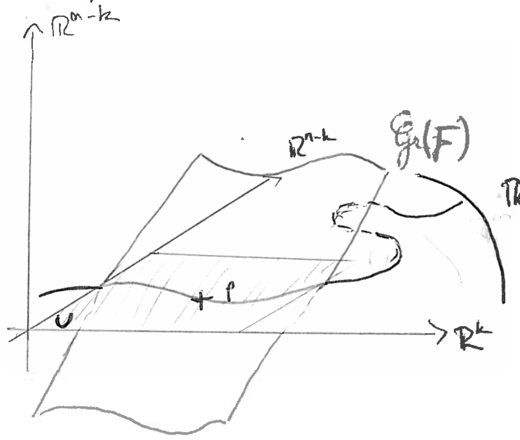
On prolonge en:



(Equations) $\Longrightarrow$ (def) & (graphe)

On suppose que M vérifie "équations". Soit $p \in M$. Il existe alors un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ contenant p et une submersion au dessus de 0 $F : U \to \mathbb{R}^{n-k}$ tels que $U \cap M = F^{-1}(\{0\})$:





Quitte à permuter les coordonnées, on suppose que

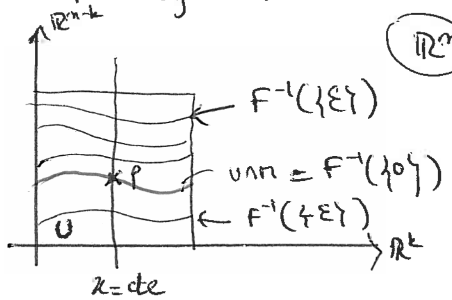
(*) DF_p est bijective de $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-k}$ dans $\mathbb{R}^{n-k}$ (On sait que DF_p est surjective, donc de rg $n-k$)

(Sur le dessin, où $k = n-k = 1$, cela revient juste à dire que $\frac{\partial F}{\partial y}(p) \neq 0$)

On a alors des "lignes" de niveau de la forme :

Or on cherche de nouvelles coordonnées sur un voisinage U' de p pour lesquelles :

$p \in U' \cap M$ ssi la 2e coordonnée s'annule



<u>Idée</u> : prendre F comme deuxième coordonnée,

c'est-à-dire repérer un point de $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ non plus par $x \in \mathbb{R}^k$ et $y \in \mathbb{R}^{n-k}$ mais par x <u>et</u> la valeur de F en ce point. <u>Pourquoi ça marche ?</u> Précisément grâce à (*) : dans le cas du dessin, l'hypothèse $\frac{\partial F}{\partial y} > 0$ entraîne que F est strictement croissante sur chaque droite $\{x = cte\}$ donc la valeur de F en un point d'une droite $\{x = cte\}$ <u>détermine complètement ce point</u> !

<u>Formulation rigoureuse</u> : soit

$$\Phi : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \\ (x,y) & \longmapsto & (x, F(x,y)) \end{array}$$

Φ est C^∞ car F l'est, et

$$D\Phi_{(x,y)} = \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline \frac{\partial F}{\partial x} & \underbrace{\frac{\partial F}{\partial y}}_{\text{inversible par hypothèse (*) donc}} \end{array} \right)$$

$D\Phi_{(x,y)}$ aussi.

Il existe donc un ouvert $U' \subset U$ tq Φ induise un C^∞ difféo de U' dans $\Phi(U')$ (théorème d'inversion locale). Et $\underline{\Phi(U' \cap M)} = \Phi((U \cap M) \cap U') = \underline{\mathbb{R}^k \times \{0\} \cap \Phi(U')}$,

ce qu'on voulait !

Ainsi <u>M vérifie (def)</u>

Montrons dans la foulée que M vérifie "graphe".

Il suffit pour cela de constater que l'inverse du difféo ϕ construit précédemment est lui aussi de la forme $\phi(U') \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \longrightarrow U' \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ (immédiat)

$$(x,y) \longmapsto (x, G(x,y))$$

En particulier, $\phi^{-1}(x,0) = (x, G(x,0))$, et

$$U' \cap M = \phi^{-1}\left(\mathbb{R}^k \times \{0\} \cap \phi(U')\right) = \phi^{-1}\left(\{(x,0) \in \phi(U')\}\right)$$

$= \{(x, G(x,0)),\ x \in W\}$ avec W = projection sur $\mathbb{R}^k$ de $\phi(U')$, qui est un ouvert

$= \{(x, g(x)),\ x \in W\}$

avec $g : W \to \mathbb{R}^{n-k}$, $x \mapsto G(x,0)$

$= Gr(g).$

Ainsi, M satisfait "graphe". $\square$

<u>Remarque</u> Nous venons essentiellement de redémontrer le théorème des fonctions implicites.