

Corrigé de l'examen partiel du 27 octobre 2016

Questions.

1. Une courbe $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ est dite périodique s'il existe $T > 0$ tel que $\gamma(t) = \gamma(t + T)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ (dans ce cas on dit que γ est périodique de période T).

Soit M une variété. Montrer qu'une trajectoire $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ d'un champ de vecteurs complet $X \in \mathcal{X}(M)$ est périodique de période T si et seulement si $\gamma(0) = \gamma(T)$.

L'une des implications est claire. Supposons donc $\gamma(0) = \gamma(T)$ et montrons que $\gamma(t) = \gamma(t + T)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Notons φ_X^t le flot de X , de sorte que $\gamma(t) = \varphi_X^t(p)$ avec $p = \gamma(0)$. La propriété clé est la propriété de groupe à un paramètre du flot du champ autonome X , à savoir $\varphi_X^{s+r} = \varphi_X^s \circ \varphi_X^r$ pour tous $s, r \in \mathbb{R}$. L'on obtient en particulier :

$$\gamma(t + T) = \varphi_X^{t+T}(p) = \varphi_X^t(\varphi_X^T(p)) = \varphi_X^t(\gamma(T)) = \varphi_X^t(\gamma(0)) = \varphi_X^t(p) = \gamma(t).$$

2. Soient $f : M \rightarrow N$ et $g : N \rightarrow P$ des fonctions lisses entre variétés. Soit $p \in M$. Démontrer la relation $d(g \circ f)(p) = dg(f(p)) \circ df(p)$ en choisissant l'un des trois points de vue sur la différentielle vus en cours. [L'on admet, bien-sûr, cette relation pour les ouverts d'espaces linéaires.]

Prenons par exemple le point de vue des classes d'équivalence de courbes passant par un point donné. Étant donné le point p et un vecteur tangent $X \in T_pM$ représenté par la classe d'équivalence $[\gamma]$ d'une courbe $\gamma : I \rightarrow M$ avec $I \subset \mathbb{R}$ un voisinage de 0 et $\gamma(0) = p$, l'on a

$$df(p)X = [f \circ \gamma].$$

Ici $f \circ \gamma : I \rightarrow N$ est une courbe telle que $f \circ \gamma(0) = f(p)$. Ainsi

$$dg(f(p))df(p)X = [g \circ (f \circ \gamma)] = [(g \circ f) \circ \gamma] = d(g \circ f)(p)X.$$

La deuxième égalité vient de l'associativité de la composition des fonctions.

3. Soient M, N des sous-variétés de \mathbb{R}^n . Supposons que $M \subset N$. Démontrer qu'alors M est une sous-variété de N .

Nous utilisons la caractérisation des sous-variétés en tant qu'ensembles qui peuvent s'écrire localement comme image d'un plongement d'un ouvert d'un espace linéaire.

Soit $p \in M$. Il existe un voisinage ouvert $V \subset \mathbb{R}^n$ de p et un plongement $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ avec U un ouvert d'un espace linéaire tel que $\varphi(U) = M \cap V$.

En particulier $\text{im}(\varphi) \subset M \subset N$ et l'on peut regarder φ comme prenant ses valeurs dans N :

$$\varphi : U \rightarrow N.$$

En tant que tel, φ est encore un plongement. L'on a par ailleurs

$$\varphi(U) = M \cap (N \cap V).$$

Or $N \cap V$ est bien un voisinage ouvert de p dans N , et ceci signifie que M est une sous-variété de N au voisinage de p .

Exercice (cylindre et champs de vecteurs sur le cylindre).

Considérons le “cylindre droit” dans \mathbb{R}^3

$$\mathcal{Z} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

1. Montrer que \mathcal{Z} est une sous-variété de dimension 2 de \mathbb{R}^3 .

Posons $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^2 + y^2$. L'on a

$$df(x, y, z)(X, Y, Z) = 2xX + 2yY.$$

Ainsi $df(x, y, z) = 0$ si et seulement si $x = y = 0$ et par conséquent f est submersive en tout point de $f^{-1}(1)$. Il s'ensuit que $\mathcal{Z} = f^{-1}(1)$ est une sous-variété de codimension 1 de \mathbb{R}^3 , donc de dimension 2.

2. Montrer que \mathcal{Z} n'est pas compacte.

Rappelons qu'un sous-ensemble de \mathbb{R}^n est compact si et seulement si il est fermé et borné. La variété \mathcal{Z} est bien fermée (en tant que préimage par l'application continue f du fermé $\{1\}$ de \mathbb{R}), mais elle n'est pas bornée. En effet, elle contient par exemple la suite de points $\{(1, 0, n) : n \in \mathbb{N}\}$, avec $\|(1, 0, n)\| = \sqrt{n^2 + 1} \rightarrow \infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

3. Donner une paramétrisation locale de \mathcal{Z} au voisinage de chaque point.

Plaçons-nous en un point $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{Z}$ avec $x_0 \neq \pm 1$. L'on peut alors exprimer de façon unique la coordonnée y comme fonction de x (et z) au voisinage de ce point sur \mathcal{Z} comme $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$, selon que $y_0 > 0$ ou $y_0 < 0$.

Pour $y_0 > 0$, considérons

$$\varphi_+ : U_+ \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \varphi_+(u, v) = (u, \sqrt{1 - u^2}, v),$$

et pour $y_0 < 0$ considérons

$$\varphi_- : U_- \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \varphi_-(u, v) = (u, -\sqrt{1 - u^2}, v),$$

avec U_{\pm} des voisinages assez petits de (x_0, z_0) dans \mathbb{R}^2 pour que $u \neq \pm 1$ pour tout $(u, v) \in U_{\pm}$. Les applications φ_{\pm} sont alors lisses, elles prennent leurs valeurs dans \mathcal{Z} , l'on vérifie directement qu'elles sont des immersions injectives et qu'elles vérifient $\varphi_{\pm}(x_0, z_0) = (x_0, y_0, z_0)$. Comme \mathcal{Z} est une variété de dimension 2, leurs différentielles sont inversibles et par le théorème d'inversion locale, ce sont des difféomorphismes locaux. Autrement dit (quitte à restreindre encore leur domaine de définition) les applications φ_{\pm} définissent des paramétrisations locales de \mathcal{Z} au voisinage de (x_0, y_0, z_0) .

Lorsque $x_0 = \pm 1$, de sorte que $y_0 = 0$, l'on considère les applications analogues

$$\psi_{\pm} : V_{\pm} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \psi_{\pm}(u, v) = (\pm\sqrt{1 - u^2}, u, v)$$

définies sur des voisinages ouverts assez petits V_{\pm} du point $(0, z_0)$ dans \mathbb{R}^2 .

4. Donner une paramétrisation globale de \mathcal{Z} par un ouvert de \mathbb{R}^2 (un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$ et un difféomorphisme $\psi : U \rightarrow \mathcal{Z}$).

Nous allons construire un difféomorphisme entre $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et \mathcal{Z} en utilisant les coordonnées polaires dans le plan épointé (Figure 1).

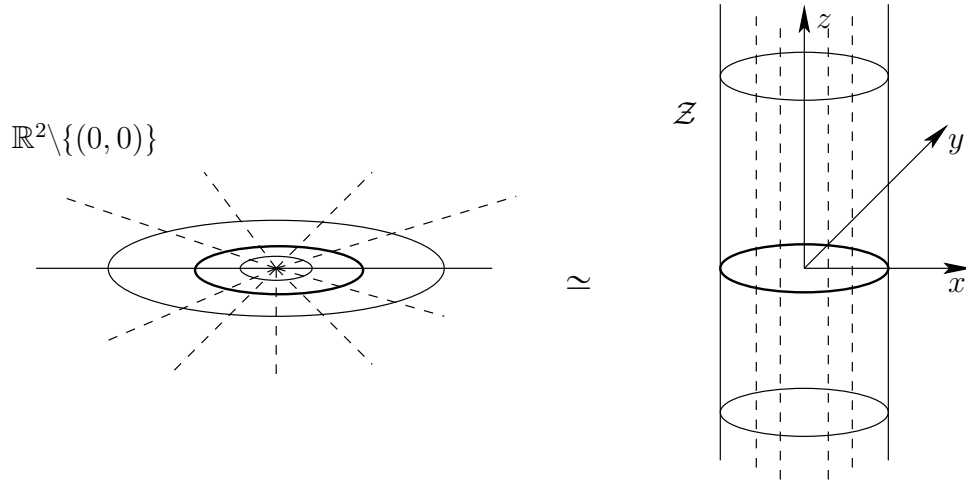


Figure 1: Difféomorphisme entre $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et le cylindre \mathcal{Z} : les rayons de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ correspondent aux droites verticales sur le cylindre, les cercles concentriques dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ correspondent aux sections $z = ct$. sur le cylindre.

En notant $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$, nous savons que les coordonnées polaires établissent un difféomorphisme

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow S^1 \times]0, \infty[,$$

$$\varphi(x, y) = \left(\left(\frac{x}{\|(x, y)\|}, \frac{y}{\|(x, y)\|} \right), \|(x, y)\| \right).$$

Par ailleurs, l'application

$$\psi : S^1 \times]0, \infty[\rightarrow \mathcal{Z},$$

$$\psi(x, y, r) = (x, y, \ln r)$$

est un difféomorphisme. En effet, ceci est la restriction à $S^1 \times]0, \infty[$ à la source et à \mathcal{Z} au but de l'application $\tilde{\psi} : \mathbb{R}^2 \times]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}^3$, $\tilde{\psi}(x, y, r) = (x, y, \ln r)$ qui est un difféomorphisme (bijective, lisse, ayant pour inverse l'application lisse $(x, y, z) \mapsto (x, y, e^z)$). Puisque $\mathcal{Z} = \tilde{\psi}(S^1 \times]0, \infty[)$, l'on conclut que ψ est un difféomorphisme.

Le difféomorphisme recherché entre $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et \mathcal{Z} est alors donné par $\psi \circ \varphi$.

5. (a) Donner une fonction lisse $f : \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ n'ayant pas de points critiques.
 (b) Calculer les points critiques de la fonction $g : \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x, y, z) = (x - 1)^2 + y^2 + z^2.$$

Dessiner sur \mathcal{Z} trois ensembles de niveau $\{g = R^2\}$ avec $R > 2$, $\{g = 4\}$, et $\{g = r^2\}$ avec $0 < r < 2$.

- (c) Pour tout $r > 0$, on note S_r la sphère de centre $(1, 0, 0)$ et de rayon r . En donner une équation cartésienne, et montrer que si $r \neq 2$, $\mathcal{Z} \cap S_r$ est une sous-variété de dimension 1 de \mathbb{R}^3 . Qu'en est-il si $r = 2$?

(a) Étant donné $(x, y, z) \in \mathcal{Z}$, l'on a

$$T_{(x,y,z)}\mathcal{Z} = \{(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 : xX + yY = 0\} = (x, y, 0)^\perp.$$

Ainsi une fonction $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ n'a pas de points critiques en restriction à \mathcal{Z} si et seulement si pour tout $(x, y, z) \in \mathcal{Z}$, $\nabla f(x, y, z)$ n'est pas un multiple de $(x, y, 0)$. (De façon équivalente, (x, y, z) est un point critique si et seulement si $\nabla f(x, y, z)$ est un multiple de $(x, y, 0)$.)

Un tel exemple de fonction est

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = z,$$

avec $\nabla f(x, y, z) = (0, 0, 1)$. La restriction $f|_{\mathcal{Z}}$ est lisse et n'a pas de points critiques.

(b) Considérons la fonction $\tilde{g} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par la même formule que g . L'on a

$$\nabla \tilde{g}(x, y, z) = (2(x - 1), 2y, 2z).$$

Ainsi $(x, y, z) \in \mathcal{Z}$ est un point critique de g si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$(2(x - 1), 2y, 2z) = \lambda(x, y, 0).$$

L'on a alors nécessairement $z = 0$. Si $y \neq 0$ alors $\lambda = 2$ et l'équation $2(x - 1) = \lambda x$ n'a pas de solutions, donc nécessairement $y = 0$. Dans ce cas l'on a $x = \pm 1$ et pour chacun de ces points l'on trouve une solution de l'équation $2(x - 1) = \lambda x$, à savoir $\lambda = 0$ ou $\lambda = 4$. La fonction g a par conséquent exactement deux points critiques :

$$(-1, 0, 0) \quad \text{et} \quad (1, 0, 0).$$

(c) (Figure 2) La sphère S_r de centre $(1, 0, 0)$ et de rayon r a justement pour équation cartésienne :

$$(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

autrement dit c'est le niveau $\tilde{g}^{-1}(r^2)$ de la fonction \tilde{g} . L'intersection $\mathcal{Z} \cap S_r$ n'est autre que le niveau $g^{-1}(r^2)$ de la fonction g . On a vu que les seuls points critiques de g sont $(-1, 0, 0)$ et $(1, 0, 0)$, où g prend les valeurs 4 et 0 respectivement. Toutes les autres valeurs, donc tous les r^2 avec $r > 0$ et $r \neq 2$, sont donc des valeurs régulières de g et les niveaux correspondants $\mathcal{Z} \cap S_r$ sont donc des sous-variétés de \mathcal{Z} de codimension 1, et donc de dimension 1.

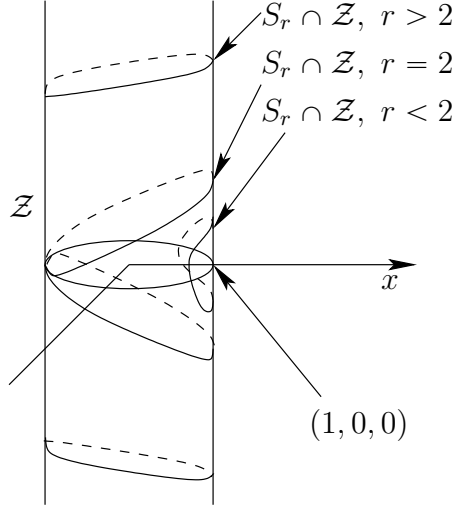


Figure 2: Intersections du cylindre \mathcal{Z} avec des sphères de différents rayons centrées au point $(1, 0, 0)$.

$\Gamma = \mathcal{Z} \cap S_2$, en revanche, est un niveau singulier. Cela ne suffit pas à dire que ce n'est pas une sous variété. Mais le dessin de la question précédente montre que ce niveau, en forme de 8, admet une auto-intersection en $(-1, 0, 0)$, ce qui l'empêche d'être localement homéomorphe à \mathbb{R} au voisinage de ce point, et donc d'être une sous-variété de dimension 1.

Voici une façon de justifier l'allure du dessin. Notons U le demi-espace $\{x < 0\}$, auquel appartient notre point critique. Pour tout $(x, y, z) \in U$,

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in \Gamma &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ (x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{1 - y^2} =: \phi(y) & (x < 0) \\ z = \pm\sqrt{4 - (-\sqrt{1 - y^2} - 1)^2 - y^2} =: \pm\psi(y) \end{cases} \end{aligned}$$

avec ψ strictement positive sur $] -1, 1[\setminus \{0\}$. Ainsi, $(\Gamma \cap U) \setminus \{(-1, 0, 0)\}$ a quatre composantes connexes :

$$\{(\phi(y), y, \psi(y)), y > 0\}, \{(\phi(y), y, \psi(y)), y < 0\},$$

$$\{(\phi(y), y, -\psi(y)), y > 0\}, \{(\phi(y), y, -\psi(y)), y < 0\}$$

et a fortiori, pour tout voisinage V de $(-1, 0, 0)$ inclus dans U , $(\Gamma \cap V) \setminus \{(-1, 0, 0)\}$ a au moins quatre composantes connexes incluses dans les ensembles ci-dessus. Or si Γ était localement homéomorphe à \mathbb{R} au voisinage de $(-1, 0, 0)$, il existerait un V tel que $(\Gamma \cap V) \setminus \{(-1, 0, 0)\}$ ait seulement deux composantes connexes, puisqu'un intervalle ouvert de \mathbb{R} privé d'un point n'a que deux composantes connexes.

6. Construire cinq champs de vecteurs X, X', Y, Z, T partout non-nuls définis sur \mathcal{Z} tels que :

- toutes les courbes intégrales de X sont périodiques de même période.
- toutes les courbes intégrales de X' sont périodiques mais n'ont pas toutes la même période.
- les trajectoires de flot de Y sont les droites verticales $\{x = ct., y = ct.\}$.
- aucune des trajectoires de flot de Z n'est périodique, mais la projection orthogonale de toute trajectoire de Z sur le plan $\{z = 0\}$ est périodique non constante.
- le champ T possède une trajectoire non-périodique dont l'image est contenue dans un compact de \mathcal{Z} .

(a) On peut prendre pour X la restriction à \mathcal{Z} du champ de vecteurs lisse sur \mathbb{R}^3 :

$$\tilde{X} : (x, y, z) \mapsto (-y, x, 0).$$

Pour tout $p = (x, y, z) \in \mathcal{Z}$, $\tilde{X}(p) = (-y, x, 0) \perp (x, y, 0)$ donc $\tilde{X}(p) \in T_p\mathcal{Z}$ (cf. question 5) donc \tilde{X} induit bien un champ de vecteurs X sur \mathcal{Z} . Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi_{\tilde{X}}^t$ est la rotation d'angle t autour de l'axe orienté (Oz) , donc toutes les orbites de \tilde{X} sont périodiques de période 2π , et il en est de même de celles de X .

(b) Il suffit de renormaliser \tilde{X} (resp. X), en prenant par exemple

$$\tilde{X}' : (x, y, z) \mapsto (-e^z y, e^z x, 0).$$

Pour la même raison que précédemment, la restriction de ce champ à \mathcal{Z} définit bien un champ de vecteurs sur \mathcal{Z} , mais cette fois, à z fixé (le champ est horizontal donc chaque courbe intégrale est incluse dans un plan horizontal), la restriction de $\phi_{\tilde{X}'}^t$ au plan d'ordonnée z est la rotation d'angle $e^z t$. Toutes les orbites restent donc périodiques, mais de période $2\pi e^{-z}$ dépendant de l'ordonnée z .

(c) On peut prendre pour Y la restriction à \mathcal{Z} du champ de vecteurs constant sur \mathbb{R}^3 :

$$\tilde{Y} : (x, y, z) \mapsto (0, 0, 1),$$

qui, encore une fois, est bien tangent à \mathcal{Z} et dont le flot au temps t est la translation de vecteur $(0, 0, t)$, de sorte que les courbes intégrales sont de la forme $\{(x, y, z+t), t \in \mathbb{R}\}$, i.e. des droites verticales.

(d) (Figure 3) On peut prendre pour Z la restriction à \mathcal{Z} du champ de vecteurs sur \mathbb{R}^3 :

$$\tilde{Z} : (x, y, z) \mapsto (-y, x, 1),$$

dont le flot au temps $t \in \mathbb{R}$ est donné par

$$\phi_{\tilde{Z}}^t(x, y, z) = ((\cos t)x - (\sin t)y, (\sin t)x + (\cos t)y, z + t) = \tau_t \circ R_t(x, y, z)$$

où τ_t désigne la translation de vecteur vertical $(0, 0, t)$ et R_t la rotation d'angle t autour de l'axe (Oz) . Il s'agit d'un *vissage*, et les trajectoires sont des hélices. Aucune trajectoire de Z n'est périodique (la coordonnée z croît strictement le long

d'une trajectoire), mais leurs projections sur le plan $\{z = 0\}$ sont périodiques non constantes de période 2π .

(e) (Figure 3) On peut prendre un champ de la forme

$$T : (x, y, z) \mapsto (-y, x, f(z))$$

avec f n'importe quelle fonction ayant deux zéros entre lesquels elle ne s'annule pas. Pour fixer les idées, prenons la fonction $f(z) = 1 - z^2$. Alors la trajectoire partant de $(1, 0, 0)$ (et en fait n'importe quelle trajectoire partant d'un point de \mathcal{Z} d'ordonnée comprise entre -1 et 1 strictement) a les propriétés voulues. En effet : $t \mapsto (\cos t, \sin t, \pm 1)$ sont des trajectoires de T , et comme $(1, 0, 0)$ n'appartient à aucune, sa trajectoire ne peut intersecter ces cercles, ce qui signifie qu'elle est coincée dans le domaine borné $C = \mathcal{Z} \cap \{|z| < 1\}$, et a fortiori dans le compact $\mathcal{Z} \cap \{|z| \leq 1\}$. Enfin puisque $f(z) > 0$ pour tout $(x, y, z) \in C$, la coordonnée z est strictement croissante le long de la trajectoire considérée, donc celle-ci n'est pas périodique.

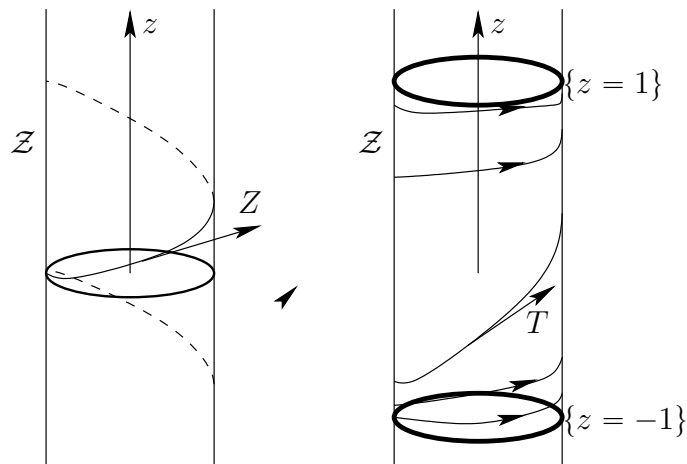


Figure 3: Trajectoires des champs de vecteurs Z et T sur le cylindre \mathcal{Z} .

7. Étant donnés deux champs de vecteurs X et Y comme ci-dessus, existe-t-il un difféomorphisme $\varphi \in \text{Diff}(\mathcal{Z})$ tel que $\varphi_*X = Y$?

S'il existait un tel φ , il enverrait les orbites de X sur celles de Y . Or les premières sont toutes compactes alors que les secondes sont toutes non compactes. Donc un tel φ n'existe pas.

8. Soient $p, q \in \mathcal{Z}$ deux points distincts. Donner deux difféomorphismes de \mathcal{Z} qui envoient p sur q , l'un qui soit à support compact et l'autre qui ne soit pas à support compact.

Pour le difféomorphisme à support non compact, il suffit de prendre la composée d'une translation verticale et d'une rotation d'axe (Oz) de longueur et d'angle bien choisis. Ces transformations sont des difféomorphismes de \mathbb{R}^3 (isomorphismes affines) qui laissent le cylindre invariant donc elles induisent des difféomorphismes du cylindre.

[L'existence d'un tel difféomorphisme à support compact est un fait général, valable sur toute variété connexe, d'après un théorème démontré dans le polycopié.] Nous

pouvons construire explicitement un tel difféomorphisme en nous inspirant de ce qui précède. Notons (x_p, y_p, z_p) et (x_q, y_q, z_q) les coordonnées de p et q respectivement, et procédons en deux temps, en construisant d'abord un difféomorphisme à support compact envoyant p sur $q' = (x_q, y_q, z_p)$, puis un difféomorphisme à support compact envoyant q' sur q , la composée donnant le difféomorphisme recherché. On va obtenir les deux comme flot à un certain temps t d'un champ de vecteurs à support compact.

Pour le premier, on considère le champ

$$X : (x, y, z) \mapsto (-f(z)y, f(z)x, 0),$$

où f est une fonction valant 1 en $z = z_p$ et nulle en dehors d'un voisinage de z_p , disons $[z_p - 1, z_p + 1]$. Alors le support de X est compact, inclus dans $\mathcal{Z} \cap \{|z - z_p| \leq 1\}$, et la trajectoire issue de p parcourt tout le cercle horizontal contenant p donc passe par q' à un instant t_0 . C'est ce temps du flot qui nous donne notre premier difféomorphisme (bien défini partout puisque le champ est à support compact).

Pour le second, on considère un champ de vecteurs

$$Y : (x, y, z) \mapsto (0, 0, g(z))$$

où g est une fonction lisse valant 1 au voisinage de $[z_p, z_q]$ et 0 en dehors d'un voisinage plus grand. Y est à support compact et l'on vérifie que $\phi_Y^{z_q - z_p}(q') = q$. Nous prenons donc comme deuxième difféomorphisme $\phi_Y^{z_q - z_p}$ (bien défini partout puisque le champ est à support compact).

9. (Bonus) Démontrer que le quotient de \mathcal{Z} par la relation d'équivalence engendrée par

$$(x, y, z) \sim (-x, -y, z), \quad (x, y, z) \in \mathcal{Z}$$

est une variété difféomorphe à \mathcal{Z} .

Le fait que \mathcal{Z}/\sim est une variété découle de ce que \mathcal{Z}/\sim est le quotient de \mathcal{Z} par l'action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ donnée par

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}, \quad (\bar{k}, p) \mapsto R_{k\pi}(p).$$

Cette action est différentiable (les rotations le sont), propre (automatique car $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est fini) et libre (R_π n'a pas de point fixe). Donc il existe une unique structure de variété différentiable sur \mathcal{Z}/\sim telle que la projection canonique $\mathcal{Z} \mapsto \mathcal{Z}/\sim$ soit un revêtement lisse. C'est cette structure différentiable que nous utilisons sur \mathcal{Z}/\sim .

Notons $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Il découle de la définition que $\mathcal{Z} \simeq S^1 \times \mathbb{R}$.

Considérons sur S^1 la relation d'équivalence \sim' engendrée par $(x, y) \sim' (-x, -y)$, $(x, y) \in S^1$. L'on a alors $\mathcal{Z}/\sim \simeq S^1/\sim' \times \mathbb{R}$.

Or nous savons que $S^1 \simeq S^1/\sim'$, d'où la conclusion :

$$\mathcal{Z} \simeq S^1 \times \mathbb{R} \simeq S^1/\sim' \times \mathbb{R} \simeq \mathcal{Z}/\sim .$$