Devoir Maison 1

Distribué le 7 octobre 2016, à rendre le 14 octobre 2016

Tore de dimension 2. On définit le “tore plat” $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ comme le quotient de $\mathbb{R}^2$ par la relation d'équivalence

$$(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow (x - x', y - y') \in \mathbb{Z}^2$$

et on le munit de la topologie quotient. On définit d'autre part le tore de révolution $T \subset \mathbb{R}^3$ comme la surface obtenue en faisant tourner autour de l'axe (Oz) le cercle $C_0 \subset \{y = 0\}$ de centre $(2, 0, 0)$ et de rayon 1. On a déjà vu que T était une sous-variété lisse de $\mathbb{R}^3$, et on la munit de la structure différentiable induite.

Le but de l'exercice est de munir le tore plat d'une structure différentiable naturelle qui fait de lui une variété difféomorphe au tore de révolution.

1. Notons $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ la projection canonique. Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert qui contient au plus un représentant de chaque classe d'équivalence de $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, de sorte que $p : U \to p(U)$ est bijective.

   (i) Pour chaque $x \in \mathbb{R}^2$ donner un tel exemple d'ouvert U qui contient x.

   (ii) Montrer que l'ensemble des paires $(p(U), p^{-1} : p(U) \to U)$ avec U comme ci-dessus définit un atlas sur $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

2. (i) Verifier que p est un difféomorphisme local.

   (ii) Soit X une variété. Montrer qu'une application $f : \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \to X$ est lisse si et seulement si $f \circ p : \mathbb{R}^2 \to X$ est lisse.

3. (i) Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} h : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (\theta, \phi) & \mapsto & ((2 + \cos\theta)\cos\phi, (2 + \cos\theta)\sin\phi, \sin\theta) \end{array}$$

   est une immersion.

   (ii) Montrer qu'elle passe au quotient en une bijection lisse $\bar{h} : \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \to T$.

   (iii) Montrer que la différentielle de $\bar{h}$ est inversible. En déduire que $\bar{h}$ est un difféomorphisme.

4. Calculer l'espace tangent en un point quelconque du tore de révolution.

5. Montrer que le fibré tangent au tore est trivial.