

Corrigé du Devoir Maison 1

20 octobre 2016

Tore de dimension 2. On définit le “tore plat” $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ comme le quotient de \mathbb{R}^2 par la relation d'équivalence

$$(x, y) \sim (x', y') \Leftrightarrow (x - x', y - y') \in \mathbb{Z}^2$$

et on le munit de la topologie quotient. On définit d'autre part le tore de révolution $T \subset \mathbb{R}^3$ comme la surface obtenue en faisant tourner autour de l'axe (Oz) le cercle $C_0 \subset \{y = 0\}$ de centre $(2, 0, 0)$ et de rayon 1. On a déjà vu que T était une sous-variété lisse de \mathbb{R}^3 , et on la munit de la structure différentiable induite.

Le but de l'exercice est de munir le tore plat d'une structure différentiable naturelle qui fait de lui une variété difféomorphe au tore de révolution.

1. Notons $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ la projection canonique. Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert qui contient au plus un représentant de chaque classe d'équivalence de $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, de sorte que $p : U \rightarrow p(U)$ est bijective.

(i) Pour chaque $x \in \mathbb{R}^2$ donner un tel exemple d'ouvert U qui contient x .

La boule ouverte $B(x, \epsilon)$ de centre x et rayon $\epsilon \in]0, \frac{1}{2}]$ est un tel exemple. En effet, soient $p, q \in B(x, \epsilon)$. D'un côté l'on a $d(p, q) < 1$. D'un autre côté, la distance entre tous deux points distincts de \mathbb{Z}^2 est au moins égale à 1. Donc $p - q \notin \mathbb{Z}^2$ si et seulement si $p = q$.

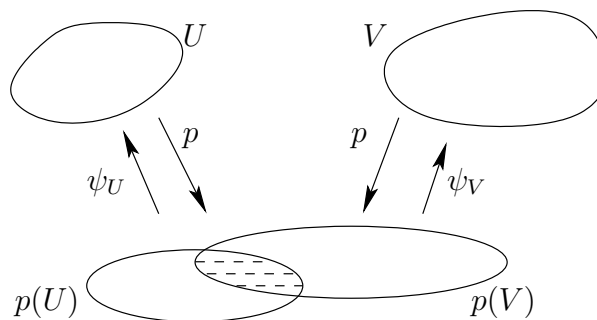
(ii) Montrer que l'ensemble des paires $(p(U), p^{-1} : p(U) \rightarrow U)$ avec U comme ci-dessus définit un atlas sur $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

Pour un ouvert U comme ci-dessus notons ψ_U l'application bijective $(p|_U)^{-1} : p(U) \rightarrow U$, de sorte que $\psi_U^{-1} = p|_U$. Il s'agit de montrer que :

- (a) Les ensembles $p(U)$ recouvrent $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.
- (b) Chaque ensemble $p(U)$ est ouvert et ψ_U est un homéomorphisme.
- (c) Pour tous deux tels ouverts U et V , l'application

$$\psi_U \circ \psi_V^{-1} : \psi_V(p(U) \cap p(V)) \rightarrow \psi_U(p(U) \cap p(V))$$

est un difféomorphisme.



Notons $T_g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la translation par $g \in \mathbb{Z}^2$. Chaque application T_g est un difféomorphisme de \mathbb{R}^2 , et en particulier un homéomorphisme de \mathbb{R}^2 . Par ailleurs, T_g préserve les boules euclidiennes, c'est-à-dire envoie une boule sur une autre boule (en l'occurrence de même rayon).

- (a) Ceci découle directement du point (i).
- (b) Pour montrer que $p(U)$ est ouvert, utilisons la caractérisation des ouverts de la topologie quotient : $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ est ouvert si et seulement si $p^{-1}(\mathcal{O}) \subset \mathbb{R}^2$ est ouvert. Dans notre cas, nous

avons $p^{-1}(p(U)) = \cup_{g \in \mathbb{Z}^2} T_g(U)$. Or chaque $T_g(U)$ est ouvert puisque T_g est un homéomorphisme, par conséquent $p^{-1}(p(U))$ est ouvert en tant qu'union d'ouverts.

Cette même preuve montre par ailleurs que p est une application ouverte, c'est-à-dire que l'image par p de tout ouvert est un ouvert de la topologie quotient. Ceci implique le fait que $p : U \rightarrow p(U)$ est un homéomorphisme. En effet, l'application $p|_U$ est continue par définition de la topologie quotient, et son inverse $(p|_U)^{-1}$ est continue puisque p est ouverte.

(c) L'application $\psi_U \circ \psi_V^{-1} : \psi_V(p(U) \cap p(V)) \rightarrow \psi_U(p(U) \cap p(V))$ est bijective par définition. Il suffit donc de démontrer que c'est un difféomorphisme local. Pour tout $a_V \in \psi_V(p(U) \cap p(V))$, image par ψ_V d'un élément $a \in p(U) \cap p(V)$, l'élément $a_U = \psi_U \circ \psi_V^{-1}(a_V) \in \psi_U(p(U) \cap p(V))$ est l'image de a par ψ_U . Puisque $p(a_U) = p(a_V)$, il existe un unique $g \in \mathbb{Z}^2$ tel que $a_U = a_V + g$, ou encore $a_U = T_g(a_V)$. En choisissant $\epsilon > 0$ tel que $B(a_U, \epsilon) \subset U$ et $B(a_V, \epsilon) \subset V$, l'on a alors $B(a_U, \epsilon) = T_g(B(a_V, \epsilon))$. Ceci implique $\psi_U \circ \psi_V^{-1}(B(a_V, \epsilon)) = B(a_U, \epsilon)$ et $\psi_U \circ \psi_V^{-1} = T_g$ sur $B(a_V, \epsilon)$. Or $T_g : B(a_V, \epsilon) \rightarrow B(a_U, \epsilon)$ est un difféomorphisme (son inverse est T_{-g}).

2. (i) *Verifier que p est un difféomorphisme local.*

Pour tout ouvert U comme ci-dessus nous avons vu que $p(U)$ est un ouvert de \mathbb{T}^2 . La projection $p : U \rightarrow p(U)$ est un difféomorphisme puisque c'est l'inverse d'une carte de notre atlas.

(ii) *Soit X une variété. Montrer qu'une application $f : \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \rightarrow X$ est lisse si et seulement si $f \circ p : \mathbb{R}^2 \rightarrow X$ est lisse.*

La projection $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ est lisse puisqu'elle est lisse en restriction à tout ouvert U comme ci-dessus. La composée de deux applications lisses étant lisse, l'on déduit que si f est lisse alors $f \circ p$ est lisse. Réciproquement, supposons que $f \circ p$ est lisse. Pour tout ouvert U comme ci-dessus, avec $\psi_U : p(U) \rightarrow U$ la carte correspondante sur \mathbb{T}^2 , l'on a $f \circ p|_U = f \circ \psi_U^{-1}$. Cette application est lisse par hypothèse, ce qui entraîne que f est lisse par définition de la lissité sur une variété.

3. (i) *Montrer que l'application*

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (\theta, \phi) & \mapsto & ((2 + \cos \theta) \cos \phi, (2 + \cos \theta) \sin \phi, \sin \theta) \end{array}$$

est une immersion.

La matrice jacobienne de h est donnée par

$$dh(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} -\sin \theta \cos \phi & (2 + \cos \theta)(-\sin \phi) \\ -\sin \theta \sin \phi & (2 + \cos \theta) \cos \phi \\ \cos \theta & 0 \end{pmatrix}$$

[Attention ! Dans notre situation, la matrice jacobienne a bien 2 colonnes et 3 lignes.]

L'injectivité de $dh(\theta, \phi)$ est équivalente à l'indépendance linéaire des deux vecteurs colonnes qui constituent la matrice jacobienne. Pour le montrer, nous pouvons par exemple calculer la somme des carrés des mineurs d'ordre 2 de cette matrice. Celle-ci vaut

$$((2 + \cos \theta)(-\sin \theta))^2 + ((2 + \cos \theta) \cos \theta \cos \phi)^2 + ((2 + \cos \theta)(-\sin \phi) \cos \theta)^2 = (2 + \cos \theta)^2 > 0.$$

Il s'ensuit que, pour tout (θ, ϕ) , il existe au moins un mineur d'ordre 2 qui est non-nul, ce qui nous permet de conclure.

[Bien-sûr, nous aurions aussi pu examiner les différents mineurs d'ordre 2 un par un, ce qui nous aurait amené à une distinction de cas selon les valeurs de (θ, ϕ) .]

(ii) *Montrer qu'elle passe au quotient en une bijection lisse $\bar{h} : \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \rightarrow T$.*

Mise en garde : ce n'est pas exactement l'application h qui passe au quotient, mais plutôt l'application

$$\hat{h} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \hat{h}(\theta, \phi) = h(2\pi\theta, 2\pi\phi).$$

Le fait que \hat{h} "passe au quotient" signifie qu'il existe une unique application $\bar{h} : \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \rightarrow T$ telle que

$$\hat{h} = \bar{h} \circ p.$$

Nous allons montrer l'existence de \bar{h} , ainsi que le fait que c'est une bijection lisse.

L'on a $\hat{h}(\theta + m, \phi + n) = \hat{h}(\theta, \phi)$ pour tout $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$. Il existe donc une unique application $\bar{h} : \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $\bar{h} \circ p = \hat{h}$. En effet, l'on définit $\bar{h}(p(a)) = \hat{h}(a)$ pour $a \in \mathbb{R}^2$ et la relation précédente nous assure que la définition ne dépend pas du choix de représentant a de la classe d'équivalence $p(a)$.

L'application \bar{h} est lisse par le point précédent.

Le fait que l'image de \hat{h} est T et que deux points de \mathbb{R}^2 ont même image par \hat{h} si et seulement si ils diffèrent par une translation dans \mathbb{Z}^2 est une vérification directe. En effet : (a) le cercle C_0 est l'ensemble $\{(2 + \cos \theta, 0, \sin \theta) : \theta \in \mathbb{R}\} \subset \{y = 0\}$; (b) l'image d'un ensemble $A \subset \{y = 0\}$ par la rotation d'axe Oz est l'ensemble $\{(a_1 \cos \phi, a_1 \sin \phi, a_3) : (a_1, 0, a_3) \in A, \phi \in \mathbb{R}\}$. Ces deux faits (de la phrase d'avant) entraînent respectivement la surjectivité et l'injectivité de \bar{h} , donc sa bijectivité.

(iii) Montrer que la différentielle de \bar{h} est inversible. En déduire que \bar{h} est un difféomorphisme.

La relation clé est $\bar{h} \circ p = \hat{h}$. Ceci implique

$$d\bar{h}(p(\theta, \phi)) \circ dp(\theta, \phi) = d\hat{h}(\theta, \phi).$$

Puisque dp est un difféomorphisme local, sa différentielle est bijective en tout point. Par ailleurs $d\hat{h}(\theta, \phi) = 2\pi dh(2\pi\theta, 2\pi\phi)$ est injective, donc $d\bar{h}$ est injective. Puisque T est une variété de dimension deux, la cible de $d\bar{h}$ est un espace vectoriel de dimension deux, la même que la dimension de la source de $d\bar{h}$. Il s'ensuit que $d\bar{h}$ est bijective.

L'on déduit par le théorème d'inversion locale que \bar{h} est un difféomorphisme local. Puisque \bar{h} est bijective, l'on déduit que c'est un difféomorphisme.

[Dans l'argument précédent il était essentiel de restreindre le but de \bar{h} à T . Nous avons utilisé ce fait pour déduire la surjectivité de $d\bar{h}$. Bien évidemment, nous aurions aussi pu voir \bar{h} comme prenant ses valeurs dans \mathbb{R}^3 , auquel cas elle n'aurait plus du tout été un difféomorphisme local !]

4. Calculer l'espace tangent en un point quelconque du tore de révolution.

Plaçons-nous en un point $(x, y, z) = h(\theta, \phi) = ((2 + \cos \theta) \cos \phi, (2 + \cos \theta) \sin \phi, \sin \theta)$ du tore de révolution T . Puisque h fournit une paramétrisation locale de T (voir par exemple l'explication plus générale à la fin de ce corrigé), l'on a

$$T_{(x,y,z)}T = \text{im } dh(\theta, \phi) = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} -\sin \theta \cos \phi \\ -\sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} (2 + \cos \theta)(-\sin \phi) \\ (2 + \cos \theta) \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Autrement dit, une paramétrisation locale de la variété fournit un système d'équations paramétriques de l'espace tangent.

L'on peut obtenir une équation cartésienne de l'espace tangent en appliquant la méthode du pivot de Gauss à ce système d'équations paramétriques. Le résultat est (exercice !)

$$T_{h(\theta,\phi)}T = \{(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 : \cos \phi \cos \theta X + \sin \phi \cos \theta Y + \sin \theta Z = 0\}.$$

Voici un point de vue alternatif sur ce calcul : l'espace tangent étant de codimension 1 et engendré par les vecteurs linéairement indépendants $v = \begin{pmatrix} -\sin \theta \cos \phi \\ -\sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} (2 + \cos \theta)(-\sin \phi) \\ (2 + \cos \theta) \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}$,

les coefficients de la forme linéaire qui admet cet espace comme noyau sont donnés par les coordonnées du produit vectoriel

$$v \wedge w = \begin{pmatrix} -(2 + \cos \theta) \cos \phi \cos \theta \\ -(2 + \cos \theta) \sin \phi \cos \theta \\ -(2 + \cos \theta) \sin \theta \end{pmatrix}.$$

À un coefficient scalaire $-(2 + \cos \theta) \neq 0$ près, ceci fournit l'équation cartésienne écrite ci-dessus.

5. *Montrer que le fibré tangent au tore est trivial.*

Le fibré tangent à \mathbb{R}^2 est trivial : les deux champs de vecteurs constants $X(x, y) = (1, 0)$ et $Y(x, y) = (0, 1)$ sont globalement définis et linéairement indépendants en chaque point. Par ailleurs, ils sont invariants par toute translation T_g , $g \in \mathbb{Z}^2$:

$$dT_g(x, y) \cdot X(x, y) = X(T_g(x, y)), \quad dT_g(x, y) \cdot Y(x, y) = Y(T_g(x, y)), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, g \in \mathbb{Z}^2.$$

Ceci fait qu'ils définissent deux champs de vecteurs lisses et linéairement indépendants \bar{X} , \bar{Y} sur le quotient $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. En effet, dans une carte ψ_U comme ci-dessus l'on définit $\bar{X} = X$ et $\bar{Y} = Y$. L'indépendance de cette définition par rapport au choix de carte vient de ce que les applications de changement de carte sont données par des translations T_g , $g \in \mathbb{Z}^2$, comme nous l'avons déjà vu précédemment, combiné avec le fait que les champs X et Y sont invariants par translation.

L'existence des champs de vecteurs \bar{X} et \bar{Y} qui sont linéairement indépendants en chaque point équivaut à la trivialité du fibré tangent à \mathbb{T}^2 .

Un autre point de vue (équivalent) est d'utiliser les champs de vecteurs v et w définis explicitement au point précédent sur le tore de révolution. Ceux-ci sont lisses et linéairement indépendants en chaque point.

FIN.

Explication supplémentaire concernant le fait que h fournit une paramétrisation locale de T , c'est-à-dire h est localement un plongement dont l'image est un ouvert de T .

Soit $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ un difféomorphisme de redressement pour T au voisinage d'un point $h(\theta, \phi)$, avec \mathcal{U}, \mathcal{V} des ouverts de \mathbb{R}^3 et $\varphi(T \cap \mathcal{U}) = (\mathbb{R}^2 \times \{0\}) \cap \mathcal{V}$. Notons $\text{pr} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \{0\}$. En restreignant h à un ouvert suffisamment petit contenant (θ, ϕ) et dont l'image par h est contenue dans $T \cap \mathcal{U}$, l'on voit que $\text{pr} \circ \varphi \circ h$ est une application lisse entre ouverts d'espaces linéaires de même dimension (égale à 2) et dont la différentielle en (θ, ϕ) est injective. Sa différentielle en (θ, ϕ) est alors bijective et $\text{pr} \circ \varphi \circ h$ est un difféomorphisme local au voisinage de (θ, ϕ) (théorème d'inversion locale). Ceci équivaut au fait que h est un plongement au voisinage de (θ, ϕ) ayant pour image un ouvert de T .

Plus généralement :

PROPOSITION. *Soit $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une immersion dont l'image est contenue dans une sous-variété $T^n \subset \mathbb{R}^m$ de même dimension n que celle du domaine de définition de h . Alors h est une paramétrisation locale de T en tout point de $\text{im}(h)$. Si $\text{im}(h) = T$, alors h fournit une paramétrisation locale au voisinage de tout point de T .*