Université Pierre et Marie Curie
M1 Mathématiques 2016-2017

Cours de géométrie différentielle 4M022
H. Eynard-Bontemps, A. Oancea

Examen partiel du 27 octobre 2016

Durée : 3 heures

Le clarté des explications sera appréciée. Sont autorisées les notes individuelles de cours et de TD, ainsi que le polycopié du cours.

Le sujet consiste en une première partie composée de questions courtes, indépendantes les unes des autres, et une deuxième partie qui est un exercice.

Questions.

1. Une courbe $\gamma : \mathbb{R} \to M$ est dite périodique s'il existe $T > 0$ tel que $\gamma(t) = \gamma(t+T)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ (dans ce cas on dit que γ est périodique de période T).

   Soit M une variété. Montrer qu'une trajectoire $\gamma : \mathbb{R} \to M$ d'un champ de vecteurs complet $X \in \mathcal{X}(M)$ est périodique de période T si et seulement si $\gamma(0) = \gamma(T)$.

2. Soient $f : M \to N$ et $g : N \to P$ des fonctions lisses entre variétés. Soit $p \in M$. Démontrer la relation $d(g \circ f)(p) = dg(f(p)) \circ df(p)$ en choisissant l'un des trois points de vue sur la différentielle vus en cours. *[L'on admet, bien-sûr, cette relation pour les ouverts d'espaces linéaires.]*

3. Soient M, N des sous-variétés de $\mathbb{R}^n$. Supposons que $M \subset N$. Démontrer qu'alors M est une sous-variété de N.

Exercice (cylindre et champs de vecteurs sur le cylindre).

Considérons le "cylindre droit" dans $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{Z} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2 + y^2 = 1\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{Z}$ est une sous-variété de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$.

2. Montrer que $\mathcal{Z}$ n'est pas compacte.

3. Donner une paramétrisation locale de $\mathcal{Z}$ au voisinage de chaque point.

4. Donner une paramétrisation globale de $\mathcal{Z}$ par un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$ et un difféomorphisme $\psi : U \to \mathcal{Z}$).

5. (a) Donner une fonction lisse $f : \mathcal{Z} \to \mathbb{R}$ n'ayant pas de points critiques.

   (b) Calculer les points critiques de la fonction $g : \mathcal{Z} \to \mathbb{R}$ définie par

   $$g(x,y,z) = (x-1)^2 + y^2 + z^2.$$

   Dessiner sur $\mathcal{Z}$ trois ensembles de niveau $\{g = R^2\}$ avec $R > 2$, $\{g = 4\}$, et $\{g = r^2\}$ avec $0 < r < 2$.

   (c) Pour tout $r > 0$, on note S_r la sphère de centre $(1,0,0)$ et de rayon r. En donner une équation cartésienne, et montrer que si $r \neq 2$, $\mathcal{Z} \cap S_r$ est une sous-variété de dimension 1 de $\mathbb{R}^3$. Qu'en est-il si $r = 2$?

6. Construire cinq champs de vecteurs X, X', Y, Z, T partout non-nuls définis sur $\mathcal{Z}$ tels que :

   - toutes les courbes intégrales de X sont périodiques de même période.
   - toutes les courbes intégrales de X' sont périodiques mais n'ont pas toutes la même période.
   - les trajectoires de flot de Y sont les droites verticales $\{x = ct., y = ct.\}$.
   - aucune des trajectoires de flot de Z n'est périodique, mais la projection orthogonale de toute trajectoire de Z sur le plan $\{z = 0\}$ est périodique non constante.
   - le champ T possède une trajectoire non-périodique dont l'image est contenue dans un compact de $\mathcal{Z}$.

7. Étant donnés deux champs de vecteurs X et Y comme ci-dessus, existe-t-il un difféomorphisme $\varphi \in \mathrm{Diff}(\mathcal{Z})$ tel que $\varphi_* X = Y$?

8. Soient $p, q \in \mathcal{Z}$ deux points distincts. Donner deux difféomorphismes de $\mathcal{Z}$ qui envoient p sur q, l'un qui soit à support compact et l'autre qui ne soit pas à support compact.

9. (Bonus) Démontrer que le quotient de $\mathcal{Z}$ par la relation d'équivalence engendrée par

$$(x, y, z) \sim (-x, -y, z), \qquad (x, y, z) \in \mathcal{Z}$$

   est une variété difféomorphe à $\mathcal{Z}$.