

# Notes de cours de Géométrie différentielle

Alexandru OANCEA

Université Pierre et Marie Curie

Master de mathématiques fondamentales, 1<sup>ère</sup> année

16 septembre 2016

Page web du cours :

[https://webusers.imj-prg.fr/~alexandru.oancea/  
2016-M1-GEO-DIFF/geo-diff-2016.html](https://webusers.imj-prg.fr/~alexandru.oancea/2016-M1-GEO-DIFF/geo-diff-2016.html)

## PRÉREQUIS

Je vous encourage vivement à revoir la partie du **cours de calcul différentiel** concernant le **théorème des fonctions implicites** et le **théorème d'inversion locale** (les énoncés, les exemples, les exercices). Ce sont des théorèmes qui jouent un rôle important en géométrie différentielle. Nous les expliquerons à nouveau en cours, mais il est toutefois utile de réviser.

## CONVENTIONS

Pour alléger les notations, on désigne par *application lisse* une application différentiable de classe  $C^\infty$ . Dans la première partie du texte, la source et le but d'une telle application sont (des ouverts dans) des espaces de Banach de dimension finie. Par la suite, la source et le but de telles applications seront des ouverts, ou encore des ensembles plus généraux, dans des variétés lisses, que nous définirons.

De la même manière, l'on désigne simplement par *difféomorphisme* un difféomorphisme lisse, c'est-à-dire une application bijective qui est lisse et dont l'inverse est lisse.

Lorsque l'on voudra insister sur le caractère non-lisse d'une variété ou d'une application entre variétés, l'on spécifiera le cas échéant sa classe de différentiabilité ou bien son caractère continu.

L'on notera un *isomorphisme canonique* entre deux objets par le symbole

$$\cong .$$

Pour désigner l'*identification* de deux objets par un isomorphisme canonique (en général sous-entendu) on utilisera le symbole

$$\equiv .$$

Exemple : soit  $V$  un espace vectoriel de dimension finie.  $V \cong V^{**}$  signifie que  $V$  est canoniquement isomorphe à son bi-dual.  $V \equiv V^{**}$  signifie que l'on regarde les éléments de  $V$  comme des éléments du bi-dual dans une situation géométrique donnée.

L'on note un *isomorphisme quelconque*, éventuellement non-canonique, entre deux objets par le symbole

$$\simeq .$$

Exemple : si  $V$  est un espace vectoriel de dimension finie l'on a  $V \simeq V^*$ .

## BIBLIOGRAPHIE SÉLECTIVE

Les trois premiers livres, ainsi que le premier chapitre du quatrième, contiennent à peu de choses près le matériel que nous allons couvrir en cours. Il faut les feuilleter tous et en choisir un, selon votre goût.

Les livres qui suivent dans la liste sont de beaux livres que vous pouvez lire. Le M1 est le moment où vous pouvez commencer à lire de vrais livres de maths, si vous ne l'avez pas encore fait. Ce n'est que de cette manière que vous pourrez acquérir la culture mathématique qui vous permettra de former votre propre perspective sur les mathématiques. Le fait d'acquérir une perspective personnelle sur les mathématiques que vous apprenez est sans doute l'un des buts à long terme que vous devez vous fixer.

- (1) J. Lafontaine, *Introduction aux variétés différentielles*, EDP Sciences, 2010.
- (2) F. Paulin, *Géométrie différentielle élémentaire*, notes de cours de niveau M1, FIMFA, ENS Ulm, 2006-2007, disponible en ligne : [http://www.math.u-psud.fr/~paulin/notescours/cours\\_geodiff.pdf](http://www.math.u-psud.fr/~paulin/notescours/cours_geodiff.pdf)
- (3) C. Viterbo, *Notes de cours de Géométrie Différentielle*, notes de cours de niveau M1, FIMFA, ENS Ulm, 2013, disponible en ligne : <http://www.math.ens.fr/~viterbo/Cours-Geo-Diff-2012/Poly-Geodiff-2013.pdf>
- (4) S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine, *Géométrie riemannienne*, Springer, 1987, **Chapitre 1**.
- (5) F. Warner, *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, Springer, GTM, 1983.
- (6) J. Milnor, *Topology from the differentiable viewpoint*, Princeton Univ. Press, 1997 (1965).
- (7) M. do Carmo, *Differential geometry of curves and surfaces*, Prentice-Hall, 1976.
- (8) J. Milnor, *Morse theory*, Princeton Univ. Press, 1963.
- (9) G. Bredon, *Topology and geometry*, Springer, GTM, 1994.
- (10) M. Spivak, *Differential geometry*, Publish or Perish, 1979, 5 volumes.
- (11) B. Dubrovin, A. Fomenko, S. Novikov, *Modern geometry*, Springer, GTM, 3 volumes.

La dernière référence est un ouvrage panoramique. Il est utile pour obtenir une vue d'ensemble, mais il n'y a que peu ou pas de démonstrations. Sa lecture doit être complétée par d'autres références.

## TABLE DES MATIÈRES

Prérequis	2
Conventions	2
Bibliographie sélective	3
1. Des sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ aux variétés abstraites	5
1.1. Quelques notions de calcul différentiel revisitées	5
1.2. Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$	8
1.3. Trois digressions sur l'algèbre linéaire, les catégories, et les propriétés d'universalité	11
1.4. Immersions et submersions	17
1.5. Variétés abstraites, ou non-plongées	19
1.6. Fonctions de troncature lisses. Plongements dans des espaces euclidiens	21
2. Fibré tangent. Fibrés vectoriels	26
2.1. Espace tangent. Application tangente	26
2.2. Fibré tangent. Champs de vecteurs	39
2.3. La notion de fibré vectoriel	42
3. Exemples et constructions de variétés	49
3.1. Produit	49
3.2. Somme connexe	49
3.3. Variétés affines	49
3.4. Variétés projectives	50
3.5. Actions de groupes discrets	50
3.6. Groupes de Lie : exemples	55
3.7. Actions de groupes de Lie. La notion de fibré principal	58
3.8. Espaces homogènes	61
4. Champs de vecteurs. Flots. Difféomorphismes	66
4.1. Un champ de vecteurs est une équation différentielle	66
4.2. Flots. Difféomorphismes. Redressement	69
4.3. Crochet de Lie. Dérivée de Lie	76
4.4. Groupes de Lie et algèbres de Lie	85
5. Formes différentielles. Intégration	96
5.1. Fibré cotangent	96
5.2. Intégration des 1-formes	101
5.3. Formes différentielles de degré supérieur	105
5.4. Variétés orientées. Intégrale des $k$ -formes différentielles	115
5.5. Formule de Stokes. Variétés à bord. Différentielle extérieure. Cohomologie de De Rham	127
5.6. Compléments sur la différentielle extérieure. Calcul de Lie	166
Annexe A. Courbes dans $\mathbb{R}^2$	173
Annexe B. Surfaces dans $\mathbb{R}^3$	182

## 1. DES SOUS-VARIÉTÉS DE $\mathbb{R}^n$ AUX VARIÉTÉS ABSTRAITES

**1.1. Quelques notions de calcul différentiel revisités.** Dans cette section je ne donne pas de définitions formelles, vous les avez tous vues en cours de calcul différentiel. Je donne plutôt quelques interprétations informelles, nécessairement subjectives.

**DIFFÉRENTIABILITÉ.** Soit  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert. Une application  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  est différentiable en un point  $p \in U$  lorsqu'elle peut être “bien approchée” par une application linéaire au voisinage de  $p$ . “Bien” signifie ici que, localement près de  $p$ , notre application diffère d'une certaine application linéaire  $df(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  par un terme à variation sous-linéaire :

$$(1.1) \quad f(p+h) = f(p) + df(p) \cdot h + o(|h|).$$

Pourquoi est-ce utile ? Parce-que les applications linéaires sont les plus simples (après les applications constantes) et donc, lorsque l'on veut comprendre une certaine application non-linéaire, il est utile de la comparer (localement) à celles-ci.

Cette démarche est centrale en analyse mathématique : certains objets “idéaux” sont plus simples à comprendre (n'est-ce pas ?). Dans l'étude d'un phénomène réaliste on procède par étapes : l'on étudie d'abord ces objets idéaux (les applications linéaires, ou bien les applications multilinéaires), et l'on développe ensuite une “théorie d'approximation”. C'est ce que vous avez fait durant une bonne partie de vos études de Licence : l'étude des applications linéaires entre espaces vectoriels constituait le sujet de l'Algèbre linéaire. L'étude des applications bilinéaires vous occupe encore en M1 (voir par exemple le cours d'Algèbre Géométrique). La théorie d'approximation correspondante était le sujet du cours de Calcul différentiel.

**L'un des buts du cours de Géométrie différentielle est de vous apprendre à *visualiser* de manière avisée les objets et phénomènes que vous avez déjà rencontrés en cours de Calcul différentiel, en cours d'Equations différentielles, ou en cours d'Intégration.**

D'un certain point de vue, aucune des notions que nous allons discuter dans ce cours n'est vraiment nouvelle. Que ça soit en cours de Calcul différentiel, ou bien d'Equations différentielles, ou bien d'Intégration, vous les avez toutes déjà rencontrées, parfois sous une forme dissimulée. Vous apprendrez seulement à *regarder* avec un œil éduqué ces objets que vous avez déjà rencontrés. Mais pour cela il faut apprendre un *langage nouveau*. Comme tout nouveau langage, celui-ci vous ouvrira les portes d'un monde très riche, insoupçonné.

DIFFÉOMORPHISME. La notion de difféomorphisme est subtile, mais nécessaire. Vous avez eu l'occasion de l'apprécier concrètement lorsque vous avez eu à *calculer des intégrales* ou bien lorsque vous avez eu à *résoudre des équations différentielles*. Le fait déroutant est que, pour des raisons historiques, on l'appelle dans ces situations communément *changement de variables*, ou encore *changement de coordonnées*. Mais c'est la même chose!

Voici un exemple classique en intégration : redémontrons l'égalité  $\int_0^\infty e^{-\sigma t^2/2} dt = \sqrt{\pi/2\sigma}$  pour tout  $\sigma > 0$ . Notons  $I = \int_0^\infty e^{-\sigma t^2/2} dt$ . En utilisant le théorème de Fubini et ensuite le théorème de changement de variable dans une intégrale double on obtient

$$I^2 = \iint_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+} e^{-\sigma(x^2+y^2)/2} dx dy = \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty r e^{-\sigma r^2/2} dr d\theta = \pi/2\sigma.$$

Une fonction peut paraître compliquée dans un système de coordonnées, mais elle prend une forme simple dans un autre système de coordonnées. Exemple :  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ . En coordonnées polaires cette fonction prend la forme simple  $(r, \theta) \mapsto r$ . Elle a l'air bien différente, mais c'est la même fonction! Rendons explicite ce qui s'est passé : l'application  $\phi : ]0, \infty[ \times ]0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus [0, \infty[ \times \{0\}$ ,  $(r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$  est un difféomorphisme et  $f \circ \phi(r, \theta) = r$ . Ainsi, la fonction non-linéaire  $f$  devient linéaire après composition par un difféomorphisme (nécessairement non-linéaire). Nous verrons d'autres tels exemples de *redressement*, ou de *forme normale*.

**Lorsque nous les regardons en tant que changements de variables, les difféomorphismes sont des outils pour simplifier les calculs. Lorsque l'on essaie de comprendre certains objets à difféomorphisme près, l'on s'affranchit de formules explicites et les difféomorphismes deviennent un filtre qui fait ressortir leurs propriétés calitatives.**

Un autre point de vue, moins intuitif, est *catégorique*. L'on définit plus bas la catégorie VarDiff des variétés lisses, avec morphismes donnés par l'ensemble des applications lisses. Les difféomorphismes sont les isomorphismes dans cette catégorie.

(3) *Théorème d'inversion locale*. Le théorème d'inversion locale est le théorème clé du calcul différentiel. Peut-être que le seul autre résultat qui le surpasse en importance est la règle de dérivation des fonctions composées :  $d(f \circ g)(p) = df(g(p)) \circ dg(p)$ . Il est emblématique pour la philosophie du sujet : une information sur la différentielle en un point est traduite en une information locale sur l'objet non-linéaire sous-jacent.

(4) *Local vs. global*. On dit qu'une propriété est "locale" en un point si elle est valable sur un voisinage ouvert (non-spécifié, pensé comme étant très petit) du point. L'étude des propriétés locales des applications lisses est le sujet du calcul différentiel (voir aussi le commentaire sur le théorème d'inversion locale). L'étude de leurs propriétés globales est le sujet de la "topologie différentielle".

## 1.2. Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ .

**Définition 1.1.** Une sous-variété lisse de  $\mathbb{R}^n$  est un sous-ensemble  $M \subset \mathbb{R}^n$  possédant la propriété suivante : pour tout point  $p \in M$  il existe un voisinage ouvert  $p \in U \subset \mathbb{R}^n$ , un entier  $0 \leq k \leq n$ , et une application différentiable  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  qui est un difféomorphisme sur son image, tels que

$$\phi(M \cap U) = (\mathbb{R}^k \times \{0\}) \cap \phi(U).$$

On regarde  $M$  comme espace topologique avec la topologie induite.

**Exercice 1.** Montrer que l'entier  $k$  est bien défini en tout point  $p$ , et qu'il est constant au voisinage de  $p$ . On appelle cet entier *dimension de  $M$  en  $p$* .

Lorsque l'entier  $k$  est le même pour tout point  $p \in M$  on parle de *sous-variété de dimension  $k$* .

**Notation :**  $M^k \subset \mathbb{R}^n$  désigne une sous-variété de dimension  $k$  de  $\mathbb{R}^n$ . Ne pas confondre cette notation avec le produit cartésien  $\underbrace{M \times \dots \times M}_{k \text{ fois}}$  !

Réinterprétons la Définition 1.1 en termes d'équations. Soient

$$x^1, \dots, x^n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

les fonctions coordonnées canoniques et notons  $\phi^i := x^i \circ \phi$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Puisque  $\mathbb{R}^k \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$  peut être réécrit comme  $\mathbb{R}^k \times \{0\} = \{x \in \mathbb{R}^n : x^{k+1} = \dots = x^n = 0\}$ , on obtient que

$$M \cap U = \{p \in U : \phi^{k+1}(p) = \dots = \phi^n(p) = 0\}.$$

On voit qu'une sous-variété lisse de dimension  $k$  dans  $\mathbb{R}^n$  peut être exprimée localement comme lieu commun d'annulation de  $n - k$  fonctions lisses. On dit encore que

$$\phi^{k+1} = \dots = \phi^n = 0$$

est un *système local d'équations pour  $M$  dans  $U$* . On observe par ailleurs que la fonction  $\bar{\phi} = (\phi^{k+1}, \dots, \phi^n) : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  a une différentielle surjective en tout point. Ceci nous amène à donner une définition équivalente des sous-variétés.

**Définition 1.2** (submersion). Une application  $\bar{\phi} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  est une submersion (en un point  $p \in U$ ) si  $d\bar{\phi} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  est surjective en tout point de  $U$  (respectivement en  $p$ ). Le rang de  $\bar{\phi}$  est défini comme étant  $n - k$ .

**Définition 1.3** (sous-variétés via submersions). Une sous-variété de dimension  $k$  de  $\mathbb{R}^n$  est un sous-ensemble  $M^k \subset \mathbb{R}^n$  qui s'écrit localement comme lieu d'annulation d'une submersion de rang  $n - k$ .

**Exercice 2.** Montrez l'équivalence des définitions 1.1 et 1.3 en utilisant le théorème d'inversion locale. (Nous venons de démontrer une implication.)

Réinterprétons la Définition 1.1 en termes de paramétrisations. En considérant  $\phi^{-1}|_{\phi(U) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\})}$  il en découle directement que toute sous-variété  $M^k \subset \mathbb{R}^n$  est *localement paramétrée par un ouvert de  $\mathbb{R}^k$* , à savoir pour tout  $p \in M$  il existe un voisinage  $p \in V \subset M$ , un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{R}^k$  et une application lisse  $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  à différentielle injective, telle que  $\psi(\Omega) = V$  et  $\psi : \Omega \rightarrow V$  soit un homéomorphisme (on dit encore que  $\psi$  est un *homéomorphisme sur image*). Ceci nous amène à donner une troisième définition équivalente des sous-variétés.

**Définition 1.4** (immersion, plongement). *Une application  $\psi : \Omega \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une immersion (en un point  $q \in \Omega$ ) si sa différentielle  $d\psi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  est injective en tout point de  $\Omega$  (respectivement au point  $q$ ). Le rang de  $\psi$  est défini comme étant  $k$ .*

*Une application  $\psi : \Omega \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  est un plongement si c'est une immersion injective qui est un homéomorphisme sur son image.*

Noter que, alors que la notion d'immersion est locale, la notion de plongement est globale.

**Définition 1.5.** *Une sous-variété de dimension  $k$  de  $\mathbb{R}^n$  est un sous-ensemble  $M^k \subset \mathbb{R}^n$  qui s'écrit localement comme image d'un plongement de rang  $k$ .*

**Exercice 3.** Démontrer l'équivalence des définitions 1.1 et 1.5 en utilisant le théorème d'inversion locale. (Nous venons de démontrer une implication.)

**Exercice 4.** Montrer en utilisant les différentes définitions que le cercle  $S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \subset \mathbb{C}$  est bien une sous-variété lisse de dimension 1. De même, la sphère  $S^n := \{(x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x^1)^2 + \dots + (x^{n+1})^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$  est une sous-variété lisse de dimension  $n$ . L'ellipsoïde

$$E^n(a_1, \dots, a_{n+1}) = \{(x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \frac{(x^1)^2}{a_1^2} + \dots + \frac{(x^{n+1})^2}{a_{n+1}^2} = 1\}$$

avec  $a_1, \dots, a_{n+1} > 0$  est une sous-variété lisse de dimension  $n$ . Le cône

$$C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2\}$$

n'est pas une sous-variété lisse, mais  $C \setminus \{0\}$  est une sous-variété de dimension 2. L'union de la boule ouverte de rayon 1 dans  $\mathbb{R}^3$  avec le cercle unité dans  $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$  n'est pas une sous-variété de  $\mathbb{R}^3$ . La boule unité fermée dans  $\mathbb{R}^3$  n'est pas une sous-variété au sens des définitions précédentes (mais elle est une sous-variété à bord, au sens d'une définition plus générale que l'on donnera plus tard).

**Exercice 5.** Réinterpréter le théorème des fonctions implicites en termes de sous-variétés. Expliquer le sens du nom “fonctions implicites”.

### 1.3. Trois digressions sur l'algèbre linéaire, les catégories, et les propriétés d'universalité.

DIGRESSION : ÉQUATIONS PARAMÉTRIQUES VS. ÉQUATIONS CARTÉSIENNES POUR DES SOUS-ESPACES VECTORIELS. Les deux points de vue précédents sur les sous-variétés de  $\mathbb{R}^n$  sont des généralisations des deux points de vue familiers suivants concernant les sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel  $V$  : ceux-ci peuvent être décrits ou bien par des équations paramétriques, ou bien par des équations cartésiennes.

Étant donné un sous-espace  $E^k \subset V^n$  (la notation signifie que  $E$  est de dimension  $k$  et  $V$  est de dimension  $n$ ), le point de vue des équations paramétriques consiste à donner une application linéaire  $\Psi : \mathbb{R}^N \rightarrow V$  avec  $\text{im } \Psi = E$ . Une telle "paramétrisation linéaire" est injective précisément lorsque  $N = k = \dim E$ , et dans ce cas  $\Psi : \mathbb{R}^k \rightarrow E$  est un isomorphisme linéaire.

Le point de vue des équations cartésiennes consiste à se donner une application linéaire  $\Phi : V \rightarrow \mathbb{R}^N$  avec  $\ker \Phi = E$ . Un tel "système d'équations cartésiennes" est surjectif précisément lorsque  $N = n - k$ , la codimension de  $E$ , notée aussi  $\text{codim } E$ . Dans ce cas l'application induite  $\bar{\Phi} : V/E \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  est un isomorphisme linéaire.

Ces deux points de vue sont *duaux* en un sens très précis. Une paramétrisation linéaire injective équivaut à la donnée de  $k$  éléments linéairement indépendants  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_k \in \text{Hom}(\mathbb{R}, V)$  tels que  $\text{im } \epsilon_i \subset E$  pour tout  $i$ . Via l'isomorphisme canonique

$$\text{Hom}(\mathbb{R}, V) \xrightarrow{\sim} V, \quad \epsilon \mapsto e := \epsilon(1)$$

la condition  $\text{im } \epsilon_i \subset E$  se traduit par  $e_i \in E$ . En d'autres termes, se donner une paramétrisation linéaire injective de  $E$  revient à se donner une base  $(e_1, \dots, e_k)$  de  $E$ .

La donnée d'un système minimal d'équations cartésiennes équivaut à la donnée de  $n - k$  éléments linéairement indépendants  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-k} \in \text{Hom}(V, \mathbb{R})$  tels que  $E \subset \ker \alpha_i$  pour tout  $i$ . L'espace  $\text{Hom}(V, \mathbb{R})$  est appelé le *dual de  $V$*  et il est noté

$$V^* := \text{Hom}(V, \mathbb{R}).$$

Soit  $\pi : V \rightarrow V/E$  la projection canonique. Celle-ci induit un isomorphisme canonique

$$(V/E)^* \xrightarrow{\sim} \{\alpha \in V^* : E \subset \ker \alpha\}, \quad a \mapsto \alpha := a \circ \pi.$$

Via cet isomorphisme, la donnée d'un système minimal d'équations cartésiennes équivaut à la donnée d'une base  $(a_1, \dots, a_{n-k})$  de  $(V/E)^*$ .

FIN DE LA DIGRESSION.

DIGRESSION : ISOMORPHISMES CANONIQUES, CATÉGORIES. Arrêtons-nous un instant sur la notion d'*isomorphisme canonique* qui est apparue à plusieurs reprises dans la discussion précédente.

**Définition informelle.** Soit  $\mathcal{C}$  un “contexte mathématique”. Un objet est dit *canonique* si sa construction ne fait pas intervenir de choix extérieurs au contexte  $\mathcal{C}$ .

Dans une première approximation, lorsque le contexte mathématique auquel on fait référence est celui des espaces vectoriels, un objet est dit “canonique” si sa construction ne nécessite pas le choix d’une base. Nous rendrons rigoureuse cette définition plus bas, lorsque nous parlerons de *catégories*.

**Exemple.** Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension finie. On a un isomorphisme canonique

$$V \xrightarrow{\cong} V^{**}, \quad v \mapsto (\alpha \mapsto \alpha(v)) \quad (\alpha \in V^*)$$

**Exemple.** Soit  $V$  est un espace vectoriel de dimension finie. Les espaces  $V$  et  $V^*$  sont isomorphes (puisque de même dimension), mais *pas* de manière canonique. Vous connaissez au moins un moyen de décrire un isomorphisme : on *choisit* une base  $(e_i)$  de  $V$ , on définit la *base duale*  $(e_i^*)$  de  $V^*$  par  $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$ , avec

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

le *symbole de Kronecker*, et l’on définit l’isomorphisme linéaire  $V \xrightarrow{\cong} V^*$  par  $e_i \mapsto e_i^*$ .

Une meilleure manière de décrire un isomorphisme entre  $V$  et  $V^*$  est de se donner un produit scalaire, ou plus généralement une forme bilinéaire non-dégénérée sur  $V$ . Une forme bilinéaire  $B \in \text{Bil}(V \times V, \mathbb{R})$  est dite *non-dégénérée* si  $B(v, \cdot) = 0$  implique  $v = 0$ . Un *produit scalaire* sur  $V$  est une forme bilinéaire non-dégénérée symétrique ( $B(v, w) = B(w, v)$  pour tous  $v, w \in V$ ) et définie positive ( $B(v, v) > 0$  pour tout  $v \in V \setminus \{0\}$ ). En présence d’une forme bilinéaire non-dégénérée  $B \in \text{Bil}(V \times V, \mathbb{R}) \cong V^* \otimes V^*$ , l’application  $V \rightarrow V^*$ ,  $v \mapsto B(v, \cdot)$  est une application linéaire entre espaces de même dimension, et donc un isomorphisme linéaire de  $V$  sur  $V^*$ . L’isomorphisme entre  $V$  et  $V^*$  n’est pas canonique dans la catégorie des espaces vectoriels réels, mais il est canonique dans la catégorie des espaces vectoriels réels munis d’une forme bilinéaire non-dégénérée.

**Exercice 6.** Démontrer que l’on a un isomorphisme canonique  $\text{Bil}(V \times V, \mathbb{R}) \cong V^* \otimes V^*$ .

## La notion de catégorie, I.

**Définition 1.6.** Une catégorie  $\mathcal{C}$  consiste en une collection d'objets, notée  $\text{Ob}\mathcal{C}$ , ainsi que de la donnée d'un ensemble de morphismes  $\mathcal{C}(x, y)$  entre chaque deux objets  $x$  et  $y$  de  $\mathcal{C}$ . On requiert l'existence d'un morphisme distingué  $\mathbb{1}_x \in \mathcal{C}(x, x)$  pour tout objet  $x$ , appelé identité de  $x$ , et d'une application de composition

$$\mathcal{C}(x, y) \times \mathcal{C}(y, z) \rightarrow \mathcal{C}(x, z),$$

notée  $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \cdot \beta$ , ou encore  $\beta \circ \alpha$ . On demande à ce que cette loi de composition soit associative, et l'on demande à ce que la composition à droite ou à gauche avec l'identité d'un objet soit l'identité.

Lorsque je parlais plus haut de “contexte mathématique”, ce qu'il faut lire désormais est “catégorie”. Vous connaissez déjà de nombreux exemples.

- La catégorie Set des ensembles, avec  $\text{Set}(x, y) = y^x$ .
- La catégorie Top des espaces topologiques, avec  $\text{Top}(x, y)$  l'ensemble des applications continues de  $x$  vers  $y$ .
- La catégorie Vect des espaces vectoriels de dimension finie, avec  $\text{Vect}(x, y)$  l'ensemble des applications linéaires de  $x$  vers  $y$ .
- La catégorie EuclVect des espaces vectoriels de dimension finie munis d'un produit scalaire, avec  $\text{EuclVect}(x, y)$  l'ensemble des applications linéaires de  $x$  vers  $y$  qui préservent le produit scalaire.
- La catégorie Op<sub>n</sub> des ouverts de  $\mathbb{R}^n$ , avec  $\text{Op}_n(x, y)$  l'ensemble des applications lisses définies sur  $x$  à valeurs dans  $y$ .
- La catégorie VarDiff des variétés différentielles lisses de dimension finie, avec  $\text{VarDiff}(x, y)$  l'ensemble des applications lisses de  $x$  vers  $y$ . Cette dernière catégorie fait l'objet de ce cours.

Nous pouvons reformuler la discussion précédente dans les termes suivants :  $V$  est canoniquement isomorphe à  $V^{**}$  dans Vect, et  $V$  est canoniquement isomorphe à  $V^*$  dans EuclVect.

**Exercice 7.** Préciser le dernier énoncé en indiquant quel produit scalaire on met sur  $V^*$ .

FIN DE LA DIGRESSION.

**DIGRESSION : OBJETS DÉFINIS PAR DES PROPRIÉTÉS D'UNIVERSALITÉ.** Vous avez déjà rencontré de nombreux tels objets, même si vous n'avez pas toujours formulé les propriétés d'universalité correspondantes. Exemples dans la catégorie des espaces vectoriels : le quotient d'un espace vectoriel par un sous-espace, la somme directe, le produit direct, le produit tensoriel. L'idée de cette digression est que toute construction “canonique” dans Vect produit un modèle pour un objet défini par une propriété d'universalité (objet universel).

Plutôt que de donner la définition précise de ce qu'est en général une propriété d'universalité, nous allons illustrer cette notion par un exemple détaillé. Nous donnons par ailleurs les propriétés d'universalité de la somme directe, respectivement du produit direct d'une famille d'espaces vectoriels.

*Espace vectoriel quotient.* Soit  $V$  un espace vectoriel et  $E \subseteq V$  un sous-espace. Considérons sur  $V$  la relation d'équivalence  $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in E$  et notons  $V/E$  l'ensemble des classes d'équivalence. Celui-ci porte une structure naturelle d'espace vectoriel, pour laquelle la projection  $\pi : V \rightarrow V/E$  qui associe à un élément  $x$  sa classe d'équivalence  $[x]$  est une application linéaire. L'espace vectoriel  $V/E$  est appelé *l'espace vectoriel quotient de  $V$  par  $E$* . L'utilité de cette construction est donnée par le fait suivant :

**Propriété d'universalité du quotient.** Pour tout espace vectoriel  $W$  et toute application linéaire  $f : V \rightarrow W$  telle que  $\ker f \supseteq E$ , il existe une unique application linéaire  $\bar{f} : V/E \rightarrow W$  telle que  $\bar{f} \circ \pi = f$ .

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \downarrow \pi & & \nearrow \exists! \bar{f} \\ V/E & & \end{array}$$

Prenons maintenant un point de vue légèrement différent. Appelons *un quotient de  $V$  par  $E$*  une paire  $(Q, \pi)$ , avec  $Q$  un espace vectoriel et  $\pi : V \rightarrow Q$  une application linéaire telle que  $\ker \pi = E$ , qui vérifie la *propriété d'universalité* suivante : pour tout espace vectoriel  $W$  et toute application linéaire  $f : V \rightarrow W$  telle que  $\ker f \supseteq E$ , il existe une unique application linéaire  $\bar{f} : Q \rightarrow W$  telle que  $f = \bar{f} \circ \pi$ .

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \downarrow \pi & & \nearrow \exists! \bar{f} \\ Q & & \end{array}$$

Évidemment, le quotient  $V/E$  vérifie cette propriété d'universalité. Mais y aurait-il d'autres quotients ? La réponse est fournie par la proposition suivante, qui montre que la construction est parfaitement déterminée.

**Proposition 1.7.** *Un quotient de  $V$  par  $E$  est unique à isomorphisme unique près, c'est-à-dire si  $(Q, \pi)$  et  $(Q', \pi')$  sont deux quotients de  $V$  par  $E$ , il existe un isomorphisme canonique  $Q \xrightarrow{\cong} Q'$ .*

*Démonstration.* Appliquons la propriété universelle de  $(\mathcal{Q}, \pi)$  avec  $W = \mathcal{Q}'$  et  $f = \pi'$ . L'on trouve une unique application  $\bar{\pi}' : \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{Q}'$  telle que  $\bar{\pi}' \circ \pi = \pi'$ . Appliquons ensuite la propriété universelle de  $(\mathcal{Q}', \pi')$  avec  $W = \mathcal{Q}$  et  $f = \pi$ . L'on trouve une unique application  $\bar{\pi} : \mathcal{Q}' \rightarrow \mathcal{Q}$  telle que  $\bar{\pi} \circ \pi' = \pi$ . En particulier  $(\bar{\pi} \circ \bar{\pi}') \circ \pi = \pi$ . Puisque  $\text{Id}_{\mathcal{Q}} \circ \pi = \pi$ , l'unicité dans la propriété universelle de  $(\mathcal{Q}, \pi)$  avec  $W = \mathcal{Q}$  et  $f = \pi$  montre que  $\bar{\pi} \circ \bar{\pi}' = \text{Id}_{\mathcal{Q}}$ . De même l'on démontre que  $\bar{\pi}' \circ \bar{\pi} = \text{Id}_{\mathcal{Q}'}$ , de sorte que  $\bar{\pi}'$  et  $\bar{\pi}$  sont des isomorphismes canoniquement déterminés, inverses l'un de l'autre.

$$\begin{array}{ccc}
 V \xrightarrow{\pi'} \mathcal{Q}' & & V \xrightarrow{\pi} \mathcal{Q} \\
 \pi \downarrow \quad \exists! \bar{\pi}' \nearrow & & \pi \downarrow \quad \exists! \bar{\pi} \nearrow \\
 \mathcal{Q} & & \mathcal{Q}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 V \xrightarrow{\pi} \mathcal{Q} & & V \xrightarrow{\pi} \mathcal{Q} \\
 \pi \downarrow \quad \text{Id} = \bar{\pi} \circ \bar{\pi}' \nearrow & & \pi \downarrow \quad \text{Id} = \bar{\pi} \circ \bar{\pi}' \nearrow \\
 \mathcal{Q} & & \mathcal{Q}
 \end{array}$$

□

L'on lit la proposition précédente en disant que *la propriété d'universalité détermine le quotient à isomorphisme unique près*. La construction du quotient  $V/E$  montre l'existence du quotient. La propriété d'universalité met en avant la projection canonique  $\pi : V \rightarrow V/E$ , que nous avons par ailleurs déjà utilisée dans la digression sur la dualité.

*Somme directe et produit direct.* Soit  $(V_i)$  une famille d'espaces vectoriels.

**Propriété d'universalité de la somme directe.** Une *somme directe* des  $V_i$  est un espace vectoriel  $\mathcal{Q}$  muni d'applications linéaires  $\text{incl}_i : V_i \rightarrow \mathcal{Q}$  qui satisfont la propriété d'universalité suivante : pour tout espace vectoriel  $W$  et toute collection d'applications linéaires  $f_i : V_i \rightarrow W$ , il existe une unique application linéaire  $F : \mathcal{Q} \rightarrow W$  telle que  $F \circ \text{incl}_i = f_i$  pour tout  $i$ .

Cette propriété d'universalité détermine  $\mathcal{Q}$  à isomorphisme canonique près. Un modèle explicite est donné par  $\mathcal{Q} = \bigoplus_i V_i$ , dont les éléments sont les sommes formelles *finies* d'éléments appartenant aux  $V_i$ . Les applications  $\text{incl}_i$  sont les inclusions canoniques, et l'application  $F$  déterminée par une collection  $\{f_i : V_i \rightarrow W\}$  est notée  $\bigoplus_i f_i$ .

$$\begin{array}{ccc}
 V_i & \xrightarrow{f_i} & W \\
 \text{incl}_i \downarrow & \nearrow \bigoplus_i f_i & \\
 \bigoplus_i V_i & & 
 \end{array}$$

**Propriété d'universalité du produit direct.** Un *produit direct* des  $V_i$  est un espace vectoriel  $\mathcal{Q}$  muni d'applications linéaires  $\text{proj}_i : \mathcal{Q} \rightarrow V_i$  qui satisfont la propriété suivante : pour tout espace vectoriel  $W$  et toute collection d'applications linéaires  $g_i : W \rightarrow V_i$ , il existe une

unique application linéaire  $G : W \rightarrow \mathcal{Q}$  telle que  $proj_i \circ G = g_i$  pour tout  $i$ .

Cette propriété d'universalité détermine  $\mathcal{Q}$  à isomorphisme canonique près. Un modèle explicite est donné par  $\mathcal{Q} = \prod_i V_i$ , dont l'ensemble sous-jacent est le produit cartésien des  $V_i$ . Les applications  $proj_i$  sont les projections canoniques, et l'application  $G$  déterminée par une collection  $\{g_i : W \rightarrow V_i\}$  est notée  $\prod_i g_i$ .

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\prod_i g_i} & \prod_i V_i \\ & \searrow g_i & \downarrow proj_i \\ & & V_i \end{array}$$

**Remarque.** Les opérations de somme directe et celle de produit direct peuvent être interprétées comme étant duales l'une de l'autre. La somme directe est un espace *depuis lequel* on peut définir des morphismes, le produit direct est un espace *vers lequel* on peut définir des morphismes. Un autre point de vue est celui des isomorphismes canoniques

$$\text{Hom}\left(\bigoplus_i V_i, W\right) \cong \prod_i \text{Hom}(V_i, W),$$

et en particulier

$$\left(\bigoplus_i V_i\right)^* \cong \prod_i V_i^*.$$

**Remarque.** Le lecteur est invité à étudier la notion de *produit tensoriel* d'espaces vectoriels, que nous développons au §5.5.2, pp. 138 sqq.

FIN DE LA DIGRESSION.

**1.4. Immersions et submersions.** Dans cette section nous donnons deux théorèmes de forme normale qui sont emblématiques de l'utilisation des difféomorphismes, et du théorème d'inversion locale.

**Théorème 1.8** (Forme normale locale pour les immersions). *Soit*

$$\psi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$$

*une immersion. Modulo composition par un difféomorphisme local au but, l'immersion s'écrit localement*

$$\psi : x \mapsto (x, 0).$$

*Démonstration.* Détaillons l'énoncé du théorème. Nous souhaitons démontrer l'énoncé suivant : pour tout  $x_0 \in \Omega$ , il existe un ouvert  $\Omega' \subseteq \Omega$  et un difféomorphisme  $f : U \xrightarrow{\cong} f(U)$  défini sur un voisinage ouvert  $U$  de  $p_0 = \psi(x_0)$ , tels que  $f \circ \psi(x) = (x, 0)$  pour tout  $x \in \Omega'$ .

Soit  $\psi = (\psi^1, \dots, \psi^n)$ . Par hypothèse  $d\psi(x_0)$  est injective, et l'on peut supposer sans perte de généralité que les dérivées  $(d\psi^1, \dots, d\psi^k)$  sont linéairement indépendantes au point  $x_0$  (dans le cas contraire on compose par une permutation des coordonnées au but). La fonction  $F : \Omega \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^n$  définie par

$$F(x, y) := \psi(x) + (0, y)$$

a une dérivée inversible en  $(x_0, 0)$ . C'est donc un difféomorphisme local. Le difféomorphisme local  $f := F^{-1}$  est le changement de variable recherché. En notant  $U$  le domaine de  $f$ , l'on choisit  $\Omega' \subseteq \Omega$  tel que  $\psi(\Omega') \subseteq U$ .  $\square$

**Théorème 1.9** (Forme normale locale pour les submersions). *Soit*

$$\bar{\phi} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$$

*une submersion. Modulo composition par un difféomorphisme local à la source, la submersion s'écrit localement*

$$\bar{\phi} : (x, y) \mapsto y.$$

*Démonstration.* Supposons sans perte de généralité que les dérivées partielles  $(\partial \bar{\phi} / \partial x^{k+1}, \dots, \partial \bar{\phi} / \partial x^n)$  sont linéairement indépendantes au point  $(x_0, y_0)$ . L'application  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$  définie par

$$F(x, y) := (x - x_0, \bar{\phi}(x, y))$$

a une différentielle inversible en  $(x_0, y_0)$ . C'est donc un difféomorphisme local et son inverse satisfait aux conclusions du théorème.  $\square$

Alors que nous les avons caractérisées en termes de submersions locales, les sous-variétés apparaissent souvent comme fibres de submersions globales.

**Définition 1.10.** *Soit  $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  une application lisse.*

- Un point  $y \in \mathbb{R}^m$  est dit valeur régulière si  $f$  est une submersion en tout point de la fibre  $f^{-1}(y)$ . (Ceci vaut en particulier si  $f^{-1}(y) = \emptyset$ .)
- Un point  $y \in \mathbb{R}^m$  est dit valeur critique si ce n'est pas une valeur régulière, ou encore s'il existe un point  $x \in f^{-1}(y)$  tel que  $df(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  ne soit pas surjective.
- Un tel point  $x$  est appelé point critique.

L'on remarquera le fait que, lorsque  $n < m$ , l'image de  $f$  est nécessairement constituée de valeurs critiques. Il découle de la discussion précédente que la préimage  $f^{-1}(y)$  d'une valeur régulière d'application lisse  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $n \geq m$  est une sous-variété de dimension  $n - m$ .

**Théorème 1.11** (Sard). *Les valeurs critiques d'une application lisse  $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  forment un ensemble de mesure nulle. En particulier, les valeurs régulières sont denses dans  $\mathbb{R}^m$ .*  $\square$

Une fonction peut être comprise via l'étude de ses ensembles de niveau. Pour une fonction lisse, un ensemble de niveau typique sera une sous-variété. Ceci fournit une nouvelle motivation pour l'étude des sous-variétés, en tant qu'objets géométriques qui permettent d'étudier les fonctions. Cette idée a été concrétisée avec un succès phénoménal par Marston Morse dans ce que l'on appelle aujourd'hui *théorie de Morse* (voir le livre de Milnor, *Morse Theory*). L'on discutera plus tard les premiers éléments de théorie de Morse, et l'on verra que cette théorie a aussi un lien avec l'idée de *discrétisation* des fonctions.

**1.5. Variétés abstraites, ou non-plongées.** Nous avons déjà établi un parallèle entre les différentes manières de définir un sous-espace vectoriel et les différentes manières de définir une sous-variété. L'étude des sous-variétés est en quelque sorte similaire à l'étude des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^n$ . Tout comme en algèbre linéaire la vraie force de la théorie ressort lorsque l'on utilise une définition qui nous affranchit de l'espace ambiant et des coordonnées, il en est de même pour les variétés.

La remarque suivante peut sembler inoffensive mais elle débouche directement sur la définition d'une variété abstraite. Soit  $M^k \subset \mathbb{R}^n$  une sous-variété de dimension  $k$ . Soient  $\phi_i : U_i \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \phi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, 2$  deux difféomorphismes de redressement comme dans la Définition 1.1, définis au voisinage d'un point  $p \in M$ . Alors

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{\cong} \phi_2(U_1 \cap U_2)$$

est un difféomorphisme, et en particulier

$$\begin{aligned} \phi_2|_{M \cap U_2} \circ \phi_1|_{M \cap U_1}^{-1} : \phi_1((M \cap U_1) \cap (M \cap U_2)) &\subseteq \mathbb{R}^k \times \{0\} \\ &\xrightarrow{\cong} \phi_2((M \cap U_1) \cap (M \cap U_2)) \subseteq \mathbb{R}^k \times \{0\} \end{aligned}$$

est un difféomorphisme. L'avantage de cette dernière formule est qu'elle ne fait intervenir que des objets qui sont définis sur  $M$ , et non pas sur (des ouverts de) l'espace ambiant.

**Définition 1.12.** Une variété de dimension  $k$  est un espace topologique  $M$  muni d'une famille  $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$  de paires  $(U_i, \phi_i)$  telles que :

- la famille  $(U_i)$  est un recouvrement ouvert de  $M$  ;
- chaque  $\phi_i : U_i \rightarrow \phi_i(U_i) \subseteq \mathbb{R}^k$  est un homéomorphisme sur son image, qui est un ouvert de  $\mathbb{R}^k$  ;
- pour tous  $i, j \in I$  l'application

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \xrightarrow{\cong} \phi_j(U_i \cap U_j)$$

est un difféomorphisme.

**Définition 1.13.** La famille  $(U_i, \phi_i)$  est appelé atlas, et chaque paire  $(U_i, \phi_i)$  est appelée carte, ou carte locale. Les difféomorphismes  $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$  sont appelées applications de changement de carte, ou fonctions de transition.

L'exemple suivant justifie la terminologie cartographique.

**Exemple 1.14.** Soit

$$S^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Soient  $N := (0, 0, 1)$  le pôle Nord et  $S := (0, 0, -1)$  le pôle Sud. On définit deux cartes

$$\phi_N : S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \phi_S : S^2 \setminus \{S\} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

par *projection stéréographique* :  $\phi_N(p)$  est l'unique point d'intersection de la demi-droite  $[N, p)$  avec le plan  $\mathbb{R}^2 \times \{0\} \equiv \mathbb{R}^2$ , et  $\phi_S(q)$  est l'unique

point d'intersection de la demi-droite  $[Sq)$  avec  $\mathbb{R}^2 \times \{0\} \equiv \mathbb{R}^2$ . Montrer que ces deux cartes définissent un atlas sur  $S^2$ .

**Le calcul différentiel peut être transféré aux variétés. Plus précisément, toute notion de calcul différentiel à caractère local peut être formulée sur les variétés.** Par exemple, une application continue  $f : M \rightarrow N$  entre deux variétés est dite *lisse* si l'application  $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$  est lisse pour toutes deux cartes  $\phi$  et  $\psi$  sur  $M$  et  $N$  respectivement !

**Exercice 8.** Une application continue  $f : M \rightarrow N$  est lisse si et seulement si pour tout point  $p \in M$  il existe deux cartes  $\phi$  et  $\psi$  définies au voisinage de  $p$  et  $f(p)$  respectivement, telles que  $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$  soit lisse.

Puisque le caractère lisse d'une application est invariant par composition avec des difféomorphismes à la source et au but, il est souvent commode de penser à un atlas donné  $\{(U_i, \phi_i)\}$  comme ayant été élargi de manière à contenir toutes les cartes  $(U, \phi)$  compatibles simultanément avec toutes les  $(U_i, \phi_i)$ . Un tel atlas est dit *maximal*. L'atlas maximal associé à un atlas donné  $\{(U_i, \phi_i)\}$  contient en particulier toutes les restrictions des  $\phi_i$  aux ouverts de  $U_i$ .

**Exercice 9.** Donner les définitions de submersion, immersion, difféomorphisme, point critique dans les contexte des variétés. Formuler et démontrer des théorèmes d'inversion locale, de fonctions implicites, de forme normale pour immersions et submersions.

Les variétés sont un exemple d'*objet mathématique défini à partir d'un modèle local*. Vous rencontrerez ce genre de construction dans de nombreux contextes, dont voici une première liste. Les *variétés complexes*, qui sont des objets centraux en analyse complexe, sont modelées sur des ouverts de  $\mathbb{C}^n$  en demandant que les applications de changement de carte soient des biholomorphismes (applications bijectives, dérivables au sens complexe, avec inverse dérivable au sens complexe). Les *variétés de Banach* sont modelées sur des ouverts dans des espaces de Banach, en demandant que les applications de changement de carte soient des difféomorphismes. Elles jouent un rôle clé dans l'analyse des équations aux dérivées partielles non-linéaires de nature géométrique (Cauchy-Riemann, Yang-Mills, Yamabe, ...). Les *schémas* de la géométrie algébrique peuvent être pensés comme étant des espaces modelés localement sur le spectre d'anneaux commutatifs.

**1.6. Fonctions de troncature lisses. Plongements dans des espaces euclidiens.** Le fait d'avoir dégagé une définition abstraite des variétés différentielles représente certainement un gain conceptuel : nous pourrions les reconnaître dans des situations qui n'ont *a priori* rien à voir avec l'espace euclidien. Mais l'on doit aussi se demander si la classe d'objets que l'on peut définir de cette manière est strictement plus générale que celle des sous-variétés de  $\mathbb{R}^n$ . Le but de cette section est de montrer que la réponse est négative pourvu que l'on travaille avec des espaces topologiques séparés et à base dénombrable.

Nous utiliserons la terminologie topologique suivante.

Nous dirons qu'un espace topologique est *séparé* si pour tous deux points distincts  $x \neq y$  il existe des voisinages ouverts  $U \ni x$  et  $V \ni y$  tels que  $U \cap V = \emptyset$ . Nous dirons qu'un espace topologique est à *base dénombrable* s'il existe une famille dénombrable d'ouverts  $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$  ayant la propriété suivante : pour tout point  $x$  et tout ouvert  $V \ni x$ , il existe  $i$  avec  $x \in U_i \subset V$ . De manière équivalente, tout ouvert peut être écrit comme réunion d'éléments de la famille  $(U_i)$ . Nous dirons qu'un espace topologique est *compact* si tout recouvrement ouvert admet un sous-recouvrement fini. Nous dirons qu'un ouvert  $U \subset X$  d'un espace topologique  $X$  est *relativement compact* si son adhérence est un ensemble compact.

**Exemple.** L'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$  est à base dénombrable. En effet, l'on peut choisir comme base l'ensemble des boules ouvertes de rayon rationnel centrées aux points de  $\mathbb{Q}^n$ . Par conséquent, tout ouvert de  $\mathbb{R}^n$  est à base dénombrable.

**Exemple.** Une variété compacte  $M$  est à base dénombrable. En effet, recouvrons  $M$  par un nombre fini d'ouverts de carte  $(U_k, \phi_k)$ . Choisissons une base dénombrable pour chaque  $\phi_k(U_k) \subset \mathbb{R}^n$  et transportons-la en une base dénombrable  $\mathcal{B}_k$  pour  $U_k$ . Le lecteur vérifiera facilement que  $\bigcup_k \mathcal{B}_k$  est une base dénombrable pour la topologie de  $M$ . De manière similaire, une variété qui possède un atlas dénombrable est à base dénombrable.

**Exercice 10.** (Re)démontrer les énoncés suivants :

- *compact dans séparé est fermé* ;
- *fermé dans compact est compact*.

**Théorème 1.15** (Whitney, *Annals of Math.* (2) 37 (1936)). *Une variété de dimension  $n$  séparée et à base dénombrable admet un plongement dans  $\mathbb{R}^{2n+1}$ .*

**Exercice 11.** Réciproquement, si une variété admet un plongement dans un espace euclidien alors elle est séparée et à base dénombrable.

CONVENTION : DANS LA SUITE DU COURS TOUTES LES VARIÉTÉS SERONT SUPPOSÉES SÉPARÉES ET, SI ELLES SONT NON-COMPACTES, À

BASE DÉNOMBRABLE. POUR ALLÉGER LA LECTURE NOUS NE FERONS DÉSORMAIS PLUS MENTION EXPLICITE DE CES HYPOTHÈSES.

Comme nous le verrons plus bas, le fait d'imposer ces deux hypothèses de nature topologique présente de multiples avantages, qui vont bien au-delà du simple fait de pouvoir plonger les variétés dans des espaces euclidiens : existence de fonctions de troncature, existence de partitions de l'unité, possibilité de recoller des objets locaux en des objets globaux, métrisabilité.

Nous allons démontrer plus tard dans le cours le théorème de Whitney dans le cas des variétés compactes (séparées !) comme une application du théorème de Sard. Dans cette section nous faisons un premier pas dans cette direction en démontrant le résultat plus faible suivant.

**Théorème 1.16.** *Toute variété compacte se plonge dans un espace euclidien de dimension assez grande.*

La preuve de ce résultat repose sur la construction de fonctions de troncature. Étant donné un espace topologique  $X$  et une fonction continue  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , le *support de  $f$*  est défini comme étant l'adhérence dans  $X$  du lieu de non-annulation de  $f$  :

$$\text{supp}(f) := \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}.$$

Lorsque  $X \subset Y$  est un sous-espace topologique, on note

$$\text{supp}_Y(f)$$

l'adhérence dans  $Y$  du lieu de non-annulation de  $f$ .

**Lemme 1.17.** *Fixons  $0 < r < R$ . Il existe une fonction lisse  $f = f_{r,R} : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$  telle que*

$$f|_{B^n(r)} = 1, \quad \text{supp}(f) \subset B^n(R).$$

*Démonstration.* Il suffit de construire une fonction lisse  $g : [0, \infty[ \rightarrow [0, 1]$  telle que  $g(t) = 1$  pour  $t < r$  et  $\text{supp}(g) \subset [0, R[$ . Dans ce cas  $f(x) := g(\|x\|)$  vérifie les conditions du lemme.

On commence par la fonction "test"

$$a_R(t) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{R^2-t^2}}, & |t| < R, \\ 0, & |t| \geq R. \end{cases}$$

Sa primitive normalisée  $A_R(t) := \int_{-\infty}^t a_R(\tau) d\tau / \int_{-\infty}^{\infty} a_R(\tau) d\tau$  vérifie

$$A_R(t) = 0, \quad t \leq -R \quad \text{et} \quad A_R(t) = 1, \quad t \geq R.$$

La fonction  $B_R(t) := 1 - A_R(t)$  vérifie

$$B_R(t) = 1, \quad t \leq -R \quad \text{et} \quad B_R(t) = 0, \quad t \geq R.$$

(Son graphe est symétrique au graphe de  $A_R$  par rapport à la droite  $y = 1/2$ .) Finalement on translate et on “comprime” ce graphe en considérant  $B_{r,R}(t) := B_R(\frac{R-r}{2R}t - \frac{(R-r)r}{2R} - R)$ . Cette fonction vérifie

$$B_{r,R}(t) = 1, \quad t \leq r \quad \text{et} \quad B_{r,R}(t) = 0, \quad t \geq R.$$

Ainsi  $g := B_{r,R}|_{[0,\infty[}$  convient.  $\square$

**Lemme 1.18.** *Soit  $M$  une variété et  $U \subset M$  un ouvert. Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction lisse telle que*

$$\text{supp}_M(f) \subset U.$$

*Alors l'extension de  $f$  par zéro, définie explicitement par*

$$\tilde{f} : M \rightarrow \mathbb{R}, \quad p \mapsto \begin{cases} f(p), & p \in U, \\ 0, & p \notin U, \end{cases}$$

*est une fonction lisse.*

*Démonstration.* Il faut montrer que pour tout point  $p \in M$  il existe une carte  $(V, \phi)$  contenant  $p$  telle que  $\tilde{f} \circ \phi^{-1} : \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  soit lisse. Si  $p \in U$  on prend une carte quelconque  $(V, \phi)$  avec  $p \in V \subset U$ , et  $\tilde{f}|_V = f|_V$  est lisse. Si  $p \notin U$  alors  $p \in \text{supp}_M(f)^c$ . Celui-ci est un ouvert sur lequel  $\tilde{f}$  est identiquement nulle, donc lisse.  $\square$

L'on a clairement égalité

$$\text{supp}(f) = \text{supp}_M(f)$$

dès que  $\text{supp}(f)$  est fermé dans  $M$ . En particulier, lorsque la variété ambiante  $M$  est séparée, comme nous l'avons désormais supposé, l'on a égalité dès que  $\text{supp}(f)$  est compact dans  $M$  ou, de manière équivalente, dans  $U$ . Nous avons donc démontré :

**Corollaire 1.19.** *Soit  $M$  une variété (séparée!) et  $U \subset M$  un ouvert. Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction lisse à support compact. Alors l'extension de  $f$  à  $M$  par zéro est lisse.  $\square$*

Ce résultat est faux dès que la variété  $M$  n'est pas séparée (cf. Exercice 12 plus bas). Par conséquent, tous les énoncés du reste de cette section sont également faux pour des variétés non-séparées.

**Lemme 1.20.** *Soient  $K \subset U \subseteq M$  avec  $M$  variété,  $K$  compact et  $U$  ouvert. Il existe une fonction lisse  $f : M \rightarrow [0, 1]$  avec*

$$f|_K = 1, \quad \text{supp}(f) \subset U.$$

*De plus on peut choisir  $f$  à support compact.*

*Démonstration.* Soit  $(U_i, \phi_i)$  une famille finie de cartes sur  $M$  qui recouvre  $K$ . L'on peut supposer sans perte de généralité que  $\text{im}(\phi_i) =$

$B^n(1)$  et que les ouverts  $U'_i := \phi_i^{-1}(B^n(\frac{1}{2}))$  recouvrent  $K$  (exercice!).  
Posons

$$f_i : U_i \rightarrow [0, 1], \quad f_i := f_{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}} \circ \phi_i.$$

Par le Corollaire 1.21 l'extension  $\tilde{f}_i$  de  $f_i$  à  $M$  par 0 est lisse. Finalement, l'application

$$f := 1 - \prod_i (1 - \tilde{f}_i)$$

satisfait aux conditions du lemme.  $\square$

**Corollaire 1.21** (Principe d'extension après restriction). *Soit  $M$  une variété,  $U \subset M$  un ouvert et  $V \subset U$  un ouvert relativement compact. Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction lisse. Il existe une fonction lisse  $H : M \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $H|_V = h$ .*

*Démonstration.* Par le lemme 1.20 il existe une fonction lisse à support compact  $f : U \rightarrow [0, 1]$  telle que  $f|_{\bar{V}} = 1$ . La fonction  $f \cdot h : U \rightarrow \mathbb{R}$  coïncide avec  $h$  sur  $V$  et son support est contenu dans celui de  $f$ . Il est donc compact dans  $U$  et on peut donc étendre cette fonction par zéro à une fonction lisse sur  $M$ .  $\square$

Le Lemme 1.20 et le Corollaire 1.21 admettent les généralisations suivantes (pour lesquelles l'hypothèse de base dénombrable est essentielle). Vous pourrez consulter le livre de Warner, *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups* pour les preuves.

**Lemme 1.22.** *Soient  $A \subset U \subseteq M$  avec  $M$  variété,  $A$  fermé et  $U$  ouvert. Il existe une fonction lisse  $f : M \rightarrow [0, 1]$  avec*

$$f|_A = 1, \quad \text{supp}(f) \subset U.$$

$\square$

**Corollaire 1.23.** *Soit  $M$  une variété et  $V \subset U \subset M$  deux ouverts avec  $\bar{V} \subset U$ . Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction lisse. Il existe une fonction lisse  $H : M \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $H|_V = h$ .*  $\square$

*Preuve du théorème 1.16.*

*Idée de la preuve : la seule information dont nous disposons sur  $M$  est l'existence d'un ensemble fini de cartes qui recouvrent  $M$ . En mettant toutes les cartes ensemble on obtient certainement une application injective sur  $M$  à valeurs dans un espace euclidien. Mais il faut d'abord étendre les cartes à des fonctions lisses sur  $M$ . À ce stade le principe d'extension après restriction est fort utile.*

Soit  $(U_i, \phi_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$  un atlas fini tel que  $\text{im}(\phi_i) = B^n(1)$  et les  $V_i := \phi_i^{-1}(B^n(\frac{1}{2}))$  recouvrent  $M$ . L'on trouve par le lemme 1.20 des fonctions lisses à support compact  $f_i : U_i \rightarrow [0, 1]$  telles que  $f_i|_{\bar{V}_i} = 1$ . L'on peut alors regarder chaque application  $f_i \phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$  comme une

fonction lisse sur  $M$ , en l'étendant par 0. De même pour chaque  $f_i$ . On considère alors l'application

$$F : M \rightarrow \mathbb{R}^{nN+N}, \quad f = (f_1\phi_1, \dots, f_N\phi_N, f_1, \dots, f_N).$$

C'est une application lisse. C'est aussi une immersion puisque tout point appartient à un certain ouvert  $V_i$ , où la  $i$ -ème composante de  $F$  vaut  $\phi_i$ , qui est un difféomorphisme sur image. L'injectivité découle du fait suivant : si  $p$  et  $q$  sont deux points tels que  $F(p) = F(q)$ , on a en particulier  $f_i(p) = f_i(q)$  pour tout  $i$ . Soit  $i$  tel que  $p \in V_i$ , de sorte que  $f_i(p) = 1$ . Alors  $f_i(q) = 1$ , ce qui implique  $q \in U_i$ . Ainsi  $\phi_i(p) = \phi_i(q)$ , et par conséquent  $p = q$  puisque  $\phi_i$  est injective sur son domaine de définition.  $\square$

**Exercice 12** (Exemple de variété non-séparée). Soient  $A_1, A_2$  deux copies de  $]0, \infty[$  et considérons

$$M := ]-\infty, 0[ \cup A_1 \cup A_2.$$

Munir  $M$  d'une topologie telle que les identifications naturelles  $\phi_i : ]-\infty, 0[ \cup A_i \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2$  soient des homéomorphismes. Montrer que  $\phi_1, \phi_2$  définissent un atlas sur  $M$ . Montrer que  $M$  n'est pas séparée (plus précisément, les points qui ne peuvent pas être séparés sont les deux copies de 0 dans  $A_1$  et  $A_2$ ). Donner un exemple de fonction lisse à support compact dans  $] - \infty, 0[ \cup A_1$  dont l'extension par 0 à  $M$  n'est pas lisse.

**Remarque (à propos des partitions de l'unité).** Il est coutumier de parler de partitions lisses de l'unité lorsque l'on construit des fonctions de troncature, puisque celles-ci constituent le point clé. Nous allons remettre cette discussion à plus tard, lorsque nous aurons à disposition la notion d'espace tangent et de champ de vecteurs, afin de pouvoir illustrer les partitions de l'unité en tant qu'outil de recollement d'objets locaux en des objets définis globalement. Pour un aperçu avant la lettre voir par exemple le livre de Warner, *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*.

## 2. FIBRÉ TANGENT. FIBRÉS VECTORIELS

**2.1. Espace tangent. Application tangente.** Dans cette section nous définissons l'espace tangent  $T_pM$  à une variété  $M$  en un point  $p \in M$ , ainsi que la différentielle

$$df(p) : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$$

d'une application lisse  $f : M \rightarrow N$ . Nous donnons trois points de vue équivalents que nous relierons aussi aux sous-variétés. Ces trois points de vue sont à mettre en parallèle avec les trois définitions équivalentes d'une sous-variété que nous avons abordé dans la section 1.2.

**I. LE POINT DE VUE DES CARTES.** Un point de départ pour aboutir à la notion d'espace tangent est le souhait de définir une notion de différentielle pour une application lisse. Si l'on essaie de partir de la définition de la lissité en termes de cartes, l'on rencontre tout de suite le problème suivant : étant donnée une application lisse  $f : M^m \rightarrow N^n$  et des cartes  $(U, \phi)$ ,  $(V, \psi)$  à la source et au but, la différentielle de  $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$  est une application linéaire  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  qui dépend évidemment du choix de cartes (à travers leurs différentielles)! Pour récupérer un objet intrinsèque nous sommes naturellement amenés à nous affranchir des bases canoniques sur  $\mathbb{R}^m$  et  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition 2.1.** Soit  $M^m$  une variété de dimension  $m$  munie d'un atlas  $\{(U_i, \phi_i)\}$ . Pour tout  $p \in M$  on définit l'espace tangent en  $p$  à  $M$ , noté  $T_pM$ , comme étant l'espace vectoriel réel de dimension  $m$

$$T_pM := \coprod_{i: U_i \ni p} \{i\} \times \mathbb{R}^m / \sim$$

où

$$(i, \xi) \sim (j, \eta) \Leftrightarrow d(\phi_j \circ \phi_i^{-1})(x)\xi = \eta, \quad x = \phi_i(p).$$

La structure d'espace vectoriel sur  $T_pM$  est donnée par

$$\lambda \cdot [(i, \xi)] := [(i, \lambda\xi)], \quad \lambda \in \mathbb{R}, \xi \in \mathbb{R}^m,$$

$$\begin{aligned} [(i, \xi)] + [(j, \xi')] &:= [(j, d(\phi_j \circ \phi_i^{-1})(x)\xi + \xi')], & x = \phi_i(p), \\ &= [(i, \xi + d(\phi_i \circ \phi_j^{-1})(y)\xi')], & y = \phi_j(p). \end{aligned}$$

**Définition 2.2.** Soit  $f : M^m \rightarrow N^n$  une application lisse et  $p \in M$ . La différentielle de  $f$  en  $p$ , ou application tangente de  $f$  en  $p$ , est l'application linéaire

$$df(p) : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N, \text{ ou } f_{*p} : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N,$$

définie par

$$df(p)[(i, \xi)] := [(j, d(\psi_j \circ f \circ \phi_i^{-1})(x)\xi)], \quad x = \phi_i(p),$$

où  $\phi_i$  est une carte locale sur  $M$  au voisinage de  $p$  et  $\psi_j$  est une carte locale sur  $N$  au voisinage de  $f(p)$ .

Vous devez – et pouvez ! – vérifier que ces définitions sont cohérentes (bonne définition de la structure d'espace vectoriel, indépendance de la définition de la différentielle par rapport au choix de cartes etc.). Ces définitions sont motivées par le souhait de définir *l'espace tangent en  $p$  à  $M$  comme un espace vectoriel de dimension  $m$  qui constitue la source naturelle de la différentielle d'une application lisse*. Celui-ci ne possède pas de base privilégiée ; un choix de carte fournit une base qui correspond à la base canonique de  $\mathbb{R}^m$ , mais cette base dépend du choix de carte.

**Exercice 13** (composition des différentielles). Soient  $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$  des applications lisses et  $p \in M$ . Montrer l'égalité

$$d(g \circ f)(p) = dg(f(p)) \circ df(p).$$

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{g \circ f} & P \\ & \searrow f & \nearrow g \\ & N & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} T_p M & \xrightarrow{d(g \circ f)(p)} & T_{g(f(p))} P \\ & \searrow df(p) & \nearrow dg(f(p)) \\ & T_{f(p)} N & \end{array}$$

Une première intuition géométrique sur l'espace tangent nous est donnée lorsque  $M$  est une sous-variété d'un espace euclidien.

**Proposition 2.3.** Soit  $M^k \subseteq \mathbb{R}^n$  une sous-variété. Étant donné  $p \in M$  on choisit un système submersif d'équations locales  $\bar{\phi} : U \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  avec  $p \in U \subseteq \mathbb{R}^n$  ouvert et  $M \cap U = \bar{\phi}^{-1}(0)$ .

(1) Le sous-espace vectoriel

$$\ker d\bar{\phi}(p) \subseteq \mathbb{R}^n$$

ne dépend pas du choix de  $\bar{\phi}$ .

(2) Il existe un isomorphisme canonique

$$T_p M \xrightarrow{\cong} \ker d\bar{\phi}(p).$$

*Démonstration.* (1) Nous savons que l'on peut écrire localement  $M$  au voisinage de  $p$  comme image d'un plongement  $\psi$  de rang  $k$ . Notons  $p = \psi(x)$ . Puisque  $\bar{\phi} \circ \psi \equiv 0$  on obtient  $d\bar{\phi}(p) \circ d\psi(x) = 0$ , de sorte que  $\text{im } d\psi(x) \subseteq \ker d\bar{\phi}(p)$ . Or nous savons que ces deux espaces vectoriels sont de même dimension égale à  $k$ , d'où  $\text{im } d\psi(x) = \ker d\bar{\phi}(p)$ . Ce raisonnement vaut pour tout choix de  $\bar{\phi}$  à  $\psi$  fixé et démontre l'indépendance de  $\ker d\bar{\phi}(p)$  par rapport au choix de  $\bar{\phi}$ .

(2) Soit  $\phi_i : U_i \subseteq M \rightarrow \mathbb{R}^k$  une carte autour de  $p$ , avec  $\phi_i^{-1} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  plongement et  $\phi(p) = x$ . L'on définit une application linéaire

$$T_p M \rightarrow \text{im } d\phi_i^{-1}(x) = \ker d\bar{\phi}(p), \quad [(i, \xi)] \mapsto d\phi_i^{-1}(x)\xi.$$

Ceci est une application bien définie. Elle est injective puisque  $d\phi_i^{-1}(x)$  l'est. Les dimensions de  $T_p M$  et  $\text{im } d\phi_i^{-1}(x)$  étant les mêmes, égales à  $k$ , on déduit que notre application linéaire réalise un isomorphisme.  $\square$

Lorsque  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  est une sous-variété, le noyau  $\ker d\bar{\phi}(p)$  décrit ci-dessus s'appelle aussi *direction de l'espace tangent géométrique*. On le note désormais aussi  $T_pM$ . L'*espace tangent géométrique* est par définition l'espace affine passant par  $p$  et ayant comme direction  $T_pM$ ; on le notera simplement  $p+T_pM$ . En fonction du contexte, on regardera  $T_pM$  ou bien comme un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$ , ou bien comme un espace vectoriel abstrait.

**Exemple.** Soit  $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\} = \bar{\phi}^{-1}(1)$ , avec  $\bar{\phi} : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \|x\|^2$  submersion au-dessus de 1. Puisque  $d\bar{\phi}(x) = 2\langle x, \cdot \rangle$  on obtient l'identification canonique

$$T_x S^n \cong x^\perp := \{\xi \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle x, \xi \rangle = 0\}.$$

**Exercice 14.** (1) Montrer que pour tout espace vectoriel  $V$  de dimension finie et tout point  $p \in V$  on a un isomorphisme canonique

$$T_p V \cong V.$$

En particulier l'on a un isomorphisme canonique

$$T_p \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n.$$

(2) Soit  $M^k \subseteq \mathbb{R}^n$  une sous-variété. Montrer que l'inclusion  $i : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une application lisse et que sa différentielle

$$di(p) : T_p M \rightarrow T_p \mathbb{R}^n$$

est l'inclusion  $T_p M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ .

(3) Soit  $V$  un espace vectoriel et  $A \subseteq V$  un sous-espace affine de direction  $W \subseteq V$ . Montrer que  $A$  est une sous-variété lisse de dimension égale à  $\dim W$ . Montrer que l'on a un isomorphisme canonique  $T_p A \cong W$  pour tout  $p \in A$ .

(4) Soit  $U \subseteq V$  un ouvert dans un espace vectoriel de dimension finie. Montrer que l'on a un isomorphisme canonique

$$T_p U \cong V.$$

(5) Soit  $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  une application lisse définie sur un ouvert  $U$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Vérifier que la différentielle classique  $df(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $p \in U$  coïncide avec la différentielle  $df(p) : T_p U \rightarrow T_{f(p)} \mathbb{R}^m$  définie ci-dessus.

Voici maintenant une caractérisation intrinsèque de l'espace tangent géométrique en un point  $p$  à une sous-variété  $M^k \subset \mathbb{R}^n$ .

**Proposition 2.4.** Soit  $M^k \subseteq \mathbb{R}^n$  une sous-variété. L'espace tangent géométrique  $p+T_pM$  en un point  $p \in M$  est l'unique sous-espace affine  $A$  de dimension  $k$  passant par  $p$  et ayant la propriété suivante : il existe des paramétrisations  $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  d'un voisinage de  $p$  dans  $M$  et

$\psi_A : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}^n$  d'un voisinage de  $p$  dans  $A$ , qui coïncident à l'ordre 1 aux points qui sont préimages de  $p$  :

$$d\psi(x) = d\psi_A(y), \quad x = \psi^{-1}(p), \quad y = \psi_A^{-1}(p).$$

*Démonstration.* Il est clair que  $p + T_p M$  vérifie la condition décrite : si  $\psi : \Omega \subset \mathbb{R}^k \rightarrow M$  est une paramétrisation arbitraire au voisinage de  $p$  avec  $\psi(x) = p$ , on prend  $\Omega' = \mathbb{R}^k$  et  $\psi_{p+T_p M} := p + d\psi(x)$ , la paramétrisation linéaire de  $A$  donnée par la différentielle de  $\psi$ .

Pour l'unicité, l'exercice 14 nous assure que la direction de  $A$  est  $T_p A$ . Or  $T_p A = \text{im } d\psi_A(y) = \text{im } d\psi(x) = T_p M$ , donc  $A = p + T_p M$ .  $\square$

**Remarque 2.5** (contact de deux sous-variétés de dimension  $k$ ). *On dit que deux sous-variétés ont un contact d'ordre au moins  $\ell \geq 1$  en un point d'intersection  $p$ , ou encore qu'elles sont tangentes à l'ordre au moins  $\ell \geq 1$  en  $p$ , si elles admettent au voisinage de  $p$  des paramétrisations ayant le même jet d'ordre  $\ell$ , i.e. les mêmes dérivées partielles d'ordre  $\leq \ell$ , aux points qui sont préimages de  $p$ . La proposition précédente peut être reformulée en disant que le plan tangent géométrique en  $p$  à une sous-variété  $M^k \subseteq \mathbb{R}^n$  est l'unique espace affine de dimension  $k$  qui a un contact d'ordre au moins 1 avec  $M$  en  $p$ . C'est la formulation mathématiquement rigoureuse du fait que l'espace tangent géométrique est l'espace affine de dimension  $k$  qui approxime le mieux la sous-variété au voisinage de  $p$ .*

*Ceci est à mettre en lien avec notre identification de la direction de l'espace tangent géométrique avec l'espace tangent abstrait, qui est la source naturelle des différentielles d'applications lisses définies sur  $M$  : pour étudier des phénomènes de nature linéaire en  $p$  on peut tout simplement remplacer la variété par son espace tangent et les applications linéaires par leur différentielle.*

II. LE POINT DE VUE DES COURBES. Le point de vue que nous présentons maintenant a deux avantages : d'un côté il ne fait pas référence explicite aux cartes locales, d'un autre côté il met en avant l'intuition que nous avons dans  $\mathbb{R}^n$  d'un vecteur tangent comme étant une direction de mouvement infinitésimale. Il est à mettre en relation avec la définition 1.5 des sous-variétés de  $\mathbb{R}^n$  comme images locales de plongements.

Soit  $c : I \rightarrow M$  une courbe lisse définie sur un intervalle ouvert  $I \subseteq \mathbb{R}$ . La différentielle  $dc(t) : T_t I \rightarrow T_{c(t)} M$ ,  $t \in I$  est une application linéaire que l'on peut identifier à une application linéaire  $dc(t) : \mathbb{R} \rightarrow T_{c(t)} M$  en vue de l'isomorphisme canonique  $T_t I \cong \mathbb{R}$ . Si l'on note

$$\dot{c}(t) := \frac{d}{dt}c(t) := dc(t) \cdot 1 \in T_{c(t)} M,$$

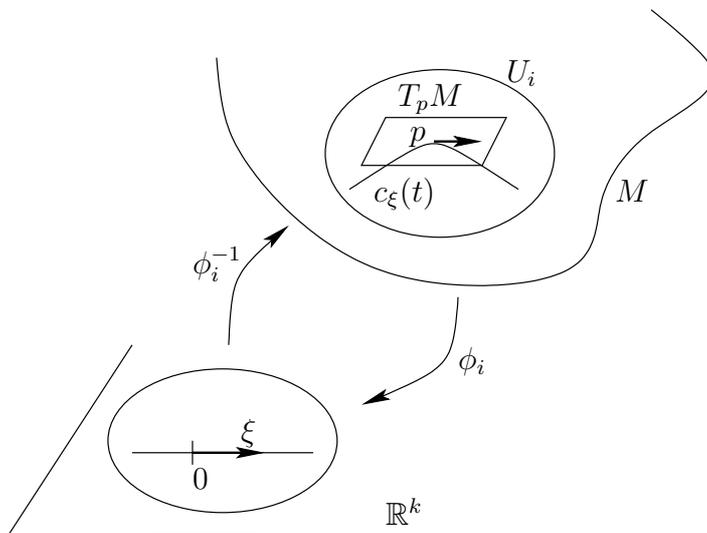


FIGURE 1. Espace tangent comme ensemble de classes d'équivalence de courbes.

l'on a nécessairement  $dc(t)\lambda = \lambda\dot{c}(t)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On appelle  $\dot{c}(t)$  *vecteur vitesse de la courbe  $c$  à l'instant  $t$* , ou *vecteur tangent à  $c$  à l'instant  $t$* . Le vecteur vitesse détermine donc la différentielle  $dc(t)$  et l'on a  $\text{im } dc(t) = \mathbb{R}\dot{c}(t) \subset T_{c(t)}M$ . La courbe  $c$  est un plongement local en  $t$  si et seulement si  $\dot{c}(t) \neq 0$ .

**Proposition-Définition 2.6.** *Soit  $M$  une variété et  $p \in M$ . Il existe une bijection canonique entre  $T_pM$  et l'ensemble des classes d'équivalence de courbes lisses*

$$c : I \rightarrow M, \quad 0 \in I \subseteq \mathbb{R}, \quad c(0) = p,$$

pour la relation d'équivalence

$$c \sim c' \Leftrightarrow \dot{c}(0) = \dot{c}'(0).$$

*Démonstration.* Notons  $\mathcal{C}_p$  l'ensemble des classes d'équivalence  $[c]$  de courbes  $c$  comme dans l'énoncé. Montrons que l'application

$$\mathcal{C}_p \rightarrow T_pM, \quad [c] \mapsto \dot{c}(0)$$

est une bijection. La bonne définition et l'injectivité sont une conséquence directe de la définition de la relation d'équivalence  $\sim$ . Pour la surjectivité, soit  $(U_i, \phi_i)$  une carte autour de  $p$  telle que  $\phi_i(p) = 0$  et soit  $[(i, \xi)] \in T_pM$  un vecteur tangent. La courbe

$$c_\xi(t) := \phi_i^{-1}(t\xi),$$

définie sur un voisinage ouvert  $I$  de 0 tel que  $I\xi \in \phi_i(U_i)$ , est lisse et vérifie  $\dot{c}_\xi(0) = [(i, \xi)]$  (Figure 1).  $\square$

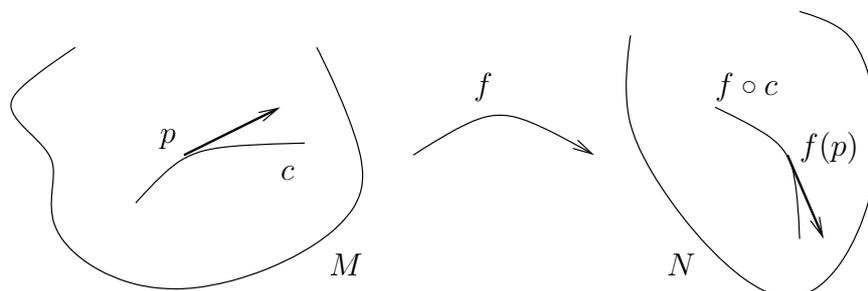


FIGURE 2. Différentielle d'une application agissant sur une classe d'équivalence de courbes.

L'on remarquera que l'ensemble des classes d'équivalence de courbes passant par un point  $p \in M$  ne possède pas de structure d'espace vectoriel évidente, quoique l'on peut le munir d'une telle structure en transportant celle de  $T_pM$ . Cette description géométrique de l'espace tangent occulte en quelque sorte l'algèbre. Il ne faut pas y voir un inconvénient, mais plutôt la manifestation d'un fait général : la géométrie et l'algèbre s'éclairent mutuellement.

**Proposition-Définition 2.7.** *Soit  $f : M \rightarrow N$  une application lisse et  $[c]$  un vecteur tangent en  $p \in M$  représenté par la classe d'équivalence d'une courbe  $c$ . Alors*

$$df(p)[c] = [f \circ c].$$

*Démonstration.* Le vecteur tangent représenté par  $[c]$  est précisément  $\dot{c}(0) = dc(0) \cdot 1$ . En appliquant la règle de dérivation des fonctions composées on obtient (Figure 2)

$$df(p)[c] = df(p)\dot{c}(0) = df(p)dc(0) \cdot 1 = d(f \circ c)(0) \cdot 1 = \overbrace{d(f \circ c)(0)}^{\dot{f \circ c}(0)} = [f \circ c].$$

□

Ce dernier résultat est très intuitif : pour connaître l'image par  $df$  d'un vecteur tangent représenté par une courbe on doit simplement transporter la courbe par l'application  $f$ .

**Remarque 2.8** (espace tangent et applications lisses entre espaces euclidiens). *La remarque suivante concerne le dernier point de l'exercice 14. Dans la définition classique de la différentielle d'une application linéaire  $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , qui agit comme  $df(p) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , la source est l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^n$  et est indépendante du point  $p$ . Le point de vue de la géométrie différentielle est légèrement différent et plus intuitif : la source est  $T_pU$ , l'espace vectoriel des directions de variation infinitésimale du point  $p \in U$ . Il se trouve que, pour  $U \subset \mathbb{R}^n$ , celui-ci est canoniquement identifié à  $\mathbb{R}^n$  et peut donc être pensé comme*

étant indépendant du point  $p$ , comme en calcul différentiel classique. Mais moralement il dépend du point  $p$ . Lorsque l'on écrit  $T_p U$  on se souvient dans la notation de cette dépendance.

III. LE POINT DE VUE DES DÉRIVATIONS. Nous avons déjà exploré deux points de vue sur l'espace tangent : celui des vecteurs tangents regardés comme vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  à travers des cartes, étroitement lié à l'idée d'approximation linéaire, et celui des courbes, lié à l'idée de direction infinitésimale de mouvement. Nous expliquons maintenant un troisième point de vue, lié au concept de dérivée directionnelle des fonctions définies sur des ouverts de  $\mathbb{R}^n$ . Ce point de vue est à rapprocher de la définition 1.3 des sous-variétés comme fibres locales de submersions. Les énoncés-clé pour cette discussion sont les Propositions-Définitions 2.11 et 2.14 plus bas.

**Définition 2.9.** Soit  $M$  une variété et  $p \in M$  un point fixé. On appelle germe de fonction lisse en  $p$  une classe d'équivalence de fonctions lisses définies au voisinage de  $p$ , pour la relation d'équivalence suivante :

$$f \sim g \Leftrightarrow f = g \text{ sur un voisinage ouvert de } p$$

On note  $\mathcal{F}_p$  l'ensemble des germes de fonctions lisses en  $p$ .

L'ensemble  $\mathcal{F}_p$  porte une structure naturelle d'algèbre commutative sur  $\mathbb{R}$ . Ceci signifie qu'il possède une structure d'espace vectoriel réel, une structure d'anneau commutatif, et que ces deux structures sont compatibles au sens où le produit est distributif par rapport à la somme et commute avec la multiplication par des scalaires. À titre d'exemple, si  $f_p$  et  $g_p$  sont deux germes représentés par des fonctions lisses  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ , le germe produit  $f_p \cdot g_p$  est représenté par la fonction produit  $fg : U \cap V \rightarrow \mathbb{R}$ . À noter que  $\mathcal{F}_p$  est un espace vectoriel réel de dimension infinie.

**Définition 2.10.** On appelle dérivation de  $\mathcal{F}_p$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , ou dérivation de  $\mathcal{F}_p$ , une application  $\mathbb{R}$ -linéaire  $D : \mathcal{F}_p \rightarrow \mathbb{R}$  qui vérifie la règle de Leibniz

$$D(f_p \cdot g_p) = D(f_p)g(p) + f(p)D(g_p).$$

On note le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des dérivations de  $\mathcal{F}_p$  par  $\text{Der}(\mathcal{F}_p, \mathbb{R})$ .

**Remarque.** Il existe une notion générale d'algèbre sur un corps, définie par les mêmes axiomes. De même, il existe une notion générale de dérivation d'une algèbre  $A$  à valeurs dans un  $A$ -bimodule  $M$  (module à gauche et à droite, de façon compatible), gouvernée par la relation  $D(a \cdot b) = D(a)b + aD(b)$ ,  $a, b \in A$ . Dans notre cas de figure, l'algèbre  $\mathbb{R}$  est regardée comme un  $\mathcal{F}_p$ -bimodule via l'application d'évaluation  $\mathcal{F}_p \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_p \mapsto f(p)$ .

**Exemple.** Soit  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  un ouvert et  $\mathcal{F}_p$  l'algèbre des germes de fonctions lisses définies au voisinage de  $p \in U$ . Pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^n$  la dérivée directionnelle en  $p$  selon  $\xi$  définit une dérivation de  $\mathcal{F}_p$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  :

$$d_\xi : \mathcal{F}_p \rightarrow \mathbb{R}, \quad d_\xi f_p := df(p)\xi.$$

En effet,

$$\begin{aligned} d_\xi(f_p g_p) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (fg)(p + t\xi) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(p + t\xi)g(p) + f(p) \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g(p + t\xi) \\ &= d_\xi(f_p)g(p) + f(p)d_\xi g_p. \end{aligned}$$

En particulier les dérivées partielles par rapport aux coordonnées  $x^\ell$  sur  $\mathbb{R}^n$  définissent des dérivations

$$\frac{\partial}{\partial x^\ell} : \mathcal{F}_p \rightarrow \mathbb{R},$$

avec  $\frac{\partial}{\partial x^\ell} = d_{e_\ell}$ , où  $e_\ell = (0, \dots, 1, \dots, 0)$  et la coordonnée non-nulle apparaît en  $\ell$ -ème position.

Cet exemple peut bien-sûr être implanté sur une variété puisqu'il est de nature locale. Étant donnée une variété, il est désormais utile d'adopter la notation

$$\phi = (x^1, \dots, x^k)$$

pour les composantes d'une carte  $\phi : U \subseteq M \rightarrow \mathbb{R}^k$ . Nous regardons les composantes  $x^1, \dots, x^k$  de l'application  $\phi$  comme des fonctions lisses sur  $U$ . Cette notation est par ailleurs conforme à l'intuition que nous avons d'une carte : elle identifie  $U$  à l'ouvert  $\phi(U) \subseteq \mathbb{R}^k$ , sur lequel vivent les fonctions coordonnées naturelles  $x^1, \dots, x^k$ .

**Exercice 15.** Soit  $M$  une variété et  $p \in M$  un point fixé. Étant donnée une carte  $\phi = (x^1, \dots, x^k)$ , l'application

$$\frac{\partial}{\partial x^\ell} : \mathcal{F}_p \rightarrow \mathbb{R}$$

définie par

$$\frac{\partial}{\partial x^\ell}(f_p) := \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x^\ell}(\phi(p))$$

est une dérivation.

On utilise aussi la notation

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^\ell} \right|_p : \mathcal{F}_p \rightarrow \mathbb{R}$$

pour désigner la dérivation  $\frac{\partial}{\partial x^\ell}$ . Il faut bien prendre conscience du fait que, même si la carte  $\phi$  n'est pas mentionnée explicitement dans la notation, cette dérivation dépend du choix de carte. Cette dépendance est rendue explicite plus bas.

**Exercice 16.** Soit  $C \in \mathcal{F}_p$  le germe de la fonction constante égale à  $C \in \mathbb{R}$  au voisinage de  $p$ . Montrer que toute dérivation de  $\mathcal{F}_p$  vérifie nécessairement  $D(C) = 0$ .

**Exercice 17.** Étant donnée une carte  $\phi = (x^1, \dots, x^k)$ , montrer l'identité

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^\ell} = \delta_\ell^i.$$

**Proposition-Définition 2.11.** Soit  $M$  une variété munie d'un atlas  $\{(U_i, \phi_i)\}$ . Soit  $p \in M$  un point fixé. Il existe un isomorphisme canonique d'espaces vectoriels

$$\mathcal{D} : T_p M \xrightarrow{\cong} \text{Der}(\mathcal{F}_p, \mathbb{R}),$$

$$[(i, \xi)] \mapsto (f_p \mapsto d(f \circ \phi_i^{-1})(x)\xi), \quad x = \phi_i(p).$$

Le contenu de la proposition est le suivant : l'on associe au vecteur tangent représenté par  $\xi \in \mathbb{R}^n$  dans la carte  $\phi_i$  la dérivation donnée par la dérivée directionnelle selon  $\xi$ .

*Démonstration.* L'application  $\mathcal{D}$  est bien définie et  $\mathbb{R}$ -linéaire.

Montrons qu'elle est injective. Fixons une carte  $(U_i, \phi_i)$ , notons  $x = \phi_i(p)$  et considérons deux vecteurs  $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$  tels que  $\mathcal{D}[(i, \xi)] = \mathcal{D}[(i, \eta)]$ . L'on veut montrer que  $\xi = \eta$ . On peut supposer sans perte de généralité  $\xi \neq 0$ . Considérons le germe  $f_p$  tel que  $f \circ \phi_i^{-1}(y) = \langle y - x, \xi \rangle$ . On trouve

$$\|\xi\|^2 = \mathcal{D}[(i, \xi)]f_p = \mathcal{D}[(i, \eta)]f_p = \langle \eta, \xi \rangle.$$

En considérant le germe associé à  $y \mapsto \langle y - x, \eta \rangle$  on trouve par ailleurs

$$\|\eta\|^2 = \langle \xi, \eta \rangle.$$

Finalement, les deux égalités  $\|\xi\|^2 = \|\eta\|^2 = \langle \eta, \xi \rangle$  impliquent  $\eta = \xi$  (on peut par exemple argumenter par le fait que la fonction  $\eta \mapsto \langle \eta, \xi \rangle$  définie sur la sphère de rayon  $\|\xi\|$  admet un unique maximum en  $\eta = \xi$ , où elle vaut  $\|\xi\|^2$ ).

Pour conclure que  $\mathcal{D}$  est un isomorphisme il suffit de montrer que  $\dim \text{Der}(\mathcal{F}_p, \mathbb{R}) \leq \dim T_p M$ . Ceci découle du lemme de Hadamard 2.13 ci-dessous : étant donnée une carte  $\phi = (x^1, \dots, x^k)$  autour de  $p$  avec  $\phi(p) = 0$ , tout germe de fonction en  $p$  s'écrit comme  $f_p = f(p) + \sum_{\ell=1}^k x^\ell g_\ell$  avec  $g_\ell$  des germes de fonction en  $p$  tels que

$$g_\ell(p) = \frac{\partial}{\partial x^\ell} \Big|_p (g_\ell) = \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial x^\ell}(0).$$

Soit  $D \in \text{Der}(\mathcal{F}_p, \mathbb{R})$ . En utilisant l'exercice 16 et le fait que  $x^\ell(p) = 0$  pour tout  $\ell$  on obtient

$$\begin{aligned} D(f_p) &= D(f(p)) + \sum_{\ell=1}^k D(x^\ell g_\ell) \\ &= \sum_{\ell=1}^k D(x^\ell) g_\ell(p) + x^\ell(p) D(g_\ell) \\ &= \sum_{\ell=1}^k D(x^\ell) \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x^\ell}(0). \end{aligned}$$

Ainsi

$$D = \sum_{\ell=1}^k D(x^\ell) \frac{\partial}{\partial x^\ell}.$$

Les dérivations  $\frac{\partial}{\partial x^\ell}$ ,  $\ell = 1, \dots, k$  forment donc un système générateur pour  $\text{Der}(\mathcal{F}_p, \mathbb{R})$ , de sorte que  $\dim \text{Der}(\mathcal{F}_p, \mathbb{R}) \leq k = \dim T_p M$ .  $\square$

**Corollaire 2.12.** *Les dérivations*

$$\frac{\partial}{\partial x^\ell}, \quad \ell = 1, \dots, k$$

associées à une carte  $\phi = (x^1, \dots, x^k)$  définie au voisinage d'un point  $p$  forment une base de  $\text{Der}(\mathcal{F}_p, \mathbb{R})$ .

*Démonstration.* Nous avons déjà montré au courant de la preuve de la proposition 2.11 que les dérivées partielles  $\frac{\partial}{\partial x^\ell}$ ,  $\ell = 1, \dots, k$  forment un système de générateurs pour  $\text{Der}(\mathcal{F}_p, \mathbb{R})$ . Montrons qu'elles sont linéairement indépendantes. Soit  $D = \sum_{\ell} \lambda_\ell \frac{\partial}{\partial x^\ell}$  une combinaison linéaire avec  $\lambda_\ell \in \mathbb{R}$ . Supposons que  $D = 0$  et montrons que tous les coefficients  $\lambda_\ell$  sont nuls.

En effet, pour tout  $i = 1, \dots, k$  l'on a

$$0 = D(x^i) = \sum_{\ell} \lambda_\ell \frac{\partial x^i}{\partial x^\ell} = \sum_{\ell} \lambda_\ell \delta_\ell^i = \lambda_i.$$

Nous avons utilisé l'identité fort utile

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^\ell} = \delta_\ell^i.$$

$\square$

Nous avons déjà mentionné le fait que les dérivations  $\frac{\partial}{\partial x^\ell}$ ,  $\ell = 1, \dots, k$  dépendent du choix de carte  $\phi = (x^1, \dots, x^k)$ . Il est temps de rendre explicite cette dépendance. Soit  $\psi = (y^1, \dots, y^k)$  une autre carte, qui

détermine une autre base de dérivations  $\frac{\partial}{\partial y^\ell}$ ,  $\ell = 1, \dots, k$  au point  $p$ . Nous avons alors

$$\frac{\partial}{\partial y^\ell} = \sum_i \frac{\partial x^i}{\partial y^\ell} \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

En effet, puisque les  $\frac{\partial}{\partial x^i}$ ,  $i = 1, \dots, k$  forment un système générateur l'on peut écrire  $\frac{\partial}{\partial y^\ell} = \sum_i \lambda_i \frac{\partial}{\partial x^i}$ ,  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ . On obtient

$$\frac{\partial x^j}{\partial y^\ell} = \sum_i \lambda_i \frac{\partial x^j}{\partial x^i} = \sum_i \lambda_i \delta_i^j = \lambda_j,$$

ce qui démontre la formule souhaitée.

**CONVENTION DE SOMMATION D'EINSTEIN.** Nous venons de rencontrer à plusieurs reprises des sommes du type  $\sum_i \lambda_i \frac{\partial}{\partial x^i}$ . Bientôt nous rencontrerons des sommes impliquant plusieurs indices de sommation. La convention d'Einstein consiste à supprimer le signe somme dans une expression afin d'alléger l'écriture, en sous-entendant que l'on somme sur les indices qui apparaissent deux fois. Ainsi

$$\frac{\partial}{\partial y^\ell} = \sum_i \frac{\partial x^i}{\partial y^\ell} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

s'écrirait

$$\frac{\partial}{\partial y^\ell} = \frac{\partial x^i}{\partial y^\ell} \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Cette formule est facile à retenir ("les  $\partial x^i$  se simplifient"!).

*À des fins pédagogiques, dans ce cours nous n'allons utiliser la convention de sommation d'Einstein que très rarement, et toujours en y faisant mention explicite.*

Pour achever la preuve de la proposition 2.11 nous démontrons maintenant le lemme de Hadamard.

**Lemme 2.13** (Hadamard). *Soit  $M$  une variété et  $p \in M$ . Soit  $\phi = (x^1, \dots, x^k)$  une carte au voisinage de  $p$ . Pour tout germe de fonction lisse  $f_p \in \mathcal{F}_p$  il existe des germes de fonctions  $g_\ell$ ,  $\ell = 1, \dots, k$  définis au voisinage de  $p$  tels que*

$$f_p = f(p) + \sum_{\ell=1}^k x^\ell g_\ell.$$

*L'on a alors nécessairement*

$$g_\ell(p) = \frac{\partial f_p}{\partial x^\ell}.$$

*Démonstration.* Regardons d'abord le cas d'une application lisse  $\bar{f} : B^k(1) \rightarrow \mathbb{R}$ , avec  $p = 0$ . L'on a successivement

$$\begin{aligned} \bar{f}(x) &= \bar{f}(0) + \int_0^1 \frac{d}{dt} \bar{f}(tx) dt \\ &= \bar{f}(0) + \int_0^1 \sum_{\ell=1}^k x^\ell \frac{\partial \bar{f}}{\partial x^\ell}(tx) dt \\ &= \bar{f}(0) + \sum_{\ell=1}^k x^\ell \bar{g}_\ell(x), \end{aligned}$$

où  $\bar{g}_\ell(x) = \int_0^1 \frac{\partial \bar{f}}{\partial x^\ell}(tx) dt$  est lisse. (L'on remarque par ailleurs que  $\bar{g}_\ell(0) = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x^\ell}(0)$ .)

Dans le cas d'un germe  $f_p$ , quitte à restreindre le domaine  $U$  de la carte et à composer par une homothétie dans  $\mathbb{R}^k$  l'on peut supposer que  $\phi(U) = B^n(1)$ . L'on applique le raisonnement ci-dessus avec  $\bar{f} := f \circ \phi^{-1}$  et l'on retrouve la première partie de l'énoncé, avec  $g_\ell = \bar{g}_\ell \circ \phi$ .

La deuxième partie du lemme découle en appliquant  $\frac{\partial}{\partial x^\ell}$  à  $f_p$  et en utilisant le fait que  $\frac{\partial x^r}{\partial x^\ell} = \delta_\ell^r$ .  $\square$

**Proposition-Définition 2.14.** *Soit  $f : M \rightarrow N$  une application lisse entre variétés et  $p \in M$  fixé. À travers les isomorphismes canoniques  $T_p M \cong \text{Der}(\mathcal{F}_p, \mathbb{R})$  et  $T_{f(p)} N \cong \text{Der}(\mathcal{F}_{f(p)}, \mathbb{R})$ , la différentielle*

$$df(p) : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$$

s'écrit

$$(df(p)X)h := X(h \circ f), \quad h \in \mathcal{F}_{f(p)}.$$

*Démonstration.* Choisissons des cartes  $(U_i, \phi)$  autour de  $p$  et  $(V_j, \psi)$  autour de  $f(p)$ . Fixons  $X \in \text{Der}(\mathcal{F}_p, \mathbb{R})$ . Soit  $[(i, \xi)] \in T_p M$  tel que  $X(g) = d(g \circ \phi^{-1})\xi$ . Alors  $df(p)[(i, \xi)] = [(j, d(\psi \circ f \circ \phi^{-1})\xi)] \in T_{f(p)} N$  et ce vecteur tangent correspond à la dérivation

$$h \mapsto d(h \circ \psi^{-1})d(\psi \circ f \circ \phi^{-1})\xi = d((h \circ f) \circ \phi^{-1})\xi = X(h \circ f).$$

$\square$

Finalement, pour clôturer la section rendons explicite la bijection canonique

$$\mathcal{C}_p \cong \text{Der}(\mathcal{F}_p, \mathbb{R})$$

obtenue comme composée des bijections canoniques  $T_p M \cong \mathcal{C}_p$  et  $T_p M \cong \text{Der}(\mathcal{F}_p, \mathbb{R})$ . Étant donnée une classe de courbe  $[c] \in \mathcal{C}_p$  et un représentant  $c : I \rightarrow M$  avec  $0 \in I$  et  $c(0) = p$ , on lui associe la dérivation

$$f \mapsto \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ c)(t).$$

En effet, étant donnée une carte  $(U_i, \phi)$  autour de  $p$ , la classe  $[c]$  correspond au vecteur tangent  $[(i, \xi)]$  avec  $\xi = \frac{d}{dt}\big|_{t=0}(\phi \circ c)(t) = d(\phi \circ c)(0)1$ . À son tour, ce vecteur tangent correspond à la dérivation

$$f \mapsto d(f \circ \phi^{-1})\xi = d(f \circ \phi^{-1})d(\phi \circ c)(0)1 = d(f \circ c)(0)1 = \frac{d}{dt}\big|_{t=0}(f \circ c)(t).$$

**2.2. Fibré tangent. Champs de vecteurs.** Dans la section qui précède nous avons décrit en détail l'espace tangent *en un point*. La vraie force de la notion de vecteur tangent devient visible lorsque l'on considère des familles lisses. Pour donner sens à cette notion il faut "recoller" tous les espaces tangents ponctuels en un unique objet de nature lisse.

**Proposition-Définition 2.15.** *Soit  $M$  une variété lisse de dimension  $n$ . L'union disjointe*

$$TM := \sqcup_{p \in M} T_p M = \cup_{p \in M} \{p\} \times T_p M$$

*porte une structure naturelle de variété lisse de dimension  $2n$  ayant la propriété que la projection canonique*

$$\pi : TM \rightarrow M, \quad (p, v) \mapsto p, \quad v \in T_p M$$

*est une submersion lisse.*

On appelle  $TM$  muni de la structure lisse donnée par la proposition le *fibré tangent de  $M$* . Les espaces vectoriels  $T_p M$ ,  $p \in M$  s'appellent *fibres du fibré tangent*.

*Démonstration.* Soit  $(U_i, \phi_i)$  un atlas pour  $M$ . On définit un atlas  $(\tilde{U}_i, \tilde{\phi}_i)$  pour  $TM$  de la manière suivante :

$$\tilde{U}_i := \pi^{-1}(U_i) = \sqcup_{p \in U_i} T_p M,$$

$$\tilde{\phi}_i : \tilde{U}_i \rightarrow \phi_i(U_i) \times \mathbb{R}^n, \quad (p, [(i, \xi)]) \mapsto (\phi_i(p), \xi).$$

Le sens de la dernière formule est le suivant : un vecteur tangent en un point  $p \in U_i$  admet un unique représentant  $\xi \in \mathbb{R}^n$  dans la carte  $U_i$ . L'application  $\tilde{\phi}_i$  associe au couple constitué de  $p$  et de ce vecteur tangent le couple  $(\phi_i(p), \xi) \in U_i \times \mathbb{R}^n$ . Chaque  $\tilde{\phi}_i$  est clairement injective, et  $\tilde{\phi}_i(\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j) = \phi_i(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^{2n}$ .

Les applications de changement de carte

$$\tilde{\phi}_j \circ \tilde{\phi}_i^{-1} : \tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j = \phi_i(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \phi_j(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n$$

sont données par la formule suivante : (exercice!)

$$(x, \xi) \mapsto (\phi_j \circ \phi_i^{-1}(x), d(\phi_j \circ \phi_i^{-1})(x)\xi).$$

Ce sont par conséquent des difféomorphismes (lisses, avec inverse lisse donnée par la formule analogue dans laquelle on échange les rôles de  $i$  et  $j$ ).

Si l'on munit  $TM$  de la plus petite topologie telle que toutes les applications  $\tilde{\phi}_i$  soient des homéomorphismes, la collection  $(\tilde{U}_i, \tilde{\phi}_i)$  devient un atlas qui munit  $TM$  d'une structure de variété.

Montrons que la projection  $\pi : TM \rightarrow M$  est une submersion (surjective, par définition). Choisissons une carte  $(U_i, \phi_i)$  sur  $M$  et considérons la carte associée  $(\tilde{U}_i, \tilde{\phi}_i)$  sur  $TM$ . Il suffit de montrer que

$\phi_i \circ \pi \circ \tilde{\phi}_i^{-1} : \phi_i(U_i) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \phi_i(U_i)$  est une submersion. Or cette composition n'est rien d'autre que la projection sur la première composante  $(x, \xi) \mapsto x$ .  $\square$

**Remarque-exercice (la topologie est déterminée par l'atlas).**

Dans la preuve précédente nous sommes partis de  $TM$  en tant qu'ensemble abstrait et nous avons construit à la fois un atlas *et* une topologie dessus! La situation est générale : soit  $X$  un ensemble abstrait,  $(U_i)$  une collection de parties de  $X$  telle que

$$X = \cup_i U_i,$$

et soient

$$\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$$

des applications injectives telles que  $\phi_i(U_i \cap U_j) \subseteq \mathbb{R}^n$  soient des ouverts de  $\mathbb{R}^n$  pour tous  $i, j$ . Supposons que les applications de transition  $\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_j(U_i \cap U_j)$  sont des difféomorphismes lisses. Il existe alors une unique topologie sur  $X$  telle que les  $\phi_i$  soient des homéomorphismes sur image et telle que  $U \subseteq X$  est un ouvert si et seulement si  $U \cap U_i$  est un ouvert pour tout  $i$ . En munissant  $X$  de cette topologie, la famille  $\{(U_i, \phi_i)\}$  forme un atlas et munit  $X$  d'une structure de variété.

**Exercice 18.** Regardons les vecteurs tangents comme des dérivations ponctuelles. Étant donné l'atlas  $(U_i, \phi_i)$  avec  $\phi_i = (x_i^1, \dots, x_i^n)$  on déduit pour chaque  $i$  et chaque point  $p \in U_i$  la base  $\frac{\partial}{\partial x_i^\ell}$ ,  $\ell = 1, \dots, n$  de  $\text{Der}(\mathcal{F}_p, \mathbb{R})$ . Toute dérivation  $X \in \text{Der}(\mathcal{F}_p, \mathbb{R})$  s'écrit dans la carte  $U_i$  de manière unique comme  $X = \sum_\ell X_i^\ell \frac{\partial}{\partial x_i^\ell}$ . Montrer que la carte  $\tilde{\phi}_i$  agit comme

$$\tilde{\phi}_i : X \in \text{Der}(\mathcal{F}_p, \mathbb{R}) \mapsto (x_i^1(p), \dots, x_i^n(p), X_i^1(p), \dots, X_i^n(p)).$$

**Définition 2.16.** Un champ de vecteurs lisse sur une variété  $M$  est une application lisse  $X : M \rightarrow TM$  telle que

$$\pi \circ X = \text{Id}_M.$$

On dit aussi que  $X$  est une section lisse de la projection  $\pi$ .

On note

$$\mathcal{X}(M)$$

l'espace vectoriel des champs de vecteurs lisses sur  $M$ , avec les opérations d'addition et de multiplication par des scalaires définies point par point.

**Exercice 19.** Montrer qu'un champ de vecteurs lisse sur une variété  $M$  équivaut à la donnée d'une collection de vecteurs tangents

$$X(p) \in T_p M, \quad p \in M$$

telle que, pour toute carte  $(U, \phi = (x^1, \dots, x^n))$  sur  $M$ , en écrivant

$$X(p) = \sum_{\ell} X^{\ell}(p) \frac{\partial}{\partial x^{\ell}}$$

les applications  $X^{\ell} : U_i \rightarrow \mathbb{R}$  soient lisses.

**Exercice 20.** Soit  $X \in \mathcal{X}(M)$  un champ de vecteurs lisse sur une variété  $M$ . Soient

$$X^1, \dots, X^n$$

les composantes de  $X$  dans une carte locale  $\phi = (x^1, \dots, x^n)$ , de sorte que  $X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ . Montrer que les composantes de  $X$  dans une autre carte locale  $\psi = (y^1, \dots, y^n)$  sont

$$\tilde{X}^{\ell} = \sum_i X^i \frac{\partial y^{\ell}}{\partial x^i}, \quad \ell = 1, \dots, n,$$

de sorte que  $X = \sum_{\ell} \tilde{X}^{\ell} \frac{\partial}{\partial y^{\ell}}$ .

Le fibré tangent  $TM$  se projette sur  $M$ , mais il contient aussi la variété  $M$  de manière canonique. En effet, le lecteur pourra vérifier que l'application

$$M \rightarrow TM, \quad p \mapsto (p, 0)$$

est bien définie et est un plongement. L'image de cette application est appelée *la section nulle du fibré tangent* et est notée parfois  $0_M$ .

**2.3. La notion de fibré vectoriel.** Nous venons de définir une structure de variété sur le fibré tangent  $TM$ . Néanmoins, celui-ci possède une structure plus riche : chaque fibre possède une *structure d'espace vectoriel qui varie de manière lisse d'une fibre à l'autre*. Le sens précis de cette affirmation est le suivant : toute fibre possède un voisinage saturé  $\tilde{U}_i$  qui est diffeomorphe à  $\phi_i(U_i) \times \mathbb{R}^n$  par un diffeomorphisme  $\tilde{\phi}_i$  qui envoie les fibres dans  $TM$  sur les fibres  $\{pt\} \times \mathbb{R}^n$  de la première projection, la structure d'espace vectoriel sur les fibres voisines étant induite par la structure d'espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  via ce diffeomorphisme. Par *voisinage saturé* on entend un voisinage qui contient la fibre passant par chacun de ses points. Le fait que la structure d'espace vectoriel induite sur un même espace tangent  $T_pM$  est indépendante du choix de carte  $\tilde{\phi}_i$ ,  $p \in U_i$  est une conséquence du fait que les applications de changement de carte

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_j \circ \tilde{\phi}_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \phi_j(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n, \\ (x, \xi) &\longmapsto (\phi_j \circ \phi_i^{-1}(x), d(\phi_j \circ \phi_i^{-1})(x)\xi) \end{aligned}$$

sont linéaires dans la composante  $\xi$  (à  $x$  fixé). On a en fait une application lisse

$$\phi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow GL_n(\mathbb{R}), \quad x \mapsto d(\phi_j \circ \phi_i^{-1})(x).$$

Toutes ces données sont organisées dans la définition générale suivante.

**Définition 2.17.** *Un fibré vectoriel localement trivial lisse de rang  $r$  est la donnée d'une submersion surjective*

$$\pi : E \rightarrow M$$

*et d'une structure d'espace vectoriel de dimension  $r$  sur chaque fibre  $E_p := \pi^{-1}(p)$ ,  $p \in M$ , telles que la condition suivante soit satisfaite : il existe un recouvrement ouvert  $(U_i)$  de  $M$  et des diffeomorphismes*

$$\Phi_i : \pi^{-1}(U_i) \xrightarrow{\cong} U_i \times \mathbb{R}^r$$

*qui font commuter le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\Phi_i} & U_i \times \mathbb{R}^r \\ \pi \searrow & & \swarrow \text{pr}_1 \\ & U_i & \end{array}$$

*et qui induisent des isomorphismes linéaires  $E_p \xrightarrow{\cong} \{p\} \times \mathbb{R}^r$ .*

*On appelle  $\pi$  la projection,  $E$  l'espace total du fibré,  $M$  la base du fibré,  $(\Phi_i)$  les applications de trivialisations. On note  $E|_U := \pi^{-1}(U)$ .*

Par la suite nous dirons simplement *fibré vectoriel*, le caractère lisse et localement trivial étant sous-entendu, le rang n'étant pas spécifié.

**Proposition-Définition 2.18.** *Étant donné un fibré vectoriel  $E \xrightarrow{\pi} M$ , une section de  $E$  est une application lisse*

$$s : M \rightarrow E$$

telle que

$$\pi \circ s = \text{Id}_M.$$

L'espace des sections de  $E$  porte une structure naturelle d'espace vectoriel donnée par l'addition ponctuelle des sections. On le note

$$\Gamma(E), \text{ ou } \Gamma(M, E).$$

□

Comme nous l'avons déjà vu dans le cas du fibré tangent, tout fibré vectoriel  $E \xrightarrow{\pi} M$  contient de manière canonique la base  $M$  en tant que sous-variété donnée par la *section nulle*. En effet, toute section  $s \in \Gamma(E)$  réalise un plongement de  $M$  dans  $E$ , et la section nulle – l'élément neutre dans  $\Gamma(E)$  – est canoniquement définie

$$M \rightarrow E, \quad p \mapsto (p, 0).$$

L'image de la section nulle est appelée parfois par abus de langage *section nulle*, et est notée  $0_E$ .

**Exemple.** Le fibré trivial  $\theta_M^r := (M \times \mathbb{R}^r \xrightarrow{\text{pr}_1} M)$ . Celui-ci possède une trivialisatation globale tautologique donnée par l'identité. Les sections du fibré trivial ne sont rien d'autre que les fonctions lisses sur  $M$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^r$ .

POINT DE VUE : FONCTIONS VS. SECTIONS. Étant donné un fibré vectoriel  $E$  sur une variété  $M$ , les sections de  $E$  doivent être regardées comme des généralisations des fonctions lisses sur  $M$ . Ce point de vue est particulièrement important dans le contexte de la géométrie différentielle complexe : alors qu'une variété complexe compacte ne possède pas de fonctions holomorphes non-constantes, il existe souvent des fibrés en droites holomorphes qui possèdent des sections non-constantes. Or il est très important de pouvoir se placer dans un cadre dans lequel l'on peut définir des analogues globaux des fonctions, puisque l'on a déjà vu que l'étude des fonctions et de leurs ensembles de niveau permet de comprendre la variété de base.

**Définition 2.19.** Un fibré  $E \xrightarrow{\pi} M$  de rang  $r$  est trivialisable s'il existe une application de trivialisatation globale

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\Phi} & M \times \mathbb{R}^r \\ \pi \searrow & & \swarrow \text{pr}_1 \\ & M & \end{array}$$

i.e. un difféomorphisme global qui induit des isomorphismes linéaires  $E_p \xrightarrow{\cong} \{p\} \times \mathbb{R}^r$ ,  $p \in M$ .

On utilise souvent la terminologie *fibré trivial* au lieu de *fibré trivialisable*. La distinction réside dans le fait de pouvoir donner un isomorphisme *canonique* avec un fibré trivial, ou bien dans le fait de connaître l'existence d'un isomorphisme *ad hoc*. Nous utiliserons les deux appellations sans distinction, tout en restant fidèles à notre convention d'écrire  $E \cong \theta_M^r$  pour un isomorphisme canonique, respectivement  $E \simeq \theta_M^r$  pour un isomorphisme quelconque.

**Remarque.** Il existe une notion d'isomorphisme de fibrés (difféomorphisme qui préserve les fibres et qui est linéaire dans les fibres), de même qu'une notion de morphisme de fibrés (application lisse qui envoie fibre sur fibre et qui est linéaire sur les fibres). Autant dire que l'on peut définir une catégorie de fibrés vectoriels sur une base  $M$ , notée  $\underline{\text{Vect}}(M)$ .

**Exercice 21.** Le fibré tangent  $TM \xrightarrow{\pi} M$  à une variété de dimension  $n$  porte une structure naturelle de fibré vectoriel de rang  $n$ . L'espace des sections de  $TM$  est par définition l'espace des champs de vecteurs lisses sur  $M$ , i.e.  $\Gamma(TM) = \mathcal{X}(M)$ . [Cet exercice est presque tautologique. La seule différence entre la structure que nous avons déjà mise en évidence sur  $TM$  et la définition d'un fibré vectoriel est que, dans le cas du premier, nos applications de trivialisations  $\tilde{\phi}_i$  aboutissent dans  $\phi_i(U_i) \times \mathbb{R}^n$ , plutôt que dans  $U_i \times \mathbb{R}^n$ .]

**Remarque.** Une question importante est celle de comprendre combien de types d'isomorphisme de fibrés de rang  $r$  y a-t-il sur une variété donnée  $M$ . Une première étape est de comprendre si un fibré donné est trivialisable ou pas. Étant donné un fibré trivialisable, une autre question importante est de comprendre combien de classes d'équivalences de trivialisations possibles il porte. La réponse à chacune de ces questions mène à des questions de topologie algébrique (la référence classique en la matière est le livre *Characteristic classes* de Milnor et Stasheff).

**Exemple.** Un fibré de rang 1, ou *fibré en droites*, est trivial si et seulement si il admet une section partout non-nulle. En effet, soit  $L \rightarrow M$  un tel fibré et supposons qu'il existe  $s \in \Gamma(L)$  telle que  $s(p) \neq 0$  pour tout  $p \in M$ . Alors  $\Phi : M \times \mathbb{R} \rightarrow L$ ,  $(p, \lambda) \mapsto \lambda s(p)$  est un isomorphisme de fibrés. Réciproquement, si  $\Phi : M \times \mathbb{R} \rightarrow L$  est un isomorphisme de fibrés, alors  $s(p) := \Phi(p, 1)$  est une section partout non-nulle.

**Exemple.** Le fibré tangent au cercle est trivial. En effet, prenons comme modèle pour le cercle  $S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$ . En tout point  $p \in S^1$  l'espace tangent s'identifie à  $p^\perp \subset \mathbb{R}^2$  et il admet une section partout non-nulle donnée par  $p = (x, y) \mapsto (-y, x) \in p^\perp$ .

Le lecteur n'aura pas manqué de remarquer que les fibrés vectoriels et les variétés sont définis par la même démarche : ce sont des objets obtenus en recollant des modèles locaux simples. Pour les variétés, ce sont les ouverts de  $\mathbb{R}^n$ . Pour les fibrés, ce sont les fibrés triviaux au-dessus des (ouverts de) variétés. Nous avons vu dans la section précédente que la donnée d'un atlas détermine la structure de variété. De la même manière, la donnée d'une collection appropriée d'applications de trivialisations détermine un fibré vectoriel. Ceci constitue la motivation de la construction qui suit.

**Exemple (les changements de trivialisations déterminent le fibré vectoriel).** Soit  $M$  une variété,  $(U_i)$  un recouvrement ouvert et  $\Phi_{ji} : U_i \cap U_j \rightarrow GL_r(\mathbb{R})$  une collection d'applications lisses qui vérifie la *condition de cocycle*

$$\Phi_{ii} = \text{Id sur } U_i, \quad \Phi_{kj}\Phi_{ji}\Phi_{ik} = \text{Id sur } U_i \cap U_j \cap U_k.$$

Il existe un fibré vectoriel  $E$  de rang  $r$  sur  $M$  muni d'applications de trivialisations  $\Phi_i : E|_{U_i} \xrightarrow{\cong} U_i \times \mathbb{R}^r$  telles que  $\Phi_{ji} = \Phi_j \circ \Phi_i^{-1}$ .

En effet, l'on définit

$$E := \sqcup_i U_i \times \mathbb{R}^r / \sim,$$

où  $(i, x, v) \sim (j, y, w)$  si et seulement si  $x = y \in U_i \cap U_j$  et  $\Phi_{ji}(x)v = w$ .

**Exemple-exercice (section comme collection de fonctions compatibles avec les changements de trivialisations).** Soit  $\Phi_{ji} : U_i \cap U_j \rightarrow GL_r(\mathbb{R})$  le cocycle de définition d'un fibré  $E$ . La donnée d'une section  $s$  de  $E$  est équivalente à la donnée d'une collection de fonctions  $s_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^r$  telles que

$$s_j|_{U_i \cap U_j} = \Phi_{ji} \cdot s_i|_{U_i \cap U_j}.$$

En effet, étant donnée  $s$  l'on pose  $s_i := \text{pr}_2 \circ \Phi_i \circ s|_{U_i}$ . Réciproquement, l'on pose  $s|_{U_i} := \Phi_i^{-1} \circ (\text{Id}, s_i)$ .

$$\begin{array}{ccc} E|_{U_i} & \xrightarrow{\Phi_i} & U_i \times \mathbb{R}^r \\ \searrow \pi & & \swarrow \text{pr}_2 \\ & U_i & \\ \nearrow s & & \nwarrow (\text{Id}, s_i) \end{array}$$

**Exemple-exercice (bande de Möbius).** Nous allons décrire un fibré non-trivial de rang 1 sur le cercle  $S^1$ . Toujours dans le modèle pris ci-dessus, considérons les deux ouverts  $U_1 := \{(x, y) \in S^1 : x > -\frac{1}{2}\}$  et  $U_2 := \{(x, y) \in S^1 : x < \frac{1}{2}\}$ . Notons  $U_1 \cap U_2 = V^+ \sqcup V^-$ , où  $V^+$  contient les points de l'intersection pour lesquels  $y > 0$ , et  $V^-$  contient les points de l'intersection pour lesquels  $y < 0$ . On définit une application de transition

$$\Phi_{12} : V^\pm \rightarrow GL_1(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^*, \quad \Phi_{12}|_{V^\pm} = \pm 1.$$

Montrer que le fibré de rang 1 associé n'est pas trivial (l'on pourra montrer que toute section doit nécessairement s'annuler).

**Exemple.** Le fibré tangent à  $S^2$  n'est pas trivial. Ceci est un théorème profond, que nous allons démontrer plus tard dans le cours. De façon plus précise, nous allons démontrer que tout champ de vecteurs sur  $S^2$  possède au moins un zéro.

**Exercice 22.** Le fibré tangent à  $S^3$  est trivial.

Un problème classique de géométrie différentielle était le fait de déterminer le nombre maximal de champs de vecteurs linéairement indépendants sur la sphère  $S^n$ . Ce problème a été résolu par Frank Adams en 1962 (F. Adams, Vector Fields on Spheres, *Annals of Mathematics* 75 : 603–632).

DE L'IMPORTANCE DES FIBRÉS VECTORIELS. Nous avons déjà mentionné le fait que les sections de fibrés jouent le rôle de fonctions sur la base, un point de vue particulièrement important en géométrie complexe. Sans entrer dans les détails nous donnons encore quelques points de vue pour souligner l'importance de la notion de fibré vectoriel.

(i) Les champs de vecteurs, les formes différentielles et, de manière plus générale, les tenseurs, sont naturellement des sections de fibrés vectoriels. La notion de fibré est indispensable pour s'affranchir de coordonnées lorsque l'on travaille avec des objets de nature linéaire.

(ii) Les fibrés apparaissent naturellement lorsque l'on étudie les petites déformations de sous-variétés. En effet, le théorème du voisinage tubulaire stipule qu'un voisinage d'une sous-variété est diffeomorphe à un voisinage de la section nulle dans son *fibré normal*.

(iii) Les espaces de sections de fibrés sont le domaine naturel d'action des opérateurs différentiels sur des variétés. Ceux-ci apparaissent par exemple lorsque l'on linéarise des équations aux dérivées partielles non-linéaires de nature géométrique.

(iv) En physique la donnée d'un fibré  $E \rightarrow M$  est vue comme la donnée d'une structure supplémentaire sur un espace de nature physique (la base  $M$ ). Les sections de  $E$  modélisent la notion de *champ sur  $M$* .

Pour finir cette section et pour donner une meilleure intuition de l'analogie entre sections de fibrés vectoriels et fonctions, nous traitons un exemple classique qui est fondamental en géométrie algébrique.

**Exemple (polynômes homogènes comme sections de fibrés en droites sur  $\mathbb{R}P^n$ ).**

L'espace projectif réel de dimension  $n$ , noté  $\mathbb{R}P^n$ , est l'ensemble des droites de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Il peut être décrit de manière équivalente comme le

quotient de  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  pour la relation d'équivalence

$$x \sim \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^*, x = \lambda x'.$$

On note la classe d'équivalence d'un point  $(x_0, \dots, x_n)$ , ou encore la droite dirigée par le vecteur  $(x_0, \dots, x_n)$ , par  $[x_0 : \dots : x_n]$ .

L'on munit  $\mathbb{R}P^n$  d'une structure de variété en considérant le recouvrement donné par les  $n + 1$  ouverts

$$V_i := \{[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{R}P^n : x_i \neq 0\}, \quad i \in \{0, \dots, n\}$$

et les cartes

$$\phi_i : V_i \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad [x_0 : \dots : x_n] \mapsto \left( \frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right).$$

L'on vérifie sans peine que les cartes sont bijectives et que les applications de changement de carte  $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$ ,  $j < i$  sont données par la formule

$$(y_1, \dots, y_n) \mapsto \left( \frac{y_1}{y_{j+1}}, \dots, \frac{y_j}{y_{j+1}}, \frac{y_{j+2}}{y_{j+1}}, \dots, \frac{y_i}{y_{j+1}}, \frac{1}{y_{j+1}}, \frac{y_{i+1}}{y_{j+1}}, \dots, \frac{y_n}{y_{j+1}} \right).$$

Une formule similaire vaut pour son inverse  $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ . Les applications de changement de carte sont par conséquent des difféomorphismes et munissent  $\mathbb{R}P^n$  d'une structure de variété.

**Remarque.** Voici deux autres descriptions alternatives de  $\mathbb{R}P^n$ , expliquées dans la section suivante :  $\mathbb{R}P^n$  est le quotient de  $S^n$  par l'action de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  donnée par l'application antipodale  $x \mapsto -x$ , et c'est aussi le quotient de  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  par l'action propre et libre du groupe de Lie  $\mathbb{R}^*$  donnée par homothéties.

Le *fibré tautologique* sur  $\mathbb{R}P^n$  est le fibré de rang 1 dont la fibre au-dessus d'un point  $d \in \mathbb{R}P^n$  qui représente une droite  $d \subset \mathbb{R}^{n+1}$  est la droite  $d$ . On le note

$$\tau \rightarrow \mathbb{R}P^n, \quad \tau = \{(d, v) : d \in \mathbb{R}P^n, v \in d\}.$$

La structure de fibré vectoriel est donnée par les application de trivialisation suivantes définies au-dessus des  $V_i$ ,  $i = 0, \dots, n$  :

$$\Phi_i : \tau|_{V_i} \xrightarrow{\cong} V_i \times \mathbb{R}$$

envoie un élément

$$([x_0 : \dots : x_n], \lambda(x_0/x_i, \dots, x_{i-1}/x_i, 1, x_{i+1}/x_i, \dots, x_n/x_i)) \in \tau|_{V_i}$$

avec  $\lambda \in \mathbb{R}$  sur

$$([x : 0 : \dots : x_n], \lambda) \in V_i \times \mathbb{R}.$$

En d'autres mots, la trivialisation  $\Phi_i$  utilise le générateur distingué d'une droite appartenant à  $V_i$  caractérisé par la condition  $x_i = 1$ .

L'on vérifie que

$$\Phi_j \circ \Phi_i^{-1}([x_0 : \dots : x_n], \lambda) = ([x_0 : \dots : x_n], \lambda \frac{x_j}{x_i}).$$

De manière équivalente, on peut écrire

$$\Phi_j \circ \Phi_i^{-1}([x_0 : \dots : x_n], \lambda) = ([x_0 : \dots : x_n], \Phi_{ji}([x_0 : \dots : x_n])\lambda),$$

avec

$$\Phi_{ji} : V_i \cap V_j \rightarrow GL(1, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^*, \quad [x_0 : \dots : x_n] \mapsto \frac{x_j}{x_i}.$$

Le *fibré hyperplan*  $L \rightarrow \mathbb{R}P^n$  est par définition le fibré en droites dont les fonctions de transition sont données par

$$\Phi_{ji} : V_i \cap V_j \rightarrow GL(1, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^*, \quad \Phi_{ji}([x_0 : \dots : x_n]) = \frac{x_i}{x_j}.$$

Nous verrons plus tard que  $L$  est le fibré dual de  $\tau$ .

Soit  $k \in \mathbb{Z}$ . La  $k$ -ème puissance tensorielle du fibré hyperplan, notée  $L^{\otimes k} \rightarrow \mathbb{R}P^n$ , est par définition le fibré en droites dont les fonctions de transition sont données par

$$\Phi_{ji} : V_i \cap V_j \rightarrow GL(1, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^*, \quad \Phi_{ji}([x_0 : \dots : x_n]) = \left(\frac{x_i}{x_j}\right)^k.$$

**Proposition 2.20.** *Il existe une bijection canonique*

$$\Gamma(L^{\otimes k}) \cong \{f : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \text{ lisse et homogène de degré } k\}.$$

*Démonstration.* La condition d'homogénéité s'écrit  $f(\lambda x) = \lambda^k f(x)$  pour  $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  et  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ .

Étant donnée une section  $s \in \Gamma(L^{\otimes k})$  présentée comme une collection de sections  $s_i : V_i \rightarrow \mathbb{R}$  telles que

$$s_j([x_0 : \dots : x_n]) = \left(\frac{x_i}{x_j}\right)^k s_i([x_0 : \dots : x_n]) \text{ sur } V_i \cap V_j,$$

l'on définit

$$f|_{V_i}(x_0, \dots, x_n) := x_i^k s_i([x_0 : \dots : x_n]).$$

La condition de compatibilité sur les  $s_i$  assure précisément la bonne définition de  $f$ . La fonction  $f$  est lisse et homogène de degré  $k$  par construction.

Réciproquement, étant donnée  $f$  lisse et homogène de degré  $k$ , l'on pose

$$s_i([x_0 : \dots : x_n]) := \frac{f(x_0, \dots, x_n)}{x_i^k}.$$

L'homogénéité de  $f$  assure la bonne définition des  $s_i$  et leur compatibilité, de sorte qu'elles se recollent en une section de  $L^{\otimes k}$ .  $\square$

Un corollaire de cette construction est le fait que les polynômes homogènes de degré  $k$  sur  $\mathbb{R}^{n+1}$  s'identifient naturellement aux sections de  $L^{\otimes k}$ . Ceci est une instance emblématique du principe selon lequel les sections de fibrés généralisent la notion de fonction.

### 3. EXEMPLES ET CONSTRUCTIONS DE VARIÉTÉS

Le but de cette section est de présenter des familles d'exemples et des constructions générales de variétés.

**3.1. Produit.** Soient  $M$  et  $N$  deux variétés, munies d'atlas  $\{(U_i, \phi_i)\}$  et respectivement  $\{(V_j, \psi_j)\}$ . Le produit  $M \times N$  possède une structure naturelle de variété de dimension  $\dim M + \dim N$ , définie par l'atlas  $\{(U_i \times V_j, \phi_i \times \psi_j)\}$ .

**3.2. Somme connexe.** La somme connexe de deux variétés  $M$  et  $M'$  de même dimension  $k$  est définie intuitivement de la manière suivante : on considère deux points  $p \in M$ ,  $p' \in M'$ , deux cartes  $(U, \phi)$ ,  $(U', \phi')$  autour de  $p$  et  $p'$  respectivement, deux ouverts relativement compacts  $V \subset\subset U$  et  $V' \subset\subset U'$  modelés via ces cartes sur une même boule  $B^k(\epsilon)$ , on enlève  $V$  et  $V'$  de  $M$ , resp.  $M'$  et on recolle le résultat en identifiant la frontière de  $V$  à la frontière de  $V'$  via leur identification commune avec la sphère  $S^{k-1}(\epsilon)$ . Le résultat est noté  $M \# M'$ .

Le lecteur trouvera une description d'un atlas dans le livre de Lafontaine, p. 85, exercice 28 du chapitre 2. La question qui se pose naturellement est celle de la dépendance du type de difféomorphisme de  $M \# M'$  par rapport aux différents choix (points, cartes, ouverts). Cette étude fait intervenir la notion d'*orientabilité* d'une variété, que nous verrons plus loin. Plus précisément : si  $M$  ou  $M'$  n'est pas orientable, le type de difféomorphisme de  $M \# M'$  ne dépend pas des choix. Si  $M$  et  $M'$  sont orientables, le type de difféomorphisme de  $M \# M'$  ne dépend pas des choix à condition d'imposer aux cartes de préserver l'orientation.

Le fait d'écrire une variété comme somme connexe est la manière la plus naïve de la "casser" en morceaux plus simples. Ce n'est pas toujours possible. On dit qu'une variété est *irréductible* si elle ne peut pas être écrite comme somme connexe. Les seules variétés de dimension 2 compactes irréductibles sont la sphère, le tore, et le plan projectif. À partir de la dimension 3 il existe une infinité de variétés compactes irréductibles en chaque dimension.

**Exercice 23.** Soit  $M^n$  une variété de dimension  $n$  et soit  $S^n$  la sphère de même dimension. Montrer que  $M \# S^n$  est difféomorphe à  $M$ .

**3.3. Variétés affines.** Soit  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  et

$$P_1, \dots, P_\ell \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_N]$$

une collection finie de polynômes. On note  $\mathcal{I} \subset \mathbb{K}[X_1, \dots, X_N]$  l'idéal engendré par ces polynômes. La *variété affine définie par l'idéal  $\mathcal{I}$*  est par définition

$$V_{\mathcal{I}}(\mathbb{K}) := \{x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{K}^N : P(x) = 0, \forall P \in \mathcal{I}\}.$$

Si l'application  $P = (P_1, \dots, P_\ell) : \mathbb{K}^N \rightarrow \mathbb{K}^\ell$  est submersive en 0, alors  $V_{\mathcal{I}}(\mathbb{K})$  est une sous-variété de  $\mathbb{K}^N$ , réelle ou complexe, selon que  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

**3.4. Variétés projectives.** Soit à nouveau  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . On appelle *polynôme homogène (de degré  $k$ )* un polynôme  $P \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_N]$  tel que

$$P(\lambda X_1, \dots, \lambda X_N) = \lambda^k P(X_1, \dots, X_N).$$

Par exemple  $P(x, y, z) = x^3 + 2y^3 + 5z^3 + xyz$  est un polynôme homogène de degré 3, mais  $P(x, y) = x^2 + y^3$  n'est pas homogène.

Soient  $P_1, \dots, P_\ell \in \mathbb{K}[X_0, \dots, X_N]$  des polynômes homogènes. La *variété projective définie par le système d'équations polynomiales  $\mathcal{P} := (P_1 = \dots = P_\ell = 0)$*  est par définition

$$V_{\mathcal{P}}(\mathbb{K}) := \{[x_0 : \dots : x_N] \in \mathbb{K}P^N : P_i(x_0, \dots, x_N) = 0, \forall i\}.$$

On voit que l'homogénéité des  $P_i$  garantit la bonne définition de  $V_{\mathcal{P}}(\mathbb{K})$  : deux points  $(x_0, \dots, x_N)$  et  $(x'_0, \dots, x'_N)$  dans  $\mathbb{K}^{N+1} \setminus \{0\}$  définissent la même classe  $[x_0 : \dots : x_N] \in \mathbb{K}P^N$  si et seulement si il existe  $\lambda \in \mathbb{K}^*$  tel que  $(x_0, \dots, x_N) = \lambda(x'_0, \dots, x'_N)$ . Ainsi  $P_i(x_0, \dots, x_N) = 0$  si et seulement si  $P_i(x'_0, \dots, x'_N) = 0$ .

Si l'application  $(P_1, \dots, P_\ell) : \mathbb{K}^{N+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{K}^\ell$  est submersive au-dessus de 0, alors  $V_{\mathcal{P}}(\mathbb{K})$  est une sous-variété lisse fermée de  $\mathbb{K}P^N$ . Puisque  $\mathbb{K}P^N$  est compact, on déduit que  $V_{\mathcal{P}}(\mathbb{K})$  est compacte aussi.

Un point de vue intrinsèque sur cette construction est de voir  $V_{\mathcal{P}}(\mathbb{K})$  comme le lieu commun des zéros des sections de fibrés  $L^{\otimes k_i}$  déterminées par les polynômes  $P_i$  homogènes de degré  $k_i$ .

Les variétés affines et les variétés projectives sont l'objet d'étude de la géométrie algébrique. La géométrie différentielle y joue un rôle!

**3.5. Actions de groupes discrets.** Soit  $\Gamma$  un groupe. Une *action lisse de  $\Gamma$  sur  $M$*  est un morphisme de groupes

$$\Gamma \rightarrow \text{Diff}(M).$$

De manière équivalente, une action lisse est la donnée d'une application

$$\Gamma \times M \rightarrow M, \quad (\gamma, p) \mapsto \gamma \cdot p$$

telle que  $(\gamma_1 \gamma_2) \cdot p = \gamma_1 \cdot (\gamma_2 \cdot p)$  ("action") et telle que l'application  $p \mapsto \gamma \cdot p$  soit un difféomorphisme pour tout  $\gamma \in \Gamma$  (action "lisse").

L'on peut penser une action de groupe comme étant une manière de réaliser un groupe abstrait  $\Gamma$  comme groupe de symétries d'un objet géométrique (ici, une variété). L'on peut étudier de cette manière un groupe abstrait  $\Gamma$  via ses différentes "incarnations" géométriques.

On parle aussi de “représentation” d’un groupe. Le plus souvent l’on s’intéresse aux représentations linéaires, i.e. aux morphismes

$$\Gamma \rightarrow GL(V),$$

avec  $V$  un espace vectoriel. Le point de vue des représentations est omniprésent en mathématiques et se décline sous une myriade de façons.

Dans cette section nous adoptons le point de vue opposé : nous allons utiliser les actions de groupes non pas pour étudier le groupe  $\Gamma$ , mais pour étudier la variété cible  $M$  et construire d’autres variétés à partir de celle-ci.

On appelle *orbite du point*  $x \in M$  l’ensemble  $\{\gamma \cdot x : \gamma \in \Gamma\}$ , noté  $\Gamma \cdot x$ . On appelle *espace d’orbites*, ou *espace quotient*, et on le note

$$M/\Gamma,$$

l’ensemble des classes d’équivalence de points de  $M$  pour la relation d’équivalence

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists \gamma \in \Gamma, \gamma \cdot x = y.$$

Il existe une application naturelle de projection

$$\pi : M \rightarrow M/\Gamma, \quad x \mapsto \Gamma \cdot x.$$

On munit  $M/\Gamma$  de la *topologie quotient* : une partie  $U \subset M/\Gamma$  est ouverte si et seulement si  $\pi^{-1}(U) \subset M$  est un ouvert.

**DIGRESSION : TOPOLOGIE QUOTIENT.** Soit  $\mathcal{R}$  une relation d’équivalence sur un espace topologique  $M$  (par exemple la relation d’équivalence donnée par le fait d’appartenir à la même orbite d’une action de groupe). L’*espace topologique quotient*  $M/\mathcal{R}$  est défini comme étant l’ensemble des classes d’équivalence pour la relation  $\mathcal{R}$ , muni de la *topologie quotient* définie comme suit : les ouverts  $U \subseteq M/\mathcal{R}$  sont par définition les parties telles que  $\pi^{-1}(U) \subseteq M$  soit ouvert. Ici  $\pi : M \rightarrow M/\mathcal{R}$  est la projection canonique qui associe à tout élément sa classe d’équivalence.

**Exercice.** Soit  $Y$  un espace topologique quelconque. Une application  $f : M/\mathcal{R} \rightarrow Y$  est continue si et seulement si  $f \circ \pi : M \rightarrow Y$  est continue.

$$\begin{array}{ccc} M & & \\ \pi \downarrow & \searrow f \circ \pi & \\ M/\mathcal{R} & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

La notion de topologie quotient donne un sens précis au fait de *recoler* des espaces topologiques. Soient  $X, Y$  deux espaces topologiques et  $A \subseteq X, B \subseteq Y$  deux parties munies de la topologie induite. Supposons que l’on se soit donné un homéomorphisme  $\phi : A \xrightarrow{\cong} B$ . On définit

le recollement de  $X$  et  $Y$  selon  $A$  et  $B$  via  $\phi$  comme étant l'espace topologique quotient

$$X \cup_{\phi} Y := X \cup Y / \sim$$

pour la relation d'équivalence  $\sim$  définie comme suit : deux points de  $X$  ou deux points de  $Y$  sont équivalents si et seulement si ils coïncident, et deux points  $x \in X$  et  $y \in Y$  sont équivalents si et seulement si  $x \in A$ ,  $y \in B$  et  $y = \phi(x)$ .

**Exemples.** (0) un "chapeau de sorcière" peut être décrit comme recollement d'un cône circulaire avec un anneau, le long d'un cercle de bord. Bien-sûr, l'espace qui en résulte est homéomorphe à un disque.

(1) l'on peut décrire la sphère  $S^n$  comme recollement de deux disques  $D^n$  le long de leur bord. On écrit  $S^n = D^n \sqcup_{\text{Id}} D^n$ .

(2) l'on peut décrire  $\mathbb{R}P^2$  comme étant homéomorphe au recollement le long du bord d'un disque avec une bande de Möbius. L'on écrit  $\mathbb{R}P^2 = D^2 \sqcup_{\partial} \text{Möbius}$ .

(3) l'on peut décrire le tore  $T^2$  comme recollement de deux cylindres le long de leurs bords ; ou bien comme recollement d'un cylindre avec lui-même le long des deux composantes de bord. Cette même construction fournit la bouteille de Klein si l'on change la manière d'identifier deux cercles en la composant avec une réflexion.

La notion de topologie quotient donne aussi un sens précis au fait d'écraser sur un point une partie d'un espace topologique. Soit  $X$  un espace topologique et  $A \subseteq X$ . On définit sur  $X$  une relation d'équivalence en demandant que deux points distincts soient équivalents si et seulement si ils appartiennent à  $A$ . L'espace topologique quotient est noté  $X/A$  et possède un point distingué qui est la classe d'équivalence de l'ensemble  $A$  (on dit que c'est un *espace topologique pointé*).

**Exemples.** (1)  $D^n/S^{n-1}$  est homéomorphe à  $S^n$ .

(2)  $S^n/D^n$  est homéomorphe à  $S^n$ , où  $D^n$  est un disque fermé plongé dans  $S^n$ .

(3) Si  $A \subset \mathbb{C}$  est un anneau fermé et  $C$  est une composante de bord, le quotient  $A/C$  est homéomorphe au disque  $D^2$ .

FIN DE LA DIGRESSION.

En vue du théorème nous donnons trois définitions importantes.

Soit  $\Gamma \times M \rightarrow M$  une action de groupe sur une variété. On dit que l'action est *propre* si pour tous compacts  $K, L \subset M$  l'on a

$$\#\{\gamma \in \Gamma : \gamma(K) \cap L \neq \emptyset\} < \infty.$$

De manière équivalente, si l'on regarde  $\Gamma$  comme espace topologique muni de la topologie discrète, une action est propre si l'application

$$\Gamma \times M \rightarrow M \times M, \quad (\gamma, x) \mapsto (\gamma \cdot x, x)$$

est propre, i.e. la préimage de tout compact est un compact.

On dit que l'action est *libre* si

$$\gamma \cdot x \neq x$$

pour tout  $x \in M$  et pour tout  $\gamma \in \Gamma$  différent de l'élément neutre.

Une application continue  $f : X \rightarrow Y$  est appelée un *revêtement* si pour tout  $y \in Y$  il existe un voisinage ouvert  $y \in U \subseteq Y$  tel que  $f^{-1}(U)$  soit une union disjointe d'ouverts  $V_i$  tels que  $f|_{V_i} : V_i \rightarrow U$  soit un homéomorphisme. On parle d'un *revêtement lisse* si  $f$  est un revêtement,  $X, Y$  sont des variétés et  $f$  est un difféomorphisme local (en particulier  $f|_{V_i} : V_i \rightarrow U$  est un difféomorphisme).

**DIGRESSION-OUVERTURE : REVÊTEMENTS.** L'on énonce ici sans preuve quelques faits de base sur les revêtements. Une référence possible est le cours de W.S. Massey, *A Basic Course in Algebraic Topology*, Springer, GTM, chapitre V. Dans la dernière partie de cette digression nous utilisons la notion de *groupe fondamentale*.

Soit  $f : X \rightarrow Y$  un revêtement avec  $X, Y$  connexes et connexes par arcs. Soient  $y \in Y$  et  $x \in f^{-1}(y)$  des points base fixés.

- *relèvements de chemins* : tout chemin dans  $Y$  d'origine  $y$  se relève de manière unique à un chemin dans  $X$  d'origine  $x$ .
- *relèvement des homotopies* : l'autre extrémité du chemin relevé dans  $X$  ne dépend que de la classe d'homotopie à extrémités fixées du chemin dans  $Y$ . On obtient ainsi une *action de  $\pi_1(Y, y)$  sur la fibre  $f^{-1}(y)$* .
- le *groupe des automorphismes du revêtement*, noté  $\text{Aut}(X, f)$ , est le groupe des homéomorphismes  $\phi : X \rightarrow X$  qui préservent les fibres de  $f$ , i.e.

$$f \circ \phi = f.$$

- l'action d'un élément  $\phi \in \text{Aut}(X, f)$  sur un point détermine uniquement l'action de  $\phi$  sur un voisinage de ce point. Il en découle qu'une transformation  $\phi \in \text{Aut}(X, f)$  est uniquement déterminée par l'image d'un point. En particulier  $\text{Aut}(X, f)$  agit librement sur  $X$ .
- le groupe  $\text{Aut}(X, f)$  agit transitivement sur chaque fibre si et seulement si  $f_*\pi_1(X, x)$  est un sous-groupe distingué de  $\pi_1(Y, y)$ ,  $y = f(x)$ . L'on parle dans ce cas de *revêtement régulier*.

FIN DE LA DIGRESSION-OUVERTURE.

**Théorème 3.1.** *Soit  $\Gamma$  groupe agissant sur une variété séparée  $M$ .*

*Si l'action est propre, le quotient  $M/\Gamma$  est séparé.*

*Si l'action est propre et libre, la projection  $\pi : M \rightarrow M/\Gamma$  est un revêtement. Le quotient  $M/\Gamma$  possède une unique structure de variété telle que la projection  $\pi : M \rightarrow M/\Gamma$  soit un revêtement lisse.*

Le lecteur pourra trouver une preuve très détaillée de ce résultat dans le livre de Lafontaine, chapitre II.F, preuve du théorème 49, p. 74.

*Démonstration.* Supposons que l'action soit propre et montrons que  $M/\Gamma$  est séparé. Sinon, il existe  $p \neq q \in M/\Gamma$  tels que tous deux voisinages de  $p$  et  $q$  s'intersectent. Fixons deux préimages  $x, y$  pour  $p$  et  $q$  respectivement. L'on trouve des suites  $\gamma_n \in \Gamma, x_n, y_n \in M$  telles que  $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y$  et  $\gamma_n \cdot x_n = y_n$ . Puisque  $x$  et  $y$  possèdent des voisinages relativement compacts dans  $M$ , l'hypothèse de propriété implique le fait qu'une infinité de termes de la suite  $\gamma_n$  doivent être égaux. En notant leur valeur commune  $\gamma$  on trouve  $\gamma \cdot x = y$ , donc  $p = q$ .

Supposons maintenant que l'action soit propre et libre. Un argument topologique similaire montre que :

*pour tout  $x \in M$  il existe un voisinage ouvert  $V$  tel que*

$$\gamma \cdot V \cap V = \emptyset.$$

En particulier la collection  $\{\gamma \cdot V : \gamma \in \Gamma\}$  consiste en des ouverts deux à deux disjoints. En notant  $U := \pi(V) = \pi(\gamma \cdot V)$  on voit que  $\pi^{-1}(U) = \sqcup_{\gamma} \gamma \cdot V$  et  $\pi|_{\gamma \cdot V} : \gamma \cdot V \rightarrow U$  est un homéomorphisme local. Donc  $\pi$  est un revêtement.

Si  $\pi$  est un revêtement lisse, c'est en particulier un difféomorphisme local sur image. Or, pour que le homéomorphisme  $\pi|_V : V \rightarrow U$  soit un difféomorphisme local, la structure différentiable sur  $U$  doit nécessairement être induite par celle de  $V$  via  $\pi$ . L'on vérifie directement que la collection des (cartes qui recouvrent les) ouverts  $U$  de la forme précédente forme un atlas.  $\square$

**Exemple.** Soit  $\Gamma = \mathbb{Z}$  agissant sur  $\mathbb{R}$  par  $k \cdot x := x + k$ . L'orbite du point  $0 \in \mathbb{R}$  est  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ , l'action est propre et libre, et  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  est homéomorphe à  $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ .

**Exemple.** Considérons  $M = S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  et  $\Gamma = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  agissant sur  $S^1$  par

$$k(\text{mod } n) \cdot z := e^{\frac{2ik\pi}{n}} z.$$

L'orbite de  $1 \in S^1$  est le groupe  $\{\zeta^k : k \in \{0, \dots, n-1\}, \zeta = e^{\frac{2i\pi}{n}}\} \subset S^1$ . Si l'on regarde  $S^1$  comme  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , on voit que  $S^1/\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \mathbb{R}/\frac{1}{n}\mathbb{Z}$ .

**Exercice 24.** L'action de  $\mathbb{Z}$  sur  $\mathbb{R}^2$  par  $n \cdot (x, y) := (2^n x, 2^{-n} y)$  n'est pas propre.

**3.6. Groupes de Lie : exemples.** Dans le contexte des variétés il est naturel de considérer des groupes pour lesquels la structure de groupe est compatible avec la structure de variété : les groupes de Lie. Ce sont des objets d'une importance centrale en mathématiques.

**Définition 3.2.** *Un groupe de Lie est une variété  $G$  munie d'une structure de groupe différentiable au sens suivant : les opérations de multiplication*

$$m : G \times G \rightarrow G, \quad m(g_1, g_2) := g_1 g_2$$

*et d'inversion*

$$\iota : G \rightarrow G, \quad \iota(g) := g^{-1}$$

*sont lisses.*

Notre but dans cette section est de donner des exemples. Une étude plus détaillée de quelques notions de base concernant les groupes de Lie suivra plus tard. L'un des théorèmes importants du sujet est le suivant :

**Théorème.** *Un sous-groupe fermé d'un groupe de Lie est un groupe de Lie.*  $\square$

Pour la preuve on pourra consulter le livre de Warner, chapitre 3, et plus précisément la preuve du théorème 3.21.

L'un des objets centraux en théorie des groupes de Lie est l'espace tangent en l'identité  $T_e G$ . Celui-ci porte une structure d'algèbre de Lie, que nous allons définir plus tard. On le note souvent  $Lie(G)$ , ou encore  $\mathfrak{g}$ , et on l'appelle *l'algèbre de Lie associée au groupe  $G$* .

### Exemples.

1. Le *groupe général linéaire sur  $\mathbb{R}$* , noté  $GL(n, \mathbb{R})$  : c'est l'ensemble des matrices réelles de dimension  $n$  inversibles, vu comme ouvert dans  $M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$  et muni de la topologie et de la structure différentiable induites. C'est une variété de dimension  $n^2$ .

1bis. Le *groupe général linéaire sur  $\mathbb{C}$* , noté  $GL(n, \mathbb{C})$  : c'est l'ensemble des matrices complexes de dimension  $n$  inversibles, vu comme ouvert dans  $M_n(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{n^2}$  et muni de la topologie et de la structure différentiable induites. Dimension sur  $\mathbb{C}$  égale à  $n^2$ .

2. Le *groupe orthogonal  $O(n)$*  est le sous-groupe fermé de  $GL(n, \mathbb{R})$  défini par les conditions

$$AA^t = \text{Id}.$$

Il est compact et possède deux composantes connexes, distinguées par les conditions  $\det A = \pm 1$ .

L'équation de définition de  $O(n)$  est submersive (exercice!) et l'espace tangent en l'identité à  $O(n)$  est par conséquent

$$T_{\text{Id}}O(n) \cong \{X \in M_n(\mathbb{R}) : X + X^t = 0\}.$$

Ainsi

$$\dim O(n) = (n-1)n/2.$$

3. Le *groupe spécial orthogonal*  $SO(n)$  est la composante connexe de l'identité dans  $O(n)$ . Il est donc défini par les conditions

$$AA^t = \text{Id}, \quad \det A = 1.$$

Sa dimension est bien-sûr la même que celle de  $O(n)$ .

4. Le *groupe unitaire*  $U(n)$  est le sous-groupe fermé de  $GL(n, \mathbb{C})$  défini par les conditions

$$A\bar{A}^t = \text{Id}.$$

Il est connexe et compact. Noter que l'équation de définition, quoique submersive, n'est pas holomorphe mais seulement lisse au sens réel! Le groupe  $U(n)$  est donc une variété réelle et non pas complexe. Son espace tangent en l'identité est

$$T_{\text{Id}}U(n) \cong \{X \in M_n(\mathbb{C}) : X + \bar{X}^t = 0\}.$$

Sa dimension *sur*  $\mathbb{R}$  est donc

$$\dim U(n) = 2(n-1)n/2 + n = n^2.$$

L'application déterminant est lisse et définit un morphisme de groupes

$$\det : U(n) \rightarrow U(1).$$

5. Le *groupe spécial unitaire*  $SU(n)$  est le noyau de l'application déterminant restreinte à  $U(n)$ . Il est donc défini comme sous-variété de  $GL(n, \mathbb{C})$  par les équations

$$AA^t = \text{Id}, \quad \det A = 1.$$

Puisque tout morphisme surjectif de groupes de Lie est submersif, on déduit que

$$\dim SU(n) = n^2 - 1.$$

Le groupe  $SU(n)$  est connexe et compact (fermé dans compact).

6. Le *groupe symplectique réel*  $Sp(2n, \mathbb{R})$  est défini comme le sous-groupe de  $GL(4n, \mathbb{R})$  donné par les conditions

$$A^t J A = J, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -\text{Id}_n \\ \text{Id}_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Noter le fait que  $J^2 = -\text{Id}_{2n}$ . C'est un groupe non-compact, connexe. L'équation de définition est submersive et son espace tangent en l'identité est

$$T_{\text{Id}}Sp(2n, \mathbb{R}) \cong \{X \in M_{2n}(\mathbb{R}) : JX + X^t J = 0\}.$$

La condition équivalente  $X^t = -JXJ$  implique le fait que sa dimension est égale à

$$\dim Sp(2n, \mathbb{R}) = n(2n+1).$$

Pour le démontrer l'on pourra écrire une matrice  $X$  par blocs sous la forme  $X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ .

**Remarque.** De façon intrinsèque, étant donné un espace vectoriel  $V$  :

- on définit  $GL(V)$  comme le groupe des automorphismes linéaires de  $V$  ;
- lorsque  $V$  est un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire  $g$ , on définit  $O(V, g)$  comme le groupe des automorphismes linéaires qui préservent  $g$ , et  $SO(V, g)$  comme la composante connexe de l'identité dans  $O(V, g)$  ;
- lorsque  $V$  est un espace vectoriel complexe muni d'une métrique hermitienne  $h$ , on définit  $U(V, h)$  comme le groupe des automorphismes  $\mathbb{C}$ -linéaires qui préservent  $h$ , et  $SU(V, h)$  comme le noyau de l'application déterminant  $\det : U(V, h) \rightarrow U(1)$  ;
- lorsque  $V$  est un espace vectoriel réel et  $\omega$  une forme symplectique, i.e. une forme bilinéaire anti-symétrique non-dégénérée, on définit  $Sp(V, \omega)$  comme l'ensemble des automorphismes linéaires qui préservent  $\omega$ .

**Exercice 25.** Vérifier que les définitions intrinsèques récupèrent les définitions qui les précèdent dans les cas suivants :

- le produit scalaire euclidien sur  $\mathbb{R}^n$  donné par

$$g(x, y) = \sum_{k=1}^n x_k y_k,$$

où  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n)$  ;

- le produit hermitien standard sur  $\mathbb{C}^n$  donné par

$$h(z, w) = \sum_{k=1}^n \bar{z}_k w_k,$$

où  $z = (z_1, \dots, z_n)$ ,  $w = (w_1, \dots, w_n)$  ;

- la forme symplectique standard sur  $\mathbb{R}^{2n}$  donnée par

$$\omega(X, X') = \sum_{k=1}^n x_k y'_k - y_k x'_k = g(JX, Y),$$

où  $X = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ ,  $X' = (x'_1, \dots, x'_n, y'_1, \dots, y'_n)$ .

Identifions  $\mathbb{C}^n$  à  $\mathbb{R}^{2n}$  via l'isomorphisme  $z \mapsto (\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z))$ . Vérifier que la multiplication par  $i$  dans  $\mathbb{C}^n$  correspond à l'action de  $J$  dans  $\mathbb{R}^{2n}$ . Vérifier que

$$h = g + i\omega.$$

(L'un des messages de ce dernier point est que, même si vous n'avez pas encore entendu parler explicitement de forme symplectique, vous avez implicitement déjà rencontré cette notion : ce n'est rien d'autre que la partie imaginaire d'un produit hermitien.)

### 3.7. Actions de groupes de Lie. La notion de fibré principal.

Notre but dans cette section est de donner des conditions sous lesquelles le quotient d'une variété par une action de groupe de Lie est encore une variété. Cette section peut être lue comme la contrepartie "continue" de la section "discrète" §3.5.

Une *action d'un groupe de Lie*  $G$  sur une variété  $M$  est une application lisse

$$G \times M \rightarrow M, \quad (g, p) \mapsto g \cdot p$$

telle que  $g_1 \cdot (g_2 \cdot p) = (g_1 g_2) \cdot p$ . On en déduit en particulier un morphisme de groupes

$$G \rightarrow \text{Diff}(M).$$

On note parfois une action de  $G$  sur  $M$  par le symbole  $G \curvearrowright M$ . On dit que  $M$  est un  $G$ -espace.

On dit qu'une action est *propre* si l'application

$$G \times M \rightarrow M \times M, \quad (g, p) \mapsto (g \cdot p, p)$$

est propre, i.e. la préimage d'un compact est un compact. De manière équivalente, une action est propre si et seulement si pour tous compacts  $K, L \subseteq M$ , l'ensemble  $\{g \in G : gK \cap L \neq \emptyset\} \subseteq G$  est compact.

**Exercice 26.** Toute action d'un groupe de Lie compact est propre. Une action d'un groupe de Lie non-compact sur une variété compacte n'est jamais propre.

On dit qu'une action est *libre* si  $g \cdot p \neq p$  pour tout  $p \in M$  et pour tout  $g \in G$  qui est différent de l'élément neutre.

**Exercice 27.** Vérifier que les définitions d'action propre, resp. libre coïncident avec les définitions du §3.5 dans le cas particulier des actions de groupes discrets, vus comme groupes de Lie de dimension 0.

En continuant le parallèle avec la section §3.5, le lecteur est en droit de se demander quel est l'analogue "continu" de la notion de revêtement. La réponse est : la notion de  $G$ -fibré principal.

**Définition 3.3.** Soit  $G$  un groupe de Lie et  $M, B$  des variétés. Un  $G$ -fibré principal d'espace total  $M$  et base  $B$  est la donnée d'une action libre de  $G$  sur  $M$  et d'une submersion surjective  $\pi : M \rightarrow B$  dont les fibres sont exactement les orbites de  $M$  sous l'action de  $G$ , ayant la propriété suivante : il existe un recouvrement ouvert  $(U_i)$  de  $B$  et des difféomorphismes  $\Phi_i : \pi^{-1}(U_i) \xrightarrow{\cong} U_i \times G$  qui commutent avec l'action de  $G$  (donnée sur  $U_i \times G$  par translations sur le deuxième facteur), et

qui font commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\Phi} & U_i \times G \\ & \searrow \pi & \swarrow \text{pr}_1 \\ & & U_i \end{array}$$

On dit aussi que l'application  $\Phi_i$  dans la définition est  $G$ -équivariante. Plus généralement, étant donnés deux  $G$ -espaces  $M$  et  $N$ , une application  $f : M \rightarrow N$  est dite  $G$ -équivariante si  $f(g \cdot p) = g \cdot f(p)$ .

Lorsque  $M, B$  sont uniquement des espaces topologiques sans structure de variété, l'action de  $G$  est seulement continue, et les  $\Phi_i$  sont des homéomorphismes, on parle de  $G$ -fibré principal topologique.

**Exercice 28.** Les  $G$ -fibrés principaux connexes sur  $B$  avec  $G$  un groupe discret quelconque sont exactement les revêtements connexes réguliers de  $B$  (avec  $G$  donné par le groupe des automorphismes du revêtement).

**Théorème 3.4.** Soit  $G$  un groupe de Lie agissant sur une variété séparée  $M$ .

*Si l'action est propre, le quotient  $M/G$  est séparé.*

*Si l'action est propre et libre la projection  $\pi : M \rightarrow M/G$  est un  $G$ -fibré principal : pour tout  $p \in M/G$  il existe un voisinage  $p \in U \subseteq M/G$  et un homéomorphisme*

$$\Phi : \pi^{-1}(U) \xrightarrow{\cong} U \times G$$

*qui commute avec l'action de  $G$  (donnée sur  $U \times G$  par translation sur le deuxième facteur).*

*L'espace des orbites  $M/G$  porte une unique structure de variété telle que la projection  $\pi$  admette des sections locales lisses. Dans ce cas les homéomorphismes  $\Phi$  ci-dessus sont des difféomorphismes, la projection  $\pi$  est lisse et la dimension de  $M/G$  est  $\dim M - \dim G$ .*

Le lecteur trouvera une preuve détaillée de ce théorème dans le cas où  $M$  est un groupe de Lie et  $G$  est un sous-groupe fermé agissant par translations dans le livre de Warner, preuve du théorème 3.58. Nous donnons seulement une esquisse pour mettre en évidence les idées principales. Nous allons surtout utiliser le théorème pour donner des définitions alternatives de certains espaces importants. Le lecteur curieux pourra approfondir.

*Esquisse de démonstration.* La preuve du fait que le quotient est séparé lorsque l'action est propre est à quelques détails près la même que dans le cas d'une action libre de groupe discret (Théorème 3.1).

Par ailleurs, lorsque l'action est propre les applications d'évaluation

$$\text{ev}_x : G \rightarrow M, \quad g \mapsto g \cdot x \quad (x \in M)$$

sont propres. Ceci entraîne que toutes les orbites sont fermées.

Supposons désormais que l'action est propre et libre. Chaque application d'évaluation est alors un plongement et chaque orbite est une sous-variété de  $M$  de dimension  $\dim G$ .

Soit  $p = G \cdot x \in M/G$ , avec  $x \in M$  un choix de point sur l'orbite.

*Affirmation : il existe une sous-variété  $V \subset M$  (difféomorphe à un disque) de dimension  $\dim M - \dim G$ , passant par  $x$ , telle que  $T_x V \cap T_x(G \cdot x) = \{0\}$  (on dit que  $V$  est "transverse" à  $G \cdot x$ ), et telle que toute orbite  $G \cdot y$  a au plus un point d'intersection, transverse, avec  $V$ .*

Pour démontrer l'affirmation on raisonne par contradiction. L'on trouve alors des suites  $x_n, y_n \rightarrow x$ , avec  $x_n, y_n \in V$ ,  $x_n \neq y_n$ , et  $y_n = g_n \cdot x_n$ . Puisque l'action est libre on obtient  $g_n \neq e$ , l'élément neutre de  $G$ . Par propriété on obtient, quitte à extraire une sous-suite,  $g_n \rightarrow e$ . Soit  $\mathcal{G}$  un voisinage compact de  $e \in G$ . Puisque  $\mathcal{G} \cdot x$  est transverse à  $V$  avec un unique point d'intersection, alors  $\mathcal{G} \cdot x'$ , avec  $x' \in V$  proche de  $x$ , est aussi transverse à  $V$  avec un unique point d'intersection. En prenant  $n \gg 0$  et  $x' = x_n$ , on obtient une contradiction avec le fait que  $g_n \rightarrow e$ .

L'on considère alors l'application

$$\Psi : V \times G \rightarrow M, \quad (y, g) \mapsto g \cdot y.$$

Cette application est injective par définition de  $V$ . Elle est aussi  $G$ -équivariante, où l'action de  $G$  sur  $V \times G$  se fait par translations sur le deuxième facteur. Par ailleurs

$$d\Psi(y, e) : T_y V \times T_e G \rightarrow T_y M$$

est un isomorphisme puisque  $V$  est transverse aux orbites  $G \cdot y$ ,  $y \in V$ . Puisque  $\Psi$  est  $G$ -équivariante on déduit que

$$d\Psi(y, g) : T_y V \times T_g G \rightarrow T_{g \cdot y} M$$

est aussi un isomorphisme pour tout  $g \in G$ . Il s'ensuit que  $\Psi$  est un difféomorphisme local, mais comme  $\Psi$  est une application injective on déduit que c'est un difféomorphisme sur image.

Ceci démontre le fait que  $\pi : M \rightarrow M/G$  est un  $G$ -fibré principal topologique. L'existence d'une structure de variété découle de la preuve : les coordonnées sur la variété  $V$  fournissent des coordonnées locales autour de  $p = G \cdot x \in M/G$ . L'unicité de la structure de variété découle d'une analyse attentive de la preuve.  $\square$

**Remarque.** La notion de  $G$ -fibré principal est une généralisation de la notion de fibré vectoriel. Elle est définie selon la même démarche : recollement de modèles locaux du type  $U \times G$ , avec  $G$  un groupe de Lie.

**Exemple (espace projectif complexe).** Considérons l'action du groupe de Lie  $\mathbb{C}^*$  sur  $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$  donnée par

$$\lambda \cdot (z_0, \dots, z_n) := (\lambda z_0, \dots, \lambda z_n).$$

L'espace des orbites de cette action s'identifie canoniquement avec l'espace des droites complexes dans  $\mathbb{C}^{n+1}$ . Cette action est évidemment libre. Elle est aussi propre. Cela découle de l'existence du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} U(1) \times S^{2n+1} & \longrightarrow & S^{2n+1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \end{array} ,$$

de la compacité de la sphère unité  $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$  et du groupe unitaire  $U(1) \subset \mathbb{C}^*$ , et du fait que l'inclusion  $S^{2n+1} \hookrightarrow \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$  induit une bijection au niveau des espaces d'orbites. Dans le diagramme ci-dessus les flèches verticales sont les inclusions canoniques, et la première flèche horizontale désigne la restriction de l'action de  $U(1) \subset \mathbb{C}^*$  à  $S^{2n+1}$ .

Par conséquent l'espace d'orbites possède une structure naturelle de variété lisse. On l'appelle *espace projectif complexe* et on le note

$$\mathbb{C}P^n := \mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1}) := \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} / \mathbb{C}^* \cong S^{2n+1} / S^1.$$

**3.8. Espaces homogènes.** Un cas particulier de la construction précédente est celui où un sous-groupe fermé  $H$  d'un groupe de Lie  $G$  agit sur  $G$  par translations à gauche :

$$H \times G \rightarrow G, \quad (h, g) \mapsto hg.$$

Cette action est toujours libre et propre et le quotient  $G/H$  porte une structure naturelle de variété. On appelle  $G/H$  un *espace homogène*.

**Remarque.** Lorsque  $H$  est un sous-groupe distingué, la structure de groupe naturelle sur  $G/H$  est compatible avec cette structure de variété lisse, de sorte que  $G/H$  est un groupe de Lie.

Bien évidemment, le groupe  $G$  lui-même agit transitivement sur  $G/H$ . Le théorème qui suit nous assure que toute variété sur laquelle  $G$  agit transitivement est un espace homogène. On dit qu'une action de  $G$  sur  $M$  est *transitive* si pour tous  $x, y \in M$  il existe  $g \in G$  tel que  $g \cdot x = y$ . De manière équivalente, l'espace d'orbites de l'action est réduit à un point.

**Théorème 3.5.** *Soit  $M$  une variété sur laquelle agit transitivement un groupe de Lie  $G$  ayant un nombre fini de composantes connexes. Pour tout point  $p \in M$  on note*

$$G_p := \{g \in G : g \cdot p = p\}$$

le stabilisateur du point  $p$ .

(i) Le stabilisateur  $G_p$  de tout point  $p$  est un sous-groupe fermé de  $G$ . Étant donnés deux points  $p$  et  $q$ , leurs stabilisateurs sont conjugués : il existe  $g \in G$  tel que

$$G_p = gG_qg^{-1}.$$

(ii) Pour tout point  $p \in M$  l'application

$$\Phi_p : G/G_p \longrightarrow M, \quad [g] \mapsto g \cdot p$$

est un difféomorphisme.

Le contenu du théorème est le suivant : la classe des espaces homogènes coïncide avec la classe des variétés munies d'actions transitives de groupes de Lie.

*Démonstration.* Le point (i) découle directement des définitions.

Pour le point (ii), l'on voit que l'application  $\Phi_p$  est lisse, bijective,  $G$ -équivariante, et un difféomorphisme local en  $[e]$  puisque

$$d\Phi_p([e]) : T_{[e]}(G/G_p) \longrightarrow T_pM$$

est bijective. Par  $G$ -équivariance on déduit que  $\Phi_p$  est un difféomorphisme local en tout point. Par bijectivité, c'est un difféomorphisme global.  $\square$

### Exemples.

(1) *Sphères.* Le groupe  $O(n)$  des isométries de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$  agit transitivement sur la sphère unité  $S^{n-1}$  avec stabilisateur isomorphe à  $O(n-1)$ . En effet, le stabilisateur du point  $(1, 0, \dots, 0)$  est le sous-groupe des matrices orthogonales qui sont diagonales par blocs, avec un bloc de taille 1 égal à 1 et un autre bloc de taille  $n-1$  qui est une matrice orthogonale. Ainsi

$$S^{n-1} \simeq O(n)/O(n-1).$$

De même

$$S^{n-1} \simeq SO(n)/SO(n-1).$$

Le groupe  $U(n)$  des isométries de  $\mathbb{C}^n$  agit transitivement sur la sphère unité  $S^{2n-1}$  avec stabilisateur isomorphe à  $U(n-1)$ . Ainsi

$$S^{2n-1} \simeq U(n)/U(n-1),$$

et aussi

$$S^{2n-1} \simeq SU(n)/SU(n-1).$$

(2) *Espaces projectifs.* Regardons  $\mathbb{R}P^n$  comme l'ensemble des droites vectorielles de  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ . Le groupe  $O(n+1)$  agit transitivement sur cet ensemble avec stabilisateur isomorphe à  $O(n) \times O(1)$ . En effet, un élément de  $O(n)$  qui fixe une droite  $d$  est uniquement déterminé par son action sur  $d^\perp$  et par son action sur  $d$ . L'action sur  $d^\perp$  s'identifie à  $O(n)$ ,

tandis que l'action sur  $d$  s'identifie à  $O(1) = \{\pm 1\}$ . Nous obtenons une bijection naturelle

$$\mathbb{R}P^n \simeq O(n+1)/O(n) \times O(1)$$

via laquelle on peut induire sur  $\mathbb{R}P^n$  une structure d'espace homogène, et en particulier de variété. Sa dimension est égale à  $n$ .

De manière similaire, regardons  $\mathbb{C}P^n$  comme l'ensemble des droites vectorielles complexes dans  $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ . Le groupe  $U(n+1)$  agit transitivement sur cet ensemble avec stabilisateur isomorphe à  $U(n) \times U(1)$ , et nous obtenons une bijection naturelle

$$\mathbb{C}P^n \simeq U(n+1)/U(n) \times U(1).$$

Via cette bijection nous pouvons induire sur  $\mathbb{C}P^n$  une structure d'espace homogène, et donc de variété. À noter le fait que cette construction fournit une structure de variété lisse réelle puisque  $U(n)$  est un groupe de Lie réel. Mais l'espace projectif  $\mathbb{C}P^n$  est une variété complexe ! Sa dimension sur  $\mathbb{C}$  vaut  $n$ .

**Exercice.** La structure différentiable d'espace homogène sur  $\mathbb{K}P^n$ ,  $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$  coïncide avec celle donnée par la construction d'espace quotient vue plus haut.

(3) *Variétés de Grassmann, ou Grassmanniennes.* Soit  $G_{\mathbb{R}}(k, n)$  l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension  $k$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Le groupe  $O(n)$  agit transitivement sur  $G_{\mathbb{R}}(k, n)$  avec stabilisateur isomorphe à  $O(k) \times O(n-k)$ . En effet, un élément qui fixe un sous-espace  $V$  de dimension  $k$  est déterminé par son action sur  $V$  et par son action sur  $V^\perp$ . Le groupe des isométries linéaires de  $V$  s'identifie à  $O(k)$ , tandis que le groupe des isométries linéaires de  $V^\perp$  s'identifie à  $O(n-k)$ . On obtient une bijection naturelle

$$G_{\mathbb{R}}(k, n) \simeq O(n)/O(k) \times O(n-k)$$

que l'on peut utiliser pour induire sur  $G_{\mathbb{R}}(k, n)$  une structure d'espace homogène, et donc de variété lisse. On l'appelle *Grassmannienne des  $k$ -plans réels dans  $\mathbb{R}^n$* . Sa dimension est  $k(n-k)$ . Noter le fait que  $\mathbb{R}P^n = G_{\mathbb{R}}(1, n+1)$ .

Soit  $G_{\mathbb{C}}(k, n)$  l'ensemble des sous-espaces vectoriels complexes de dimension  $k$  dans  $\mathbb{C}^n$ . Le groupe  $U(n)$  agit transitivement sur  $G_{\mathbb{C}}(k, n)$  avec stabilisateur isomorphe à  $U(k) \times U(n-k)$  (même argument que ci-dessus). La bijection naturelle

$$G_{\mathbb{C}}(k, n) \simeq U(n)/U(k) \times U(n-k)$$

peut être utilisée pour induire sur  $G_{\mathbb{C}}(k, n)$  une structure d'espace homogène, et donc de variété lisse. On l'appelle *Grassmannienne des  $k$ -plans complexes dans  $\mathbb{C}^n$* . Sa dimension sur  $\mathbb{R}$  vaut  $2k(n-k)$ . Comme

pour le cas particulier de  $\mathbb{C}P^n = G_{\mathbb{C}}(1, n+1)$ , même si cette construction fournit une structure de variété réelle sur  $G_{\mathbb{C}}(k, n)$ , celle-ci est en fait une variété complexe.

(4) *Variétés de Stiefel*. Soit  $V_{\mathbb{R}}(k, n)$  l'ensemble des  $k$ -repères réels dans  $\mathbb{R}^n$ , dont les points sont constitués par les tuples ordonnés de  $k$  vecteurs linéairement indépendants. Le groupe  $GL(n, \mathbb{R})$  agit transitivement sur  $V_{\mathbb{R}}(k, n)$ . Le stabilisateur est isomorphe au sous-groupe  $H \subset GL(n, \mathbb{R})$  constitué des matrices qui s'écrivent par blocs sous la forme  $\begin{pmatrix} \text{Id}_k & * \\ 0 & A \end{pmatrix}$ , avec  $A \in GL(n-k, \mathbb{R})$ . L'on a une bijection naturelle

$$V_{\mathbb{R}}(k, n) \simeq GL(n, \mathbb{R})/H$$

qui induit une structure d'espace homogène, et donc de variété, sur  $V_{\mathbb{R}}(k, n)$ . On l'appelle *variété de Stiefel des  $k$ -repères dans  $\mathbb{R}^n$* . Sa dimension est  $kn$ .

Soit  $V_{\mathbb{C}}(k, n)$  l'ensemble des  $k$ -repères complexes dans  $\mathbb{C}^n$ , dont les points sont constitués par les tuples ordonnés de  $k$  vecteurs de  $\mathbb{C}^n$  linéairement indépendants sur  $\mathbb{C}$ . Le groupe  $GL(n, \mathbb{C})$  agit transitivement sur  $V_{\mathbb{C}}(k, n)$ . Le stabilisateur est isomorphe au sous-groupe  $K \subset GL(n, \mathbb{C})$  constitué des matrices qui s'écrivent par blocs sous la forme  $\begin{pmatrix} \text{Id}_k & * \\ 0 & A \end{pmatrix}$ , avec  $A \in GL(n-k, \mathbb{C})$ . L'on a une bijection naturelle

$$V_{\mathbb{C}}(k, n) \simeq GL(n, \mathbb{C})/K$$

qui induit une structure d'espace homogène, et donc de variété, sur  $V_{\mathbb{C}}(k, n)$ . On l'appelle *variété de Stiefel des  $k$ -repères dans  $\mathbb{C}^n$* . Cette fois-ci, la construction fournit d'emblée une structure de variété complexe sur  $V_{\mathbb{C}}(k, n)$ , de dimension complexe  $kn$ .

**Remarque.** Une des raisons d'être de la description des grassmanniennes et des variétés de Stiefel en tant qu'espace homogènes est qu'elle est très compacte et fournit la structure différentiable comme cas particulier d'un théorème général. Il est néanmoins très utile de comprendre de manière explicite les atlas sur ces variétés. Voici un point de départ pour le lecteur.

**Exercice 29.** Soit  $V \in G_{\mathbb{R}}(k, n)$  et  $F \subset \mathbb{R}^n$  un sous-espace de dimension  $n-k$  transverse à  $V$ , i.e.  $F \cap V = \{0\}$ . Pour chaque telle paire  $(V, F)$  on définit

$$\mathcal{O}_F(V) := \{V' \in G_{\mathbb{R}}(k, n) : V' \cap F = \{0\}\}.$$

Il existe une bijection canonique

$$\phi_{F,V} : \mathcal{O}_F(V) \rightarrow \text{Hom}(V, F)$$

qui associe à un sous-espace  $V'$  l'unique application linéaire  $V \rightarrow F$  dont le graphe est  $V'$ . Le lecteur pourra montrer que la collection

$(\mathcal{O}_F(V), \phi_{F,V})$  définit un atlas sur  $G_{\mathbb{R}}(k, n)$ , muni de la topologie induite par les  $\phi_{F,V}$ .

**DIGRESSION-OUVERTURE : GRASSMANNIENNES ET VARIÉTÉS DE STIEFEL.** Nous donnons ici quelques propriétés supplémentaires de ces variétés, qui font intervenir les notions de fibré vectoriel et de fibré principal.

Il existe une projection canonique

$$\pi : V_{\mathbb{R}}(k, n) \longrightarrow G_{\mathbb{R}}(k, n)$$

qui associe à un  $k$ -repère le  $k$ -plan qu'il engendre. Ceci définit sur  $V_{\mathbb{R}}(k, n)$  une structure de  $GL(k, \mathbb{R})$ -fibré principal de base  $G_{\mathbb{R}}(k, n)$ .

La grassmannienne  $G_{\mathbb{R}}(k, n)$  est la base d'un fibré vectoriel  $E_{\mathbb{R}}(k, n)$  de rang  $k$  canonique, appelé *fibré tautologique* : la fibre en un point  $p$  représenté par un  $k$ -plan  $V_p$  est le  $k$ -plan  $V_p$  lui-même.

Le fibré  $E_{\mathbb{R}}(k, n)$  est un fibré universel au sens suivant : pour tout fibré vectoriel  $E \rightarrow M^n$  de rang  $k$ , il existe  $N \gg n$  et une application lisse  $f : M \rightarrow G_{\mathbb{R}}(k, N)$  telle que  $E \simeq f^*E_{\mathbb{R}}(k, N)$ . Ici  $f^*E_{\mathbb{R}}(k, N)$  est le fibré vectoriel sur  $M$  tiré-en-arrière par  $f$ , dont la fibre en un point  $p$  est la fibre de  $E_{\mathbb{R}}(k, N)$  au point  $f(p)$ . Cette dernière construction est tout-à-fait générale et joue le rôle de changement de base pour les fibrés vectoriels. L'étude de ces fibrés universels mène naturellement vers la théorie des *classes caractéristiques*. La référence classique est le livre de J. Milnor et J. Stasheff, *Characteristic classes*. L'existence du fibré universel est la raison principale d'être des grassmanniennes.

Les variétés de Stiefel, elles, sont importantes puisqu'elles fournissent une interprétation des classes caractéristiques mentionnées ci-dessus en tant qu'obstructions à l'existence de collections de sections qui sont linéairement indépendantes en tout point. La meilleure référence sur cette question est le livre classique de N. Steenrod, *The topology of fibre bundles*, Princeton University Press, 1951.

Les espaces projectifs  $\mathbb{C}P^n$  sont importants pour deux raisons : (i) Une sous-variété complexe de  $\mathbb{C}P^n$  est nécessairement algébrique, i.e. définie par l'annulation d'un système d'équations polynomiales. En particulier les sous-variétés complexes de  $\mathbb{C}P^n$  sont sujettes aux méthodes de la géométrie algébrique. (ii) Nous avons à disposition un critère pour décider quand est-ce qu'une variété complexe kählerienne se plonge dans  $\mathbb{C}P^n$  (théorème de plongement de Kodaira).

FIN DE LA DIGRESSION-OUVERTURE.

## 4. CHAMPS DE VECTEURS. FLOTS. DIFFÉOMORPHISMES

## 4.1. Un champ de vecteurs est une équation différentielle.

4.1.1. *Heuristique.* Nous adoptons dans cette section le point de vue des *vecteurs tangents comme directions infinitésimales de mouvement*. Lorsque l'on se donne une direction infinitésimale de mouvement  $X(p)$  en chaque point  $p$  d'une variété  $M$ , la notion qui se présente naturellement est celle de *courbe intégrale*, une courbe dont le vecteur vitesse en chaque point coïncide avec la valeur du champ de vecteurs au point respectif. La collection de toutes ces courbes intégrales est le *flot* du champ de vecteurs.

Imaginons la surface d'un lac avec une brise légère soufflant à la surface sans faire de vagues. Celle-ci imprime à la surface de l'eau une tendance de mouvement : c'est un champ de vecteurs. La trajectoire d'une goutte d'huile sur la surface de l'eau est une courbe intégrale. Le flot de ce champ de vecteurs n'est rien d'autre que le mouvement que l'on observe sur toute la surface du lac. Tout comme le vent peut changer de direction avec le temps, il est naturel de considérer des champs de vecteurs qui dépendent du temps.

L'on peut répéter l'exercice d'imagination précédent avec le mouvement de l'air à la surface de la terre : l'on observe alors le flot d'un champ de vecteurs sur une variété, la sphère  $S^2$ .

4.1.2. *Courbes intégrales. Équations différentielles.* On rappelle qu'un champ de vecteurs est une section lisse de  $TM$ , et l'on a noté  $\mathcal{X}(M) := \Gamma(TM)$  l'espace vectoriel des champs de vecteurs sur  $M$ .

Un champ de vecteurs *dépendant du temps*, noté  $(X_t)$ , est une application lisse

$$X : \mathbb{R} \times M \rightarrow TM, \quad \forall t \in \mathbb{R}, X_t := X(t, \cdot) \in \mathcal{X}(M).$$

L'on suppose ici que  $X_t$  est défini pour  $t \in \mathbb{R}$  uniquement par souci de simplification ; le lecteur saura adapter la discussion au cas où  $X_t$  est défini pour  $t$  appartenant à un intervalle  $I \subseteq \mathbb{R}$ . Les champs de vecteurs que nous allons généralement considérer seront indépendants du temps, i.e.  $X \in \mathcal{X}(M)$ .

**Définition 4.1.** *Soit  $(X_t)$  un champ de vecteurs dépendant du temps. Une courbe intégrale de  $(X_t)$  est une courbe lisse*

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$$

telle que

$$\dot{\gamma}(t) = X_t(\gamma(t)), \quad \forall t \in I.$$

Soit  $(U, \phi)$  une carte sur  $M$ . En prenant le premier point de vue (en termes de cartes) sur les vecteurs tangents, un champ de vecteurs

(dépendant du temps)  $(X_t)$  sur  $U$  correspond par définition à une application lisse  $F : \mathbb{R} \times \phi(U) \rightarrow \mathbb{R}^n$ , i.e. à un champ de vecteurs tel qu'on le définit habituellement dans un cours d'équations différentielles. Par ailleurs,  $\gamma : I \rightarrow U$  est une courbe intégrale pour  $(X_t)$  si et seulement si  $x := \phi \circ \gamma : I \rightarrow \phi(U)$  satisfait l'équation

$$x'(t) = F(t, x(t)), \quad \forall t \in I,$$

ce qui signifie que  $x = \phi \circ \gamma$  est une solution de l'équation différentielle ordinaire (ÉDO) définie par  $F$ . La donnée d'un champ de vecteurs équivaut ainsi dans chaque carte à la donnée d'une équation différentielle sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

Le raisonnement précédent est formellement tautologique. Pourtant il nous apporte quelque chose de précieux : l'*objet analytique* qu'était une équation différentielle est devenu désormais un *objet géométrique*, à savoir un champ de vecteurs. Désormais, une équation différentielle sur une variété est la donnée d'un champ de vecteurs.

L'une des conséquences dramatiques de ce point de vue est la suivante : *résoudre* une équation différentielle devient irrélevant. La forme particulière de la solution dépend fortement de la carte choisie. Ce qui est rélevant est le fait de *comprendre* les propriétés globales du champ de vecteurs en question. Ce point de vue a sans doute son origine dans les travaux de Poincaré, qui a étudié en premier les propriétés qualitatives des équations différentielles.

Voici une conséquence plus terre-à-terre de la discussion précédente :

*Tout résultat de nature locale valable pour une ÉDO reste vrai pour les champs de vecteurs dans le cadre des variétés.*

Il y a deux résultats qui jouent un rôle central dans la théorie : le théorème d'existence et unicité locale de Cauchy-Lipschitz et le théorème de dépendance lisse par rapport aux conditions initiales. Nous énonçons chacun d'entre eux dans sa version classique euclidienne, et dans la version "transportée" sur les variétés. Le lecteur pourra se convaincre de l'équivalence des deux formulations.

**Théorème 4.2** (Cauchy-Lipschitz, version euclidienne). *Soient  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  et  $I \subseteq \mathbb{R}$  ouverts et  $F : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  un champ de vecteurs continu par rapport aux deux variables et Lipschitz par rapport à la deuxième variable. Pour tous  $x_0 \in \Omega$ ,  $t_0 \in I$  il existe une unique solution de l'ÉDO*

$$x'(t) = F(t, x(t))$$

*définie au voisinage de  $t_0$  et telle que*

$$x(t_0) = x_0.$$

□

**Théorème 4.2bis.** (Cauchy-Lipschitz, version variétés). *Soient  $M$  une variété et  $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$  un champ de vecteurs dépendant du temps. Pour tous  $p_0 \in M$  et  $t_0 \in \mathbb{R}$  il existe une unique courbe intégrale  $\gamma$  du champ  $(X_t)$ , i.e.*

$$\dot{\gamma}(t) = X_t(\gamma(t)),$$

définie au voisinage de  $t_0$  et telle que

$$\gamma(t_0) = p_0.$$

□

Notons la conséquence directe suivante : soient  $\gamma_1, \gamma_2$  deux courbes intégrales d'un même champ de vecteurs définies sur deux intervalles ouverts d'intersection non-vide. Si  $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$  pour un certain  $t_0$ , alors  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  coïncident sur leur intervalle commun de définition. (L'on pourra montrer que le lieu des points où elles coïncident est non-vide, ouvert et fermé.)

**Théorème 4.3** (dépendance lisse par rapport aux conditions initiales, version euclidienne). *Soient  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  et  $I \subseteq \mathbb{R}$  des ouverts et  $F : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  un champ de vecteurs lisse. Pour  $x_0 \in \Omega$  et  $t_0 \in I$  on note*

$$t \mapsto \varphi^{t, t_0}(x_0)$$

l'unique solution de l'équation différentielle  $x'(t) = F(t, x(t))$  prenant la valeur  $x_0$  à l'instant  $t_0$ .

Pour tous  $x_0 \in \Omega$  et  $t_0 \in I$  l'application

$$(t, s, x) \mapsto \varphi^{t, s}(x) \in \Omega$$

est définie sur un voisinage ouvert de  $(t_0, t_0, x_0)$  dans  $I \times I \times \Omega$  et est lisse (par rapport aux trois variables). □

**Théorème 4.3bis.** (dépendance lisse par rapport aux conditions initiales, version variétés). *Soient  $M$  variété et  $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$  champ de vecteurs qui dépend du temps. Pour  $p_0 \in M$  et  $t_0 \in \mathbb{R}$  on note*

$$t \mapsto \varphi^{t, t_0}(p_0)$$

l'unique courbe intégrale de  $(X_t)$  prenant la valeur  $p_0$  à l'instant  $t_0$ .

Pour tous  $p_0 \in M$  et  $t_0 \in \mathbb{R}$  l'application

$$(t, s, x) \mapsto \varphi^{t, s}(x) \in M$$

est définie sur un voisinage ouvert de  $(t_0, t_0, p_0)$  dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times M$  et est lisse (par rapport aux trois variables). □

La manière de lire ce dernier théorème est la suivante : étant donné un point  $p_0$  et un instant  $t_0$ , les courbes intégrales passant par des points proches de  $p_0$  à des instants proches de  $t_0$  ont un intervalle commun de définition et varient dans une famille lisse.

## 4.2. Flots. Difféomorphismes. Redressement.

4.2.1. *Flot. Complétude.* Nous donnons maintenant la définition du flot d'un champ de vecteurs. Pour ne pas compliquer inutilement la notation en prenant en compte des domaines de définition variables, nous nous restreignons aux champs de vecteurs complets.

**Définition 4.4.** *Un champ de vecteurs est complet si toute courbe intégrale est définie sur  $\mathbb{R}$ .*

**Définition 4.5.** *Étant donné un champ de vecteurs complet  $X \in \mathcal{X}(M)$ , son flot est l'application*

$$\varphi_X : \mathbb{R} \times M \rightarrow M, \quad (t, p) \mapsto \varphi_X^t(p),$$

où  $\varphi_X^t(p)$  est l'unique courbe intégrale qui passe par  $p$  à l'instant  $t = 0$ .

Étant donné un champ de vecteurs complet dépendant du temps  $X = (X_t)$  sur une variété  $M$ , son flot à deux paramètres est l'application

$$\varphi_X : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times M, \quad (t, s, p) \mapsto \varphi_X^{t,s}(p),$$

où  $\varphi_X^{t,s}(p)$  est l'unique courbe intégrale qui passe par  $p$  à l'instant  $t = s$ .

Un champ de vecteurs qui ne dépend pas du temps  $X \in \mathcal{X}(M)$  peut être vu comme étant un champ dépendant du temps  $(X_t)$  avec  $X_t \equiv X$ . Alors  $\varphi_X^t = \varphi_X^{t,0}$ . Par ailleurs  $\varphi_X^{t,s} = \varphi_X^{t-\tau, s-\tau}$ ,  $\tau \in \mathbb{R}$ . Ainsi, pour  $X \in \mathcal{X}(M)$  le flot à un paramètre détermine de manière unique le flot à deux paramètres par la formule  $\varphi_X^{t,s} = \varphi_X^{t-s,0} = \varphi_X^{t-s}$ . Ceci justifie le fait que, pour les champs de vecteurs qui ne dépendent pas du temps, l'on considère uniquement le flot à un paramètre.

Le résultat suivant fournit un critère de complétude et montre que, dans le cas des variétés compactes, le fait de considérer des champs de vecteurs complets ne restreint aucunément le degré de généralité de la discussion. Étant donné un champ de vecteurs  $X \in \mathcal{X}(M)$  on définit son *support* comme étant

$$\text{supp}(X) := \overline{\{p \in M : X(p) \neq 0\}}.$$

Étant donné un champ de vecteurs dépendant du temps  $X = (X_t)$ , on définit son support comme étant

$$\text{supp}(X) := \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \text{supp}(X_t).$$

**Proposition 4.6.** *Soit  $X = (X_t)$  un champ de vecteurs dépendant du temps à support compact. Alors  $X$  est complet.*

*En particulier, tout champ de vecteurs sur une variété compacte est complet.*

Le plan de la preuve est le suivant. Nous argumentons par contradiction et montrons que toute courbe intégrale peut se prolonger au-delà d'une éventuelle borne finie de son intervalle maximal de définition. Pour cela il suffit de nous assurer qu'il existe une borne inférieure uniforme sur la taille de l'intervalle de définition de toute courbe intégrale.

*Démonstration.* Le théorème de dépendance lisse par rapport aux paramètres nous assure que, pour tout point  $p_0 \in M$  et pour tout  $t_0 \in \mathbb{R}$ , il existe un voisinage ouvert  $p_0 \in U$  et il existe  $\epsilon > 0$  tels que la courbe intégrale  $t \mapsto \varphi_X^{t,s}(p)$  soit définie sur  $]s - \epsilon, s + \epsilon[$  pour tout  $p \in U$  et  $s \in ]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[$ .

Bien-sûr, lorsque  $p_0 \notin \text{supp}(X)$  l'on peut prendre  $U = \text{supp}(X)^c$  et  $\epsilon = \infty$ , toutes les courbes intégrales par  $p_0$  étant constantes. Par ailleurs, le support de  $X$  étant compact, l'on peut le recouvrir par un nombre fini d'ouverts  $U$  comme ci-dessus si  $t_0$  est fixé, ou bien si  $t_0$  varie dans un compact. Nous obtenons :

*Pour tout compact  $K \subset \mathbb{R}$  il existe  $\epsilon > 0$  tel que la courbe intégrale  $t \mapsto \varphi_X^{t,s}(p)$  soit définie sur  $]s - \epsilon, s + \epsilon[$  pour tout  $s \in K$  et  $p \in M$ .*

Supposons maintenant que  $t \mapsto \gamma(t)$  est une courbe intégrale de  $X$  ayant un intervalle maximal de définition  $I \subsetneq \mathbb{R}$ . Pour fixer les idées l'on peut supposer que  $I = ]a, b[$  avec  $-\infty \leq a < b < \infty$ . Considérons un compact  $K = [b - \eta, b + \eta]$  avec  $\eta > 0$  assez petit pour que  $a < b - \eta < b$  et choisissons  $\epsilon > 0$  satisfaisant la condition ci-dessus et tel que  $b - \eta < b - \frac{\epsilon}{2}$ . La courbe intégrale

$$t \mapsto \varphi_X^{t, b - \frac{\epsilon}{2}}(\gamma(b - \frac{\epsilon}{2}))$$

coïncide avec  $\gamma(t)$  en  $t = b - \frac{\epsilon}{2}$ , et par conséquent sur un voisinage de  $b - \frac{\epsilon}{2}$ . En même temps elle est définie sur un intervalle de taille  $2\epsilon$  centré en  $b - \frac{\epsilon}{2}$ . Cette courbe définit alors un prolongement de  $\gamma$  à  $]a, b + \frac{\epsilon}{2}[$ , ce qui contredit le choix de  $b$ .  $\square$

Nous arrivons maintenant au résultat le plus important de cette section : le flot d'un champ de vecteurs est une famille de difféomorphismes.

**Proposition 4.7** (propriétés du flot). *Soit  $X = (X_t)$  un champ de vecteurs complet. Pour tous  $t, s, \tau \in \mathbb{R}$  l'on a la relation*

$$\varphi_X^{t,s} \circ \varphi_X^{s,\tau} = \varphi_X^{t,\tau}, \quad \varphi_X^{s,s} = \text{Id}_M.$$

*En particulier l'application*

$$\varphi_X^{t,s} : M \rightarrow M, \quad p \mapsto \varphi_X^{t,s}(p)$$

*est un difféomorphisme de  $M$  dont l'inverse est  $\varphi_X^{s,t}$ .*

*Lorsque  $X$  ne dépend pas du temps, on a de plus*

$$\varphi_X^t \circ \varphi_X^s = \varphi_X^s \circ \varphi_X^t = \varphi_X^{t+s}.$$

En particulier l'application

$$\mathbb{R} \rightarrow \text{Diff}(M), \quad t \mapsto \varphi_X^t$$

est un morphisme de groupes. On dit que  $t \mapsto \varphi_X^t$  est un groupe à 1 paramètre de difféomorphismes. L'inverse de  $\varphi_X^t$  est  $\varphi_X^{-t}$ .

Ce qu'il faut surtout retenir de cette proposition est que les champs de vecteurs sont un outil pour construire des difféomorphismes. À chaque fois que vous souhaitez construire un difféomorphisme, la première chose à essayer sera de l'obtenir comme flot au temps 1 (par exemple) d'un champ de vecteurs approprié.

**Exercice 30.** Donner un exemple de champ de vecteurs dépendant du temps dont le flot ne vérifie pas la relation de groupe à un paramètre de difféomorphismes.

*Démonstration de la proposition 4.7.* Toutes les affirmations sont immédiates à partir des définitions, sauf l'identité  $\varphi_X^t \circ \varphi_X^s = \varphi_X^{t+s}$ . Fixons  $s \in \mathbb{R}$ ,  $p \in M$ . Nous allons montrer que les courbes

$$\gamma_1(t) := \varphi_X^t \circ \varphi_X^s(p), \quad \gamma_2(t) := \varphi_X^{t+s}(p), \quad t \in \mathbb{R}$$

coïncident en montrant qu'elles sont toutes les deux courbes intégrales du champ  $X$ . Puisqu'elles coïncident de manière évidente en  $t = 0$ , elles coïncident partout.

L'on a effectivement

$$\dot{\gamma}_1(t) = \frac{d}{dt} \varphi_X^t(\varphi_X^s(p)) = X(\varphi_X^t(\varphi_X^s(p))) = X(\gamma_1(t)),$$

et

$$\dot{\gamma}_2(t) = \frac{d}{dt} \varphi_X^{t+s}(p) = X(\varphi_X^{t+s}(p)) = X(\gamma_2(t)).$$

□

4.2.2. *Difféomorphismes.* On dit qu'une courbe  $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \text{Diff}(M)$  est continue, respectivement lisse si l'application  $\mathbb{R} \times M \rightarrow M$ ,  $(t, p) \mapsto \gamma(t)(p)$  est continue, respectivement lisse. On dit qu'un difféomorphisme  $\varphi$  est *isotope à l'identité* s'il existe une application continue  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \text{Diff}(M)$  telle que  $\gamma(0) = \text{Id}_M$  et  $\gamma(1) = \varphi$ . On note

$$\text{Diff}_0(M) \subset \text{Diff}(M)$$

l'ensemble des difféomorphismes de  $M$  qui sont isotopes à l'identité.

**Exercice 31.** Montrer que  $\text{Diff}_0(M)$  est un sous-groupe distingué de  $\text{Diff}(M)$ . [C'est la composante connexe de l'identité dans la topologie compacte-ouverte sur  $\text{Diff}(M)$ .]

Le quotient  $\text{Diff}(M)/\text{Diff}_0(M)$  s'appelle *groupe modulaire de  $M$*  (en anglais : *mapping class group*). C'est un groupe très important. Notons aussi le théorème suivant dû à Filipkiewicz (Ergodic Th. Dyn. Syst. 2 (1982), 159–171) : deux variétés connexes  $M$  et  $N$  sont difféomorphes si et seulement si  $\text{Diff}_0(M)$  et  $\text{Diff}_0(N)$  sont isomorphes.

Il se trouve que l'ensemble des difféomorphismes  $\varphi$  qui peuvent être obtenus comme flots de champs de vecteurs coïncide avec  $\text{Diff}_0(M)$ . Pour le démontrer il suffit de savoir que  $\text{Diff}_0(M)$  est connexe par arcs lisses (ceci dépasse légèrement le cadre de notre discussion). Si  $\varphi_t$ ,  $t \in [0, 1]$  est une courbe lisse dans  $\text{Diff}_0(M)$  qui relie  $\text{Id}_M$  à  $\varphi$ , alors  $\varphi_t$  est de manière tautologique le flot du champ de vecteurs défini par

$$X_t(\varphi_t(p)) := \frac{d}{dt}\varphi_t(p).$$

Voici maintenant un exemple d'application de la philosophie selon laquelle les champs de vecteurs sont des outils robustes pour construire des difféomorphismes.

**Proposition 4.8.** *Soit  $M$  une variété connexe. Le groupe  $\text{Diff}_0(M)$  agit transitivement sur  $M$ , i.e.*

$$\forall p, q \in M, \exists \varphi \in \text{Diff}_0(M), \varphi(p) = q.$$

Dans l'exercice préliminaire ci-dessous, on dit qu'une courbe  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  est lisse si elle admet une extension lisse à un voisinage de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ . Plus généralement, étant donné un fermé  $A \subset X$  dans une variété, on dit qu'une application  $f : A \rightarrow Y$  vers une variété  $Y$  est lisse si elle admet une extension lisse à un ouvert  $U \supseteq A$ .

**Exercice 32.** Montrer que les affirmations suivantes sont équivalentes pour une variété  $M$  :

- (1)  $M$  est connexe ;
- (2)  $M$  est connexe par arcs ;
- (3)  $M$  est connexe par arcs lisses, i.e. pour tous  $p, q \in M$  il existe une courbe lisse  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  telle que  $\gamma(0) = p$ ,  $\gamma(1) = q$  ;
- (4)  $M$  est connexe par arcs lisses qui sont des plongements.

*Démonstration de la proposition 4.8.* Choisissons une courbe lisse et injective  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  avec  $\gamma(0) = p$ ,  $\gamma(1) = q$ . Puisque  $\gamma$  a un domaine de définition compact, elle admet une extension à un voisinage de  $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ , notée encore  $\gamma$ , qui est un plongement. Nous allons construire un champ de vecteurs  $X \in \mathcal{X}(M)$  à support compact tel que  $X(\gamma(t)) = \dot{\gamma}(t)$ . Alors  $\varphi_X^t(\gamma(0)) = \gamma(t)$  et en particulier  $\varphi_X^1(p) = q$ .

Pour ce faire, nous allons construire  $X$  avec cette propriété localement au voisinage de chaque point  $\gamma(t)$ , et nous allons "recoller" ces champs de vecteurs locaux au moyen d'une partition de l'unité.

Pour chaque  $t$  dans le domaine de définition de (l'extension de)  $\gamma$  il existe une carte  $(U, \phi)$  au voisinage de  $\gamma(t)$  qui redresse  $\text{im}(\gamma)$ , i.e.  $\phi(U \cap \text{im}(\gamma)) = \phi(U) \cap (\mathbb{R} \times \{0\})$ . Le champ de vecteurs  $\frac{d}{dt}\phi(\gamma(t))$  défini le long de  $\text{im}(\phi \circ \gamma) \subset \mathbb{R} \times \{0\}$  détermine un unique champ de vecteurs indépendant des coordonnées  $(x_2, \dots, x_n)$  sur  $\phi(U)$ . Celui-ci correspond via  $\phi$  à un champ de vecteurs  $X \in \mathcal{X}(U)$  qui étend de manière lisse  $\dot{\gamma}(t)$ .

Recouvrons  $\text{im}(\gamma)$  par un nombre fini de cartes  $(U_i, \phi_i)$  qui redressent  $\gamma$ , avec des champs de vecteurs  $X_i \in \mathcal{X}(U_i)$  qui étendent  $\dot{\gamma}$  sur  $\text{im} \gamma \cap U_i$ . Considérons une partition de l'unité  $\rho_i$  subordonnée au recouvrement  $M = \cup_i U_i \cup (M \setminus \text{im}(\gamma|_{[0,1]}))$ . Une telle partition de l'unité est une collection de fonctions lisses  $\{\rho_i, \rho\}$  avec  $\text{supp}(\rho_i) \subset U_i$ ,  $\text{supp}(\rho) \subset M \setminus \text{im}(\gamma|_{[0,1]})$ ,  $0 \leq \rho_i, \rho \leq 1$  et  $\rho + \sum_i \rho_i = 1$ . Nous discutons l'existence générale d'un tel objet dans la section suivante §4.2.3.

Puisque  $\text{supp}(\rho_i) \subset U_i$  le champ de vecteurs  $\rho_i X_i$  se prolonge par zéro en un champ de vecteurs lisse sur  $M$ . Posons

$$X := \sum_i \rho_i X_i \in \mathcal{X}(M).$$

Ce champ de vecteurs convient puisqu'en tout point  $\gamma(t)$  l'on a

$$X(\gamma(t)) = \sum_i \rho_i(\gamma(t)) X_i(\gamma(t)) = \sum_i \rho_i(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) = \left( \sum_i \rho_i \right) \dot{\gamma}(t) = \dot{\gamma}(t).$$

L'on utilise ici le fait que  $\sum_i \rho_i(\gamma(t)) = 1$  pour tout  $t \in [0, 1]$  puisque  $\text{supp}(\rho) \cap \text{im}(\gamma|_{[0,1]}) = \emptyset$ .  $\square$

La preuve de cette proposition est très instructive : elle vous montre d'un côté une manière exemplaire de construire un difféomorphisme comme flot d'un champ de vecteurs, et d'un autre côté une manière exemplaire de recoller des objets définis localement en un objet global à l'aide d'une partition de l'unité.

#### 4.2.3. Partitions de l'unité.

Nous avons rencontré dans la preuve de la proposition précédente la notion de partition lisse de l'unité. Nous donnons dans cette section la définition générale et démontrons un théorème d'existence. Nous rappelons que nous travaillons sous les hypothèses de *séparation* et de *base dénombrable* pour les variétés. Cette section fait naturellement suite à la section 1.6.

**Définition 4.9.** Soit  $(U_i)$  un recouvrement ouvert d'une variété  $M$ . Une partition de l'unité lisse subordonnée au recouvrement  $(U_i)$  est une famille de fonctions lisses

$$\rho_i : M \rightarrow [0, 1]$$

telle que la famille  $\{\text{supp}(\rho_i)\}$  soit localement finie, i.e.

$$\forall K \subseteq M \text{ compact, } \#\{i : \text{supp}(\rho_i) \cap K \neq \emptyset\} < \infty$$

et

$$\sum_i \rho_i = 1.$$

Notons que la condition de finitude locale pour la famille des supports de  $\rho_i$  est essentiellement imposée pour assurer le fait que la somme  $\sum_i \rho_i(p)$  est finie en chaque point  $p \in M$ .

**Théorème 4.10** (existence des partitions de l'unité). *Soit  $(U_i)$  un recouvrement ouvert fini d'une variété  $M$ . Il existe une partition de l'unité lisse subordonnée à ce recouvrement.*

*Démonstration.* Ce résultat est essentiellement un corollaire de l'existence de fonctions de troncature lisses démontrée dans la section 1.6. En effet, l'on démontre qu'il existe des ouverts  $V_i \subset U_i$  tels que  $\{V_i\}$  soit un recouvrement de  $M$  et  $\overline{V_i} \subset U_i$  (exercice!). Choisissons des fonctions de troncature lisses  $f_i : M \rightarrow [0, 1]$  telles que  $f_i|_{\overline{V_i}} = 1$  et  $\text{supp}(f_i) \subset U_i$ . L'on définit

$$\rho_i := f_i / \sum_j f_j.$$

La famille  $\{\rho_i\}$  est alors la partition de l'unité recherchée.  $\square$

Il existe un résultat analogue pour des recouvrements qui ne sont pas finis. Nous l'énonçons sans démonstration et renvoyons le lecteur intéressé au livre de Warner, *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*.

On dit qu'un recouvrement ouvert  $(V_j)$  est un *raffinement* d'un recouvrement ouvert  $(U_i)$  si  $\forall j, \exists i, V_j \subseteq U_i$ .

**Théorème 4.11.** *Soit  $(U_i)$  un recouvrement ouvert quelconque d'une variété  $M$ . Il existe un raffinement localement fini et une partition de l'unité lisse subordonnée à ce raffinement.*  $\square$

**Remarque.** Un espace topologique ayant la propriété que tout recouvrement ouvert admet un raffinement localement fini est dit *paracompact*. Le théorème précédent contient en particulier l'énoncé suivant : une variété séparée et à base dénombrable est paracompacte.

4.2.4. *Redressement.* Toute la discussion que nous avons développé jusqu'à présent à propos des champs de vecteurs tourne autour de la notion de courbe intégrale. Le théorème qui suit affirme que, à un changement de variable près, les courbes intégrales au voisinage d'un point où le champ de vecteurs ne s'annule pas sont toutes standard.

**Théorème 4.12** (redressement, ou forme normale au voisinage d'un point de non-annulation). Soit  $X \in \mathcal{X}(M)$  et  $p \in M$  tel que

$$X(p) \neq 0.$$

Il existe une carte  $(U, \phi)$ ,  $\phi = (x^1, \dots, x^n)$  au voisinage de  $p$  telle que

$$X|_U = \frac{\partial}{\partial x^1}.$$

En particulier

$$\varphi_X^t(x^1, \dots, x^n) = (t + x^1, x^2, \dots, x^n).$$

*Démonstration.* Soit  $(V, \psi)$ ,  $\psi = (y^1, \dots, y^n)$  une carte quelconque au voisinage de  $p$ , avec  $\psi(p) = 0$ . Quitte à composer par un automorphisme linéaire au but, l'on peut supposer que  $X(p) = \frac{\partial}{\partial y^1}|_p$  (égalité au point  $p$ , qui utilise la condition  $X(p) \neq 0$ ). La carte  $\psi$  détermine en particulier une sous-variété  $T$  de dimension  $n - 1$  transverse à la courbe intégrale par  $p$ , donnée par  $T := \psi^{-1}(\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1} \cap \psi(V))$ . (On la note  $T$  comme “tranche”, ou “transversale”. Le fait que  $T$  soit *transverse* en  $p$  à la courbe intégrale par  $p$  signifie que  $T_p M = T_p T \oplus \mathbb{R}\langle X(p) \rangle$ .)

Définissons

$$\chi(y^1, \dots, y^n) := \varphi_X^{y^1}(\psi^{-1}(0, y^2, \dots, y^n)).$$

(L'on suit les lignes de flot de  $X$  en nous appuyant sur  $T$ , Figure 3) L'on vérifie que  $d\chi(0)$  est bijective : elle envoie le vecteur  $e_i$  de la base canonique dans  $\mathbb{R}^n$  sur  $\frac{\partial}{\partial y^i}|_p$ . C'est donc un difféomorphisme local. Par ailleurs  $\chi$  envoie par définition les trajectoires du champ de vecteurs constant  $e_1$  sur  $\mathbb{R}^n$  sur les lignes de flot de  $X$ . Ceci signifie que le difféomorphisme

$$\phi := \chi^{-1}$$

convient. □

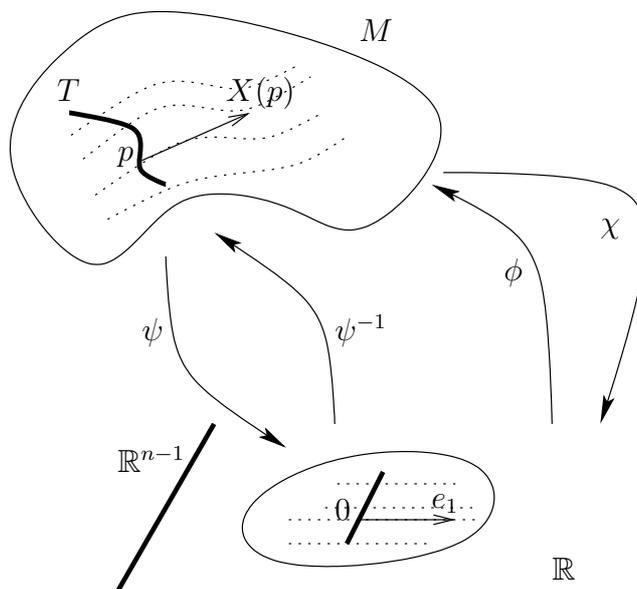


FIGURE 3. Redressement d'un champ de vecteurs au voisinage d'un point où il ne s'annule pas.

### 4.3. Crochet de Lie. Dérivée de Lie.

4.3.1. *Champs de vecteurs en tant que vecteurs tangents au groupe des difféomorphismes.* Soit  $M$  une variété connexe et  $\text{Diff}(M)$  son groupe de difféomorphismes. Nous expliquons dans cette section l'identification

$$T_{\text{Id}}\text{Diff}(M) \cong \mathcal{X}(M).$$

Pour définir  $T_{\text{Id}}\text{Diff}(M)$  nous procédons par analogie avec le cas des variétés de dimension finie – d'une certaine manière nous regardons  $\text{Diff}(M)$  comme une variété de dimension infinie, quoique non modélisée sur un espace de Banach, mais plutôt sur un espace de Fréchet. Ainsi, un vecteur tangent sera une classe d'équivalence de germes de courbes lisses à valeurs dans  $\text{Diff}(M)$ .

On dit qu'une courbe  $\varphi : ]-\epsilon, \epsilon[ \rightarrow \text{Diff}(M)$  est lisse si l'application  $]-\epsilon, \epsilon[ \times M \rightarrow M, (t, p) \mapsto \varphi_t(p)$  est lisse. Nous définissons une relation d'équivalence sur les germes de telles courbes  $\varphi$  tels que  $\varphi_0 = \text{Id}$  de la manière suivante :

$$\varphi \sim \psi \Leftrightarrow \forall p \in M, \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\varphi_t(p) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\psi_t(p) \in T_pM.$$

Autrement dit, deux courbes dans  $\text{Diff}(M)$  sont équivalentes si et seulement si leurs tendances infinitésimales de mouvement sont les mêmes en chaque point de la variété. Nous notons l'ensemble des classes d'équivalence de tels germes de courbes par  $T_{\text{Id}}\text{Diff}(M)$  et l'appelons *espace tangent à  $\text{Diff}(M)$  en l'identité*.

La correspondance bijective

$$T_{\text{Id}}\text{Diff}(M) \cong \mathcal{X}(M)$$

est donnée par

$$[\varphi] \mapsto \left\{ \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \varphi_t(p) : p \in M \right\} \in \mathcal{X}(M).$$

Son inverse associe à un champ de vecteurs  $X$  la classe d'équivalence de son flot  $t \mapsto \varphi_X^t$  vu comme courbe dans  $\text{Diff}(M)$  :

$$X \mapsto [\varphi_X] \in T_{\text{Id}}\text{Diff}(M).$$

La question qui se pose naturellement est la suivante :

*Est-ce que  $\mathcal{X}(M)$  porte une structure algébrique canonique qui reflète la structure de groupe canonique sur  $\text{Diff}(M)$  ?*

La réponse est affirmative :  $\mathcal{X}(M)$  porte une structure canonique d'algèbre de Lie réelle. Ceci reflète le principe général suivant :

*L'analogie infinitésimal de la notion de groupe est la notion d'algèbre de Lie.*

#### 4.3.2. Crochet de Lie.

**Définition 4.13.** Soient  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ . Le crochet de Lie des champs de vecteurs  $X$  et  $Y$  est le champ de vecteurs

$$[X, Y] \in \mathcal{X}(M)$$

défini en tant que dérivation comme suit :

$$[X, Y]f := X(Yf) - Y(Xf), \quad f \in \mathcal{F}(M).$$

Le contenu de la définition est le suivant. Pour toute fonction  $f \in \mathcal{F}(M)$  les dérivées directionnelles selon  $X$ , respectivement  $Y$  définissent des fonctions  $Xf, Yf \in \mathcal{F}(M)$ . Celles-ci sont dérivées à leur tour par rapport à  $Y$ , respectivement  $X$ . De manière équivalente, le crochet est défini en chaque point  $p \in M$  par la relation

$$[X, Y]_p f := X_p(Yf) - Y_p(Xf), \quad p \in M, \quad f \in \mathcal{F}_p.$$

Le crochet définit bien une dérivation en chaque point  $p \in M$  :

$$\begin{aligned} [X, Y]_p(fg) &= X_p(Y(fg)) - Y_p(X(fg)) \\ &= X_p((Yf)g + f(Yg)) - Y_p((Xf)g + f(Xg)) \\ &= X_p(Yf) \cdot g(p) + Y_p f \cdot X_p g + X_p f \cdot Y_p g + f(p) \cdot X_p(Yg) \\ &\quad - Y_p(Xf) \cdot g(p) - X_p f \cdot Y_p g - Y_p f \cdot X_p g - f(p) \cdot Y_p(Xg) \\ &= [X, Y]_p f \cdot g(p) + f(p) \cdot [X, Y]_p g. \end{aligned}$$

Le fait que le crochet de Lie soit bien un champ de vecteurs lisse est une conséquence de son expression en coordonnées locales. Écrivons dans une carte locale

$$X = \sum_i X_i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Y = \sum_j Y_j \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Alors

$$\begin{aligned} [X, Y]_p f &= \sum_i X_i \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \sum_j Y_j \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) - \sum_j Y_j \frac{\partial}{\partial x^j} \left( \sum_i X_i \frac{\partial f}{\partial x^i} \right) \\ &= \sum_{i,j} X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} + X_i Y_j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - Y_j \frac{\partial X_i}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial x^i} - Y_j X_i \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} \\ &= \sum_{i,j} X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} - Y_j \frac{\partial X_i}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial x^i}, \quad \forall f \in \mathcal{F}_p \end{aligned}$$

de sorte que

$$[X, Y] = \sum_j \left( \sum_i X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x^i} - Y_j \frac{\partial X_i}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

**Proposition-Définition 4.14.** *Soit  $M$  une variété. L'espace vectoriel  $\mathcal{X}(M)$  muni du crochet de Lie*

$$[\cdot, \cdot] : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$$

*est une algèbre de Lie sur  $\mathbb{R}$ . Ceci signifie que le crochet vérifie les axiomes suivants :*

- (BILINÉARITÉ) *le crochet est bilinéaire sur  $\mathbb{R}$  ;*
- (ANTI-SYMÉTRIE) *le crochet est anti-symétrique, i.e.*

$$[X, Y] = -[Y, X] ;$$

- (JACOBI) *le crochet vérifie la relation de Jacobi*

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

*Démonstration.* Vérification directe (mais instructive!). □

**Exercice 33.** Le crochet de Lie vérifie les deux propriétés de dérivation suivantes

$$[fX, Y] = f[X, Y] - Y(f)X,$$

$$[X, fY] = f[X, Y] + X(f)Y,$$

pour tous  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$  et  $f \in \mathcal{F}(M)$ .

Il est important de noter que  $[X, Y]_p$  ne dépend pas seulement des valeurs de  $X$  et  $Y$  en  $p$ , mais du comportement de  $X$  et  $Y$  au voisinage de  $p$ . De manière plus précise, le crochet dépend du comportement de  $X$  le long d'une courbe intégrale de  $Y$  par le point  $p$ , et du comportement de  $Y$  le long d'une courbe intégrale de  $X$  par  $p$ .

En particulier, si  $\varphi : M \rightarrow N$  est une application lisse et si l'on note

$$\varphi_* := d\varphi,$$

pour tous deux champs de vecteurs  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$  l'on peut parler du crochet  $[\varphi_*X, \varphi_*Y]_{\varphi(p)}$ . L'on a alors

$$[\varphi_*X, \varphi_*Y]_{\varphi(p)} = \varphi_*[X, Y]_p, \quad p \in M.$$

Cette formule est en particulier vraie lorsque  $\varphi$  est un difféomorphisme. Bien-sûr, dans ce cas elle n'exprime rien d'autre que l'invariance du crochet par changement de coordonnées. Pour démontrer la formule dans le cas général l'on choisit une fonction  $f \in \mathcal{F}_{\varphi(p)}$  quelconque et l'on calcule

$$\begin{aligned} (\varphi_*[X, Y]_p)f &= [X, Y]_p(f \circ \varphi) \\ &= X_p(Y(f \circ \varphi)) - Y_p(X(f \circ \varphi)) \\ &= X_p((\varphi_*Yf) \circ \varphi) - Y_p((\varphi_*Xf) \circ \varphi) \\ &= \varphi_*X_{\varphi(p)}((\varphi_*Y)f) - \varphi_*Y_{\varphi(p)}((\varphi_*X)f) \\ &= [\varphi_*X, \varphi_*Y]_{\varphi(p)}f. \end{aligned}$$

4.3.3. *Dérivée de Lie, I.* Le crochet admet une formulation de nature géométrique en tant que dérivée de Lie. Nous l'expliquons dans cette section. Cette formulation présente plusieurs avantages : (1) elle nous permet de comprendre de manière précise en quel sens une algèbre de Lie est l'analogue linéaire d'un groupe ; (2) elle nous fournit un point de vue important sur le crochet en tant que mesure du défaut de commutation de deux flots ; (2bis) elle nous permet de comprendre le crochet comme défaut de fermeture de parallélogrammes infinitésimaux construits sur deux flots.

Nous avons besoin de deux définitions préliminaires.

**Définition 4.15.** *Soit  $\varphi : M \rightarrow N$  un difféomorphisme.*

*Étant donné  $X \in \mathcal{X}(M)$  on définit son poussé-en-avant par  $\varphi$  comme étant le champ de vecteurs  $\varphi_*X \in \mathcal{X}(N)$  donné par (Figure 4)*

$$(\varphi_*X)_{\varphi(p)} := d\varphi(p)X_p,$$

ou encore

$$(\varphi_*X)_q := d\varphi(\varphi^{-1}(q))X_{\varphi^{-1}(q)},$$

ou encore

$$(\varphi_*X)_q = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi \circ \varphi_X^t \circ \varphi^{-1}(q).$$

*Étant donné  $Y \in \mathcal{X}(N)$  on définit son tiré-en-arrière par  $\varphi$  comme étant le champ de vecteurs  $\varphi^*Y \in \mathcal{X}(M)$  donné par (Figure 4)*

$$\varphi^*Y := (\varphi^{-1})_*Y,$$

ou encore

$$(\varphi^*Y)_p := d\varphi^{-1}(\varphi(p))Y_{\varphi(p)},$$

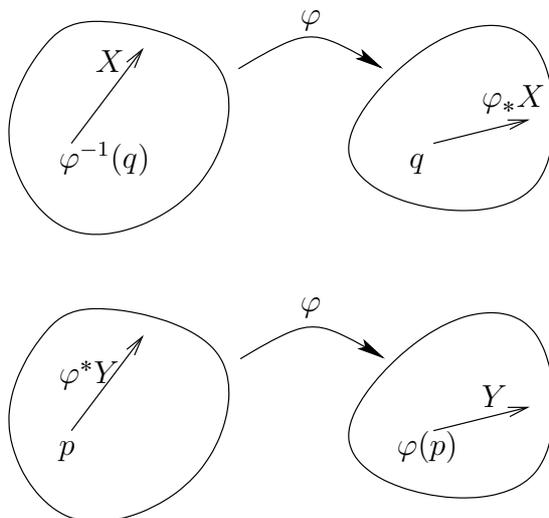


FIGURE 4. Poussé-en-avant et tiré-en-arrière de champs de vecteurs.

ou encore

$$(\varphi^*Y)_p = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi^{-1} \circ \varphi_Y^t \circ \varphi(p).$$

Le lecteur pourra vérifier que ces deux opérations sont inverses l'une de l'autre :

$$\varphi_*\varphi^*Y = Y, \quad \varphi^*\varphi_*X = X.$$

**Exercice 34.** Soient  $\varphi$  et  $\psi$  deux difféomorphismes composables. Montrer que

$$(\varphi\psi)^* = \psi^*\varphi^*, \quad (\varphi\psi)_* = \varphi_*\psi_*.$$

**Exercice 35.** Montrer que le flot de  $\varphi_*X$  est conjugué au flot de  $X$ , et le flot de  $\varphi^*Y$  est conjugué au flot de  $Y$ . Plus précisément :

$$\varphi_{\varphi_*X}^t = \varphi \circ \varphi_X^t \circ \varphi^{-1}, \quad \varphi_{\varphi^*Y}^t = \varphi^{-1} \circ \varphi_Y^t \circ \varphi.$$

**Exercice 36.** Montrer que  $\gamma$  est une courbe intégrale de  $X$  si et seulement si  $\varphi \circ \gamma$  est une courbe intégrale de  $\varphi_*X$ . Montrer que  $\delta$  est une courbe intégrale de  $Y$  si et seulement si  $\varphi^{-1} \circ \delta$  en est une pour  $\varphi^*Y$ .

**Exercice 37.** Montrer que  $(\varphi_X^t)^*X = X$  et  $(\varphi_X^t)_*X = X$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Justifier ceci par un dessin.

Nous avons déjà secrètement rencontré les opérations  $\varphi_*$  et  $\varphi^*$  sur les champs de vecteurs, par exemple lorsque nous avons démontré le théorème de redressement. Celui-ci peut être reformulé de la manière suivante : pour tout champ de vecteurs  $X \in \mathcal{X}(M)$  et tout  $p \in M$  tel que  $X(p) \neq 0$ , il existe un difféomorphisme sur image  $\phi : U \xrightarrow{\cong} \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$  défini au voisinage de  $p$  tel que  $\phi_*X = e_1$ , le champ de vecteurs constant égal à  $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$  sur  $\phi(U)$  (ou encore  $\phi^*e_1 = X$ ).

Ces opérations doivent être lues comme des opérations de transfert de structure (ici, des champs de vecteurs) entre variétés en utilisant des applications différentiables (ici, des difféomorphismes). De manière générale, les opérations de ce type sont très importantes à l'intérieur de n'importe quelle théorie.

**Définition 4.16.** Soient  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ . La dérivée de Lie de  $Y$  dans la direction  $X$  est définie comme

$$L_X Y := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\varphi_X^t)^* Y.$$

Le contenu de la définition est le suivant. Pour tout point  $p \in M$  l'on considère la courbe dans  $T_p M$  donnée par  $t \mapsto ((\varphi_X^t)^* Y)_p$ . La dérivée de cette courbe en  $t = 0$  est identifiée à un élément de  $T_p M$ , que l'on appelle *dérivée de Lie au point  $p$*  et que l'on note  $(L_X Y)_p$ . Il découle par ailleurs directement de la définition que

$$(4.1) \quad L_X Y = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \varphi_X^{-t} \varphi_Y^s \varphi_X^t.$$

**Exercice 38.** Montrer que l'on a l'identité

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} (\varphi_X^t)^* Y = (\varphi_X^{t_0})^* L_X Y.$$

La dérivée de Lie est une opération fondamentale de dérivation sur une variété. Elle s'étend aux formes différentielles et aux tenseurs de type quelconque, comme nous le verrons plus tard.

**Proposition 4.17.** Pour tous  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$  l'on a

$$L_X Y = [X, Y].$$

*Démonstration.* Pour alléger la notation on pose  $\varphi^t := \varphi_X^t$  et  $\psi^t := \varphi_Y^t$ . Nous calculons successivement pour  $f \in \mathcal{F}_p$  :

$$\begin{aligned} (L_X Y)_p f &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} f \circ \varphi^{-t} \psi^s \varphi^t(p) \\ &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f \circ \varphi^{-t} \psi^s \varphi^t(p) \\ &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \left( - (Xf) \circ \psi^s(p) + \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f \circ \psi^s \varphi^t(p) \right) \\ &= -Y_p(Xf) + \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} f \circ \psi^s \varphi^t(p) \\ &= -Y_p(Xf) + \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (Yf) \circ \varphi^t(p) \\ &= -Y_p(Xf) + X_p(Yf). \end{aligned}$$

Dans la quatrième égalité nous utilisons le fait que, si  $F(\sigma, \tau)$  est une fonction dérivable de deux variables réelles, alors  $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F(-t, t) = -\frac{\partial F}{\partial \sigma}(0, 0) + \frac{\partial F}{\partial \tau}(0, 0)$ .  $\square$

L'identité  $L_X Y = [X, Y]$  entraîne le fait que la valeur de  $L_X Y$  en un point  $p$  ne dépend que des valeurs de  $X$  sur une courbe intégrale de  $Y$  par  $p$ , respectivement des valeurs de  $Y$  sur une courbe intégrale de  $X$  par  $p$ . L'on a par ailleurs

$$L_{fX} Y = fL_X Y - Y(f)X, \quad L_X(fY) = fL_X Y + X(f)Y.$$

*Avertissement* :  $L_X Y$  ne dépend pas que de la valeur de  $X$  au point  $p$ , mais bien du comportement de  $X$  le long d'une courbe intégrale de  $Y$  : la formule implique bien des dérivées des coefficients de  $X$  dans une carte locale. De même pour  $Y$ .

**Exercice 39.** Démontrer l'identité

$$-[X, Y] = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\varphi_X^t)_* Y.$$

4.3.4. *Crochet de Lie comme défaut de commutation de flots.* La proposition 4.17 implique le corollaire suivant.

**Corollaire 4.18.** Avec la notation  $\psi^s = \varphi_Y^s$ ,  $\varphi^t = \varphi_X^t$ , l'on a :

$$[X, Y] = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \psi^{-s} \varphi^{-t} \psi^s \varphi^t.$$

*Démonstration.* En utilisant la dernière formule dans la définition de  $(\varphi^t)_* Y$  on obtient

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \psi^{-s} \varphi^{-t} \psi^s \varphi^t(p) = -Y(p) + ((\varphi^t)_* Y)_p,$$

d'où le résultat, puisque le terme  $-Y(p)$  s'annule après dérivation.  $\square$

La quantité  $\varphi^{-t} \psi^s \varphi^t$ , qui était déjà apparue dans la preuve de la proposition 4.17 comme conséquence de la définition de la dérivée de Lie, est maintenant mise en contexte : elle n'était qu'un avatar de la quantité  $\psi^{-s} \varphi^{-t} \psi^s \varphi^t$ , que l'on appelle *commutateur* des éléments  $\varphi^t, \psi^s \in \text{Diff}(M)$ . Pour tout groupe  $G$  l'on définit le commutateur de deux éléments  $g, h \in G$  comme  $[g, h] := h^{-1}g^{-1}hg$ . Il est clair que  $g$  et  $h$  commutent si et seulement si  $[g, h] = 1$ . Avec cette notation l'on peut écrire

$$[X, Y] = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} [\varphi^t, \psi^s].$$

**Proposition 4.19.** On note  $\varphi^t := \varphi_X^t$  et  $\psi^s := \varphi_Y^s$ . Les affirmations suivantes sont équivalentes :

- (1)  $[X, Y] = 0$  ;
- (2)  $(\varphi^t)_* Y = Y, \forall t$  ;
- (3)  $(\psi^s)_* X = X, \forall s$  ;
- (4)  $[\varphi^t, \psi^s] = 0, \forall s, t, i.e. \text{ les flots de } X \text{ et } Y \text{ commutent.}$

*Démonstration.* (1)  $\Leftrightarrow$  (2). Le crochet  $[X, Y]$  est nul si et seulement si  $L_X Y = 0$ . Par l'exercice 38 ceci équivaut à l'annulation de  $\frac{d}{dt}(\varphi^t)^* Y$ , donc au fait que  $(\varphi^t)^* Y$  est indépendant du temps et donc égal à  $Y$ .

(1)  $\Leftrightarrow$  (3) se démontre de la même manière, ou bien découle de ce qui précède par anti-symétrie du crochet.

(2)  $\Leftrightarrow$  (4) Deux champs de vecteurs coïncident si et seulement si leurs flots coïncident. Or le flot de  $(\varphi^t)^* Y$  est  $s \mapsto \varphi^{-t} \psi^s \varphi^t$ , alors que le flot de  $Y$  est  $s \mapsto \psi^s$ .  $\square$

Pour clôturer cette section mentionnons la conséquence géométrique suivante du corollaire 4.18. C'est l'interprétation du crochet en tant que "défaut de fermeture de parallélogrammes infinitésimaux" annoncé en début de section.

**Proposition 4.20.** *On a*

$$[X, Y] = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \varphi_Y^{-\sqrt{t}} \varphi_X^{-\sqrt{t}} \varphi_Y^{\sqrt{t}} \varphi_X^{\sqrt{t}}.$$

*Démonstration.* Notons encore  $\varphi^t := \varphi_X^t$  et  $\psi^s := \varphi_Y^s$ . À  $p$  fixé l'on considère la fonction

$$F : (s, t) \mapsto \psi^{-s} \varphi^{-t} \psi^s \varphi^t(p).$$

L'on a

$$\frac{\partial F}{\partial s}(0, 0) = \frac{\partial F}{\partial t}(0, 0) = \frac{\partial^2 F}{\partial s^2}(0, 0) = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(0, 0) = 0.$$

En combinaison avec le calcul du corollaire 4.18, ceci implique le fait que, dans des coordonnées locales euclidiennes induites par une carte quelconque, l'on a

$$(4.2) \quad F(s, t) = p + st[X, Y]_p + o(\|(s, t)\|^2).$$

La conclusion de la proposition en découle directement.  $\square$

DIGRESSION : ALGÈBRES DE LIE ET GROUPES.

Nous avons déjà mentionné le fait que la notion d'algèbre de Lie est l'analogue linéaire de la notion de groupe. Nous pouvons maintenant préciser cette analogie, qui fournit une motivation pour l'étude des groupes de Lie.

Une algèbre de Lie consiste en la donnée de deux objets : un espace vectoriel  $V$  et un crochet de Lie  $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V$ . L'on pense à l'algèbre de Lie comme étant l'espace tangent à un groupe  $G$  au point  $e \in G$ . Ainsi, l'espace vectoriel  $V$  constitue un modèle local pour le groupe en tant que variété. Mais qu'en est-il de la loi de groupe ?

La loi de groupe peut être pensée comme étant une déformation de la loi de groupe abélien induite par ce modèle local. En prenant ce

point de vue, le crochet mesure la non-trivialité de cette déformation au premier ordre significatif. De manière équivalente, le crochet mesure le défaut de commutativité au premier ordre significatif. Ce point de vue est illustré par la formule (4.2).

La proposition 4.19 semble indiquer que, lorsque le groupe  $G$  n'est pas abélien, le crochet n'est pas identiquement nul. Ceci est vrai, mais très surprenant : il pourrait en principe y avoir des déformations de la structure de groupe abélien qui sont nulles au premier ordre significatif, mais qui sont néanmoins non-triviales. Il n'en est rien. Il se trouve que la fonction  $F$  dans (4.2) admet un développement de Taylor dans lequel tous les coefficients s'expriment comme crochets itérés de  $X$  et  $Y$ . C'est une instance de la fameuse formule de Baker-Campbell-Hausdorff en théorie des groupes de Lie.

De la même manière, si le crochet est identiquement nul alors le groupe  $G$  est abélien et sa loi de groupe est donnée localement au voisinage de l'identité par la loi de groupe abélien sur l'espace vectoriel  $V$  sous-jacent à l'algèbre de Lie.

FIN DE LA DIGRESSION

**4.4. Groupes de Lie et algèbres de Lie.** Le but de cette section est d'illustrer les concepts de champ de vecteurs, flot, crochet de Lie, poussé-en-avant et tiré-en-arrière dans le cas important des groupes de Lie. Nous donnons par ailleurs dans le §4.4.2 un aperçu rapide la théorie générale des groupes de Lie.

4.4.1. *Notions de base.* Soit  $G$  un groupe de Lie, c'est-à-dire une variété lisse munie d'une structure de groupe telle que la multiplication  $G \times G \rightarrow G$ ,  $(g, h) \mapsto gh$  et l'inversion  $G \rightarrow G$ ,  $g \mapsto g^{-1}$  soient des opérations lisses. On note  $e \in G$  l'élément neutre.

Le groupe  $G$  agit sur lui-même par *translations à gauche*

$$g \cdot h := gh, \quad g \in G, h \in G.$$

L'on note  $L_g : G \rightarrow G$ ,  $h \mapsto gh$  le difféomorphisme de  $G$  induit par l'élément  $g \in G$ . Ainsi, l'action par translations à gauche s'identifie au morphisme de groupes  $G \rightarrow \text{Diff}(G)$ ,  $g \mapsto L_g$ .

**Définition 4.21.** *Un champ de vecteurs  $V \in \mathcal{X}(G)$  est dit invariant à gauche si*

$$\forall g \in G, (L_g)_* V = V.$$

**Remarque.** Cette définition est à contraster avec le fait que sur une variété arbitraire il n'existe pas de moyen de mettre en évidence des classes remarquables de champs de vecteurs. Par contre, sur une variété munie de structure supplémentaire, telle un groupe de Lie, les champs de vecteurs compatibles avec la structure fournissent l'une des clés d'étude de la variété en question. Ce sera le cas avec les champs invariants à gauche.

Dans cette section nous allons étudier les notions développées dans les sections précédentes dans le cas des champs de vecteurs invariants à gauche.

L'ensemble des champs de vecteurs invariants à gauche forme un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{X}(G)$ , que l'on note  $\mathcal{X}^G$ . La définition implique qu'un champ de vecteurs  $V \in \mathcal{X}^G$  est uniquement déterminé par sa valeur en  $e \in G$  via la relation

$$V_g = dL_g(e)V_e, \quad g \in G.$$

Réciproquement, cette relation définit un champ de vecteurs invariant à gauche à partir d'un vecteur arbitraire  $V_e \in T_e G$ . Nous obtenons donc :

**Proposition 4.22.** *L'évaluation*

$$\mathcal{X}^G \rightarrow T_e G, \quad V \mapsto V_e$$

*est un isomorphisme linéaire. L'application réciproque est*

$$T_e G \rightarrow \mathcal{X}^G, \quad X \mapsto \tilde{X}, \quad \tilde{X}_g := dL_g(e)X.$$

□

**Corollaire 4.23.** *La dimension de l'espace vectoriel  $\mathcal{X}^G$  des champs de vecteurs invariants à gauche est égale à  $\dim G$ .* □

**Exercice 40.** Un champ de vecteurs  $V \in \mathcal{X}^G$  est identiquement nul si et seulement si il s'annule en un point  $g \in G$ .

**Exemple.** Soit  $G = (\mathbb{R}, +)$ . C'est une groupe de Lie de dimension 1. Un champ de vecteurs  $V$  est invariant à gauche si et seulement si  $(L_x)_*V = V$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Or  $((L_x)_*V)_y = dL_x(L_x^{-1}(y))V_{L_x^{-1}(y)} = dL_x(y-x)V_{y-x} = V_y$ . La dernière égalité utilise le fait que l'espace tangent à  $\mathbb{R}$  en tout point s'identifie canoniquement à  $\mathbb{R}$ , et le fait que la différentielle d'une translation est égale à l'identité via cette identification. Ainsi  $V$  est invariant à gauche si et seulement si il est constant  $V = cte \frac{\partial}{\partial x}$ , où  $x$  est la coordonnée canonique sur  $\mathbb{R}$ .

Les champs invariants à gauche peuvent être vus comme généralisant les champs constants sur un espace vectoriel. L'on peut donner un sens précis à ce point de vue.

**Proposition 4.24.** *Le fibré tangent à un groupe de Lie est canoniquement trivial.*

*Démonstration.* Soit  $G$  un groupe de Lie. L'on a un isomorphisme de fibrés entre  $TG$  et le fibré trivial  $G \times T_eG$  de fibre  $G$ , défini par

$$\Phi : G \times T_eG \xrightarrow{\cong} TG, \quad (g, X) \mapsto dL_g(e)X.$$

L'inverse de  $\Phi$  envoie  $\xi \in T_gG$  sur  $(g, dL_{g^{-1}}(g)\xi)$ . □

**Exercice 41.** Un champ de vecteurs sur  $G$  est invariant à gauche si et seulement si c'est l'image par  $\Phi$  d'une section constante du fibré trivial  $G \times T_eG$ .

**Exemples.** Les fibrés  $TS^1, TS^3, TS^7$  sont triviaux. Les sphères  $S^1$  et  $S^3$  sont des groupes de Lie, en tant que sphères unité dans  $\mathbb{C}$ , respectivement dans le corps des quaternions  $\mathbb{H}$ . La sphère  $S^7$  est la sphère unité dans  $\mathbb{O}$ , le "corps" des octonions. Celui-ci est un espace vectoriel normé de dimension 8 muni d'une multiplication qui n'est pas commutative, ni associative. Le manque d'associativité fait que la structure multiplicative induite sur  $S^7$  n'est pas une structure de groupe. Néanmoins, elle peut être utilisée pour trivialisier  $TS^7$ .

**Remarque.** L'on peut montrer que  $S^0, S^1, S^3$  et  $S^7$  sont les seules sphères qui sont parallélisables (Bott-Milnor 1958, Kervaire 1958). Par ailleurs, l'on peut montrer – et c'est plus facile – que les seules sphères qui admettent des structures de groupes de Lie sont  $S^0, S^1$  et  $S^3$  (cf. <http://math.stackexchange.com/questions/12453/>).

Nous passons maintenant à l'étude de la complétude des champs de vecteurs invariants à gauche. Lorsque le groupe de Lie  $G$  est non-compact le support d'un champ de vecteurs invariant à gauche non-nul est non-compact. Le critère de complétude donné à la section 4.2 ne s'applique donc pas. Néanmoins, nous avons le résultat suivant.

**Proposition 4.25.** *Tout champ de vecteurs invariant à gauche est complet.*

Nous allons utiliser dans la preuve la notation suivante :

$$g_* := dL_g.$$

*Démonstration.* Soit  $V \in \mathcal{X}^G$  et notons  $\varphi := \varphi_V$  son flot, avec  $t \mapsto \varphi^t(g)$  définie localement au voisinage de zéro pour tout  $g \in G$ .

*Affirmation :* Pour  $g \in G$  et  $t \in \mathbb{R}$  de module assez petit l'on a

$$\varphi^t(g) = g\varphi^t(e).$$

*Preuve de l'affirmation :* la courbe  $\delta(t) := g\varphi^t(e)$  vérifie

$$\dot{\delta}(t) = g_*(V(\varphi^t(e))) = V(g\varphi^t(e)) = V(\delta(t)),$$

avec  $\delta(0) = g$ . C'est donc la courbe intégrale du champ  $V$  par le point  $g$  et elle coïncide nécessairement avec  $\varphi^t(g)$ .  $\square$

Il s'ensuit que, pour  $g \in G$  et  $t, s \in \mathbb{R}$  de module assez petit l'on a

$$\varphi^{t+s}(g) = g\varphi^s(e)\varphi^t(e),$$

et en particulier

$$\varphi^{t+s}(e) = \varphi^t(e)\varphi^s(e).$$

Ceci suggère de définir, pour  $t \in \mathbb{R}$  et  $N \gg 0$  assez grand (tel que  $t/N$  appartienne au voisinage de zéro où  $\varphi^{\frac{t}{N}}(e)$  est défini), la courbe

$$\gamma(t) := g(\varphi^{\frac{t}{N}}(e))^N.$$

La relation  $\varphi^{t+s}(e) = \varphi^t(e)\varphi^s(e)$ , valable pour  $t$  et  $s$  assez petits, implique le fait que la définition ne dépend pas du choix de  $N \gg 0$  (exercice!). Bien-sûr, lorsque  $t \rightarrow \infty$  nous sommes obligés de choisir  $N \rightarrow \infty$ .

Notons  $g_k = (\varphi^{\frac{t}{N}}(e))^k$ ,  $k = 0, \dots, N$  avec  $g_0 := e$ , de sorte que  $g_k g_{N-k} = g_N$  pour tout  $k$ . La courbe  $\gamma$  est lisse et vérifie  $\gamma(0) = g$  et

$$\dot{\gamma}(t) = \sum_{k=0}^{N-1} g_* g_{k*} \frac{1}{N} V(g_{N-k}) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N} V(g g_k g_{N-k}) = V(\gamma(t)).$$

Il s'ensuit que  $\gamma$  est la courbe intégrale de  $V$  par  $g$ . Puisqu'elle est définie sur  $\mathbb{R}$  et  $g \in G$  est arbitraire, on en déduit que  $V$  est complet.  $\square$

Nous passons maintenant à la description des flots de champs de vecteurs invariants à gauche.

**Remarque 4.26.** Soit  $V \in \mathcal{X}^G$ . La relation

$$\varphi_V^t(g) = g\varphi_V^t(e),$$

qui était au cœur de la preuve ci-dessus, vaut pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et peut être reformulée de manière plus conceptuelle comme suit. Considérons l'anti-homomorphisme de groupes  $R : G \rightarrow \text{Diff}(G)$ ,  $g \mapsto R_g : h \mapsto hg$  (on appelle  $R_g$  translation à droite, et la terminologie "anti-homomorphisme" désigne le fait que  $R(g_1g_2) = R(g_2)R(g_1)$ ). Nous avons alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\varphi_V} & \text{Diff}(G) \\ & \searrow \varphi_V(e) & \nearrow R \\ & & G \end{array}$$

Autrement dit, le groupe à 1 paramètre dans  $\text{Diff}(G)$  donné par  $\varphi_V$  factorise par le groupe à 1 paramètre dans  $G$  donné par  $\varphi_V(e)$ .

**Définition 4.27.** Un groupe à un paramètre dans  $G$  est un morphisme lisse de groupes

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow G.$$

De manière équivalente, on demande que la relation suivante soit satisfaite :

$$\varphi^{t+s} = \varphi^t \varphi^s = \varphi^s \varphi^t, \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

**Proposition 4.28.** Pour tout groupe à un paramètre  $\varphi$  dans  $G$  il existe un unique champ de vecteurs invariant à gauche  $V$  tel que

$$\varphi = \varphi_V(e).$$

*Démonstration.* L'unicité découle de ce que  $V$  est uniquement déterminé par  $V_e$ , qui doit nécessairement être égal à  $\frac{d}{dt}|_{t=0}\varphi^t$ .

Pour l'existence on définit  $V$  comme étant l'unique champ de vecteurs invariant à gauche tel que  $V_e = \frac{d}{dt}|_{t=0}\varphi^t$ . Puisque  $\frac{d}{dt}|_{t=t_0}\varphi^t = \frac{d}{ds}|_{s=0}\varphi^{t_0+s} = \frac{d}{ds}|_{s=0}\varphi^{t_0}\varphi^s = \varphi_*^{t_0}V_e = V_{\varphi^{t_0}}$ , l'on déduit que  $\varphi^t$  est la courbe intégrale de  $V$  telle que  $\varphi^0 = e$ , de sorte que  $\varphi = \varphi_V(e)$ .  $\square$

**Corollaire 4.29.** Pour tout  $X \in T_eG$  il existe un unique groupe à un paramètre  $\varphi$  dans  $G$  tel que

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}\varphi^t = X.$$

*Démonstration.* L'unicité découle de ce que  $\varphi^t$  est nécessairement une courbe intégrale par  $e$  pour le champ de vecteurs invariant à gauche  $\tilde{X}$  qui étend  $X$ . L'existence découle de l'existence de cette courbe intégrale et de la complétude de  $\tilde{X}$ .  $\square$

**Remarque.** La condition de lissité dans la définition d'un groupe à 1 paramètre dans  $G$  est superflue : il suffirait d'imposer la continuité, dans quel cas on peut démontrer que  $\varphi$  est nécessairement lisse (cf. Warner, *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*).

**Définition 4.30.** Soit  $G$  un groupe de Lie. L'application exponentielle de  $G$  est définie par

$$\exp : T_e G \rightarrow G, \quad \exp(X) = \varphi_{\tilde{X}}^1(e),$$

où  $\tilde{X} \in \mathcal{X}^G$  est l'unique champ de vecteurs invariant à gauche tel que

$$\tilde{X}_e = X.$$

**Exercice 42.** Montrer l'identité

$$\exp(tX) = \varphi_{\tilde{X}}^t(e), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ainsi  $t \mapsto \exp(tX)$  est l'unique groupe à 1 paramètre dans  $G$  dont la dérivée en 0 vaut  $X \in T_e G$ .

L'application exponentielle est lisse (dépendance lisse du flot d'un champ de vecteurs par rapport aux paramètres) et vérifie

$$\exp(0) = e.$$

**Proposition 4.31** (Premier théorème de Lie). *L'application exponentielle de  $G$  est un difféomorphisme local en 0.*

*Démonstration.* L'identité  $\exp(tX) = \varphi_{\tilde{X}}^t(e)$  implique

$$d \exp(e)X = X.$$

Ainsi  $d \exp(e) : T_e G \rightarrow T_e G$  est l'identité et on conclut par le théorème d'inversion locale.  $\square$

La motivation pour la terminologie "exponentielle" est fournie par le cas des groupes de matrices. L'on rappelle que, pour une matrice  $A \in M(n, \mathbb{R})$ , on définit son exponentielle  $e^A$  par la formule

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

**Proposition 4.32.** Soit  $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ . Pour tout  $A \in M(n, \mathbb{R}) = T_{\mathrm{Id}} \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$  l'on a

$$\exp(A) = e^A.$$

*Démonstration.* Il découle de la définition que  $t \mapsto e^{tA}$ ,  $t \in \mathbb{R}$  est un groupe à un paramètre dans  $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ , dont la dérivée en 0 vaut  $A$ . On conclut par l'unicité du groupe à un paramètre dont la dérivée en 0 est fixée.  $\square$

Nous étudions maintenant le crochet de Lie en relation avec les champs de vecteurs invariants à gauche.

**Proposition-Définition 4.33.** *L'espace  $\mathcal{X}^G$  des champs de vecteurs invariants à gauche est invariant par crochet de Lie.*

On appelle  $T_e G$  muni du crochet induit via l'isomorphisme  $\mathcal{X}^G \cong T_e G$  l'algèbre de Lie du groupe  $G$ . On la note

$$\text{Lie}(G),$$

ou encore

$$\mathfrak{g} := \text{Lie}(G).$$

*Démonstration.* Soient  $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathcal{X}^G$ . Pour tout  $g \in G$  nous avons

$$g_*[\tilde{X}, \tilde{Y}] = [g_*\tilde{X}, g_*\tilde{Y}] = [\tilde{X}, \tilde{Y}],$$

de sorte que  $[\tilde{X}, \tilde{Y}] \in \mathcal{X}^G$ .  $\square$

**Proposition 4.34.** *Soient  $X, Y \in \mathfrak{g}$ . Nous avons*

$$[X, Y] = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \exp(tX) \exp(sY) \exp(-tX).$$

*Démonstration.* C'est une conséquence directe du fait que le crochet de Lie sur les champs de vecteurs est égal à la dérivée de Lie, combiné avec l'équation (4.1) et le fait que les flots vus comme éléments de  $G$  agissent par multiplication à droite (Remarque 4.26).  $\square$

**Corollaire 4.35.** *Le crochet de Lie sur  $\mathfrak{gl}_n := T_{\text{Id}}GL(n, \mathbb{R}) \cong M(n, \mathbb{R})$  est donné par le commutateur des matrices, i.e.*

$$[X, Y] = XY - YX.$$

*Démonstration.* La formule précédente fournit

$$\begin{aligned} [X, Y] &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} e^{tX} e^{sY} e^{-tX} \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} e^{tX} Y e^{-tX} \\ &= XY - YX. \end{aligned}$$

$\square$

**Proposition 4.36.** *Un groupe de Lie  $G$  connexe est commutatif si et seulement si le crochet de Lie sur  $\text{Lie}(G)$  est identiquement nul.*

*Démonstration.* Montrons que  $[\cdot, \cdot] = 0$  si et seulement si

$$gh = hg$$

pour tous  $g, h$  dans un voisinage de l'élément neutre  $e \in G$ .

Nous avons vu que  $\exp : T_e G \rightarrow G$  est un difféomorphisme local en 0. Si  $G$  est commutatif au voisinage de  $e$ , alors la proposition 4.34 implique

directement que le crochet est nul. Réciproquement, si le crochet est nul la proposition 4.19 nous assure que les flots de deux champs de vecteurs invariants à gauche arbitraires commutent. L'on conclut alors par surjectivité de  $\exp$  sur un voisinage ouvert de  $e \in G$ .

Montrons maintenant que  $G$  est commutatif si et seulement si il existe un voisinage ouvert de l'identité dont les éléments commutent. Pour cela, il suffit de montrer l'affirmation suivante :

*Soit  $e \in V \subset G$  ouvert fixé. Pour tout  $g \in G$  il existe  $n \geq 1$  et  $g_1, \dots, g_n \in V$  tels que  $g = g_1 \dots g_n$ .*

Pour la preuve, nous montrons que l'ensemble  $\mathcal{G}$  des éléments qui satisfont cette condition est non-vide, ouvert et fermé. Le fait qu'il soit non-vide est immédiat à partir de la définition. Le fait qu'il soit ouvert découle de ce que  $L_g$  est un difféomorphisme pour tout  $g$ . En effet, si  $g = g_1 \dots g_n$  avec  $g_1, \dots, g_n \in V$ , l'ensemble  $L_g(V)$  est un ouvert autour de  $g$  et tout élément de cet ouvert s'écrit par définition  $g' = g\bar{g} = g_1 \dots g_n \bar{g}$ , avec  $\bar{g} \in V$ . Le fait qu'il soit fermé se démontre de manière similaire : si  $g^\nu \rightarrow g$ ,  $\nu \rightarrow \infty$  avec  $g^\nu \in \mathcal{G}$ , il existe  $\nu$  assez grand tel que  $g^\nu \in L_g(V)$  et  $g^\nu$  suffisamment proche de  $g$ , de sorte que  $g^\nu = g\bar{g}$  avec  $\bar{g} \in V$  suffisamment proche de  $e$ . Il s'ensuit que  $\bar{g}^{-1} \in V$  et donc  $g = g^\nu \bar{g}^{-1} \in \mathcal{G}$ .  $\square$

Cette proposition clôt le parallèle entre groupes de Lie et la discussion de la section 4.3. Dans ce qui suit nous donnons quelques aperçus de la théorie générale des groupes de Lie.

#### 4.4.2. Aperçu de la théorie générale des groupes de Lie.

GUIDE DE LECTURE POUR CETTE SECTION. Le seul résultat que nous démontrons en détail dans cette section est la proposition 4.38. Vous pouvez par ailleurs démontrer tous seuls les affirmations contenues dans la partie qui traite de la représentation adjointe. Les parties concernant la formule de Baker-Campbell-Hausdorff, la correspondance entre groupes de Lie et algèbres de Lie, et la théorie des représentations, doivent être lues comme des digressions/ouvertures. Vous pourrez par ailleurs revenir dessus plus tard.

La proposition 4.36 montre que le crochet de Lie sur  $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$  est une mesure du défaut de commutativité du groupe  $G$ . Comme nous l'avons déjà discuté, le crochet est une quantité qui mesure ce défaut de commutativité au premier ordre significatif. Le fait surprenant est que, en fait, le crochet détermine entièrement la loi de groupe si  $G$  est connexe ! C'est le contenu de la formule de Baker-Campbell-Hausdorff, que je considère comme étant l'une des plus belles formules des mathématiques, et que j'explique plus bas.

*Représentation adjointe.* Le groupe  $G$  agit sur lui-même par conjugaison

$$G \times G \rightarrow G, \quad g \cdot h := ghg^{-1}.$$

On note  $C_g \in \text{Diff}(G)$  le difféomorphisme  $h \mapsto ghg^{-1}$ , de sorte que l'action ci-dessus se traduit en un morphisme de groupes

$$C : G \rightarrow \text{Diff}(G), \quad g \mapsto C_g.$$

Cette action fixe l'élément neutre  $e \in G$ .

La *représentation adjointe de  $G$  sur  $\mathfrak{g}$*  est le morphisme de groupes de Lie

$$\text{Ad} : G \rightarrow GL(\mathfrak{g}), \quad g \mapsto dC_g(e).$$

La *représentation adjointe de  $\mathfrak{g}$  sur  $\mathfrak{g}$*  est le morphisme d'algèbres de Lie

$$\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) = \text{End}(\mathfrak{g}), \quad X \mapsto \text{ad}_X, \quad \text{ad}_X(Y) := [X, Y].$$

L'on vérifie que la relation

$$\text{ad}_{[X, Y]} = [\text{ad}_X, \text{ad}_Y]$$

est en fait équivalente à l'identité de Jacobi sur  $\mathfrak{g}$ . L'on vérifie par ailleurs de manière similaire à la preuve du corollaire 4.35 que

$$\text{ad}_X = d\text{Ad}(e) \cdot X.$$

En particulier, l'unicité du groupe à un paramètre tangent à un vecteur donné implique l'identité fondamentale  $\text{Ad}(\exp(tX)) = \exp(t\text{ad}_X)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $X \in \mathfrak{g}$ , ou encore

$$\text{Ad} \circ \exp = \exp \circ \text{ad}.$$

Il est par ailleurs vrai en toute généralité que la dérivée en l'identité d'un morphisme de groupes de Lie est un morphisme d'algèbres de Lie, cf. plus bas.

*Formule de Baker-Campbell-Hausdorff.* Étant donnés des voisinages  $0 \in U \subset \mathfrak{g}$  et  $e \in V \subset G$  tels que  $\exp : U \xrightarrow{\cong} V$  soit un difféomorphisme, on note

$$\ln := \exp^{-1} : V \xrightarrow{\cong} U.$$

**Théorème 4.37** (Formule de Baker-Campbell-Hausdorff). *Pour  $X, Y \in \mathfrak{g}$  proches de 0, on a*

$$\ln(\exp X \exp Y) = X + \int_0^1 F(e^{\text{ad}_X} e^{t\text{ad}_Y})(Y) dt,$$

où

$$F(z) = \frac{z \ln z}{z - 1}, \quad |z - 1| < 1.$$

Ici il faut comprendre  $F$  comme étant une fonction bien définie et holomorphe dans le disque  $\{|z - 1| < 1\}$ , admettant un développement en série entière  $F(z) = \sum_{m \geq 0} a_m (z - 1)^m$ . Pour l'expression intégrale ci-dessus la variable  $z$  dans cette série entière est remplacée par  $e^{\text{ad}_X} e^{\text{ad}_Y}$ , regardé en tant qu'endomorphisme de  $\mathfrak{g}$ . Le lecteur pourra trouver une preuve de cette formule par exemple dans le livre de Brian Hall intitulé *Lie groups, Lie algebras, and representations. An elementary introduction*, GTM 222, Springer, New York, 2003.

La forme précise de cette formule importe peu. Ce qui compte est qu'elle fournit une expression *analytique* pour  $\ln(\exp X \exp Y)$  en termes de crochets itérés de  $X$  et  $Y$ . La formule peut être réécrite sous la forme beaucoup plus suggestive

$$\ln(\exp X \exp Y) = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \frac{1}{12}([X, [X, Y]] - [Y, [X, Y]]) + \dots$$

où les  $\dots$  indiquent une expression analytique en des crochets itérés d'ordre au moins trois. L'on voit apparaître les endomorphismes  $\text{ad}_X$ ,  $\text{ad}_Y$  lorsque l'on écrit les différents termes de la somme précédente sous la forme  $[X, Y] = \text{ad}_X(Y)$ ,  $[X, [X, Y]] = (\text{ad}_X)^2(Y)$ ,  $[Y, [X, Y]] = \text{ad}_Y \text{ad}_X(Y)$  etc. L'on voit aussi apparaître le crochet  $[X, Y]$  comme premier terme significatif au-delà de l'addition  $X + Y$ . Lorsque le crochet est identiquement nul sur  $\mathfrak{g}$ , la formule se réduit à

$$\ln(\exp X \exp Y) = X + Y,$$

ce qui n'est rien d'autre qu'une version plus fine de notre proposition 4.36, avec l'information supplémentaire que l'application exponentielle induit dans ce cas localement un morphisme de groupes de Lie entre  $\mathfrak{g}$  et  $G$ ! Il est tout à fait remarquable que la représentation adjointe  $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  joue un rôle clé aussi bien dans la formule de Baker-Campbell-Hausdorff, que dans la théorie abstraite des algèbres de Lie.

La formule de Baker-Campbell-Hausdorff implique en particulier le fait que la loi d'algèbre de Lie détermine la loi de groupe de Lie localement. Un argument similaire à celui de la deuxième partie de la preuve de la proposition 4.36 implique que, si  $G$  est connexe, la loi de groupe est alors uniquement déterminée globalement.

*Correspondance entre groupes de Lie et algèbres de Lie.* Nous avons à disposition les outils nécessaires pour montrer qu'un morphisme de groupes de Lie induit un morphisme d'algèbres de Lie.

**Proposition 4.38.** *Soit  $f : G \rightarrow H$  un morphisme de groupes de Lie. Alors*

$$\tilde{f} := df(e) : \text{Lie}(G) \rightarrow \text{Lie}(H)$$

*est un morphisme d'algèbres de Lie, c'est-à-dire*

$$\tilde{f}[X, Y] = [\tilde{f}X, \tilde{f}Y], \quad X, Y \in \text{Lie}(G).$$

*Démonstration.* Nous utilisons la formule de la proposition 4.34 afin d'obtenir

$$\begin{aligned}
\tilde{f}[X, Y] &= df(e) \cdot \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \exp(tX) \exp(sY) \exp(-tX) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} f(\exp(tX) \exp(sY) \exp(-tX)) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} f(\exp(tX)) f(\exp(sY)) f(\exp(-tX)) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \exp(t\tilde{X}) \exp(s\tilde{Y}) \exp(-t\tilde{X}) \\
&= [\tilde{f}X, \tilde{f}Y].
\end{aligned}$$

Dans la troisième égalité nous utilisons le fait que  $f$  est un morphisme de groupes, et dans la quatrième égalité nous utilisons l'identité

$$f(\exp(tX)) = \exp(t\tilde{f}X).$$

Cette dernière découle de l'unicité du groupe à un paramètre tangent à  $\tilde{f}X = df(e) \cdot X$ .  $\square$

La réciproque de cette proposition est aussi vraie : étant donné un morphisme d'algèbres de Lie  $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ , il existe un unique morphisme de groupes de Lie  $G \rightarrow H$  défini localement au voisinage de  $e \in G$  qui l'induit. C'est le "*deuxième théorème de Lie*", qui est une conséquence directe de la formule de Baker-Campbell-Hausdorff. De plus, si  $G$  est connexe et simplement connexe alors le morphisme en question peut être défini sur  $G$  tout entier !

Le "*troisième théorème de Lie*" affirme que toute algèbre de Lie de dimension finie est l'algèbre de Lie d'un "germe en l'identité d'un groupe de Lie", qui s'étend de surcroît en un unique groupe de Lie connexe et simplement connexe. L'ingrédient essentiel de cette correspondance est à nouveau la formule de Baker-Campbell-Hausdorff, à laquelle se rajoute le théorème de Ado, qui affirme que toute algèbre de Lie de dimension finie se réalise comme sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{gl}_n$  pour un certain  $n \gg 1$ . Pour ce dernier théorème on renvoie au livre de James E. Humphreys intitulé *Introduction to Lie algebras and representation theory*, GTM 9, Springer, 1978, qui est l'une des références classiques pour la théorie des algèbres de Lie.

De manière condensée on peut exprimer le troisième théorème de Lie comme établissant une équivalence de catégories entre :

- la catégorie des algèbres de Lie de dimension finie,
- la catégorie des "germes en l'identité de groupes de Lie", et
- la catégorie des groupes de Lie connexes et simplement connexes.

Dans tous les cas, le message clé de la théorie des groupes de Lie est le suivant :

*La structure (non-linéaire) d'un groupe de Lie connexe est contrôlée par la structure (linéaire) de son algèbre de Lie.*

Ou encore :

*La théorie des groupes de Lie connexes et simplement connexes, de nature non-linéaire, est entièrement déterminée par la théorie des algèbres de Lie, de nature linéaire.*

C'est sans doute la première fois que vous rencontrez une manifestation de la démarche générale de "linéarisation" ayant un tel degré de sophistication.

*Théorie des représentations.* L'on rencontre une manifestation tangible de ce principe en théorie des représentations : une *représentation linéaire de groupe de Lie sur un espace vectoriel  $V$* , c'est-à-dire un morphisme de groupes de Lie  $G \rightarrow GL(V)$ , détermine un morphisme d'algèbres de Lie  $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V) = \text{End}(V)$ , que l'on appelle aussi *représentation (linéaire) de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$* . Les représentations des algèbres de Lie, qui sont des objets de nature linéaire, sont plus simples à étudier que les représentations de groupes, qui sont des objets de nature non-linéaire. Dans le cas des groupes connexes et simplement connexes, les deux théories sont équivalentes !

Dans des situations concrètes, ce sont souvent les représentations de groupes qui sont les objets primordiaux d'intérêt puisqu'elles correspondent à des *symétries globales*. (Les représentations d'algèbres de Lie, elles, correspondent à des *symétries infinitésimales*.) À titre d'exemple, lorsqu'une équation différentielle linéaire ou une équation aux dérivées partielles linéaire est invariante sous l'action d'un groupe de Lie, ce même groupe agit sur son espace de solutions (qui est un espace vectoriel), donnant ainsi naissance à une représentation linéaire. Si l'on sait *a priori* comment un groupe donné peut agir, cela permet parfois de résoudre l'équation presque sans faire de calcul ... au prix d'une théorie.

## 5. FORMES DIFFÉRENTIELLES. INTÉGRATION

Les notions que nous avons développées jusqu'à présent (vecteur tangent, champ de vecteurs, courbe intégrale, flot, groupe à un paramètre) étaient toutes des variations sur la notion de *courbe lisse à valeurs dans une variété*. À reparamétrisation à la source près, il s'agit d'applications lisses

$$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M,$$

où  $M$  est une variété.

Les notions que nous allons étudier dans ce chapitre (forme différentielle, variété à bord, intégrale d'une forme différentielle) sont toutes bâties autour de la notion duale de *fonction lisse définie sur une variété*. Il s'agit d'applications lisses

$$f : M \rightarrow \mathbb{R}.$$

## 5.1. Fibré cotangent.

5.1.1. *Motivation.* Le rôle central dans nos constructions sera joué par la différentielle d'une fonction lisse  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ . En chaque point  $p \in M$  celle-ci agit comme

$$df(p) : T_p M \rightarrow T_{f(p)} \mathbb{R} \cong \mathbb{R},$$

de sorte qu'on peut l'identifier canoniquement à un élément du dual

$$T_p^* M := \text{Hom}_{\mathbb{R}}(T_p M, \mathbb{R}).$$

Les différentielles de fonctions lisses sont naturellement des sections lisses d'un fibré vectoriel remarquable, le *fibré cotangent*, que nous définissons maintenant.

5.1.2. *Construction.*

**Définition 5.1.** *Le fibré cotangent d'une variété  $M$ , noté*

$$T^* M,$$

*est le dual du fibré tangent. La fibre en un point  $p \in M$  est l'espace cotangent en  $p$ , noté  $T_p^* M$ , dual de  $T_p M$ . L'on peut écrire*

$$T^* M = \sqcup_{p \in M} T_p^* M.$$

Le fibré cotangent  $T^* M$  possède une structure canonique de fibré vectoriel, définie par dualité à partir de la structure de fibré vectoriel sur  $TM$ . L'existence de cette structure canonique de fibré vectoriel *dual* repose sur le fait suivant d'algèbre linéaire :

(i) À tout espace vectoriel  $E$  de dimension finie l'on peut associer de manière canonique son *espace vectoriel dual*  $E^*$ .

(ii) À toute application linéaire entre espaces vectoriels de dimension finie  $f : E \rightarrow F$  l'on peut associer de manière canonique son *application transposée*

$$f^t : F^* \rightarrow E^*, \quad \alpha \mapsto \alpha \circ f.$$

Ceci est une application linéaire qui agit entre les espaces duaux de  $F$  et  $E$  respectivement. L'on a par ailleurs

$$(g \circ f)^t = f^t \circ g^t.$$

(iii) Pour tous deux espaces vectoriels  $E, F$  de dimension finie, l'application

$$\text{Hom}(E, F) \rightarrow \text{Hom}(F^*, E^*), \quad f \mapsto f^t$$

est un isomorphisme linéaire, donc lisse. En particulier, pour toute application lisse  $\Phi : U \rightarrow \text{Hom}(E, F)$  définie sur une variété, l'application transposée  $\Phi^t : U \rightarrow \text{Hom}(F^*, E^*)$  est lisse.

Notons  $\pi_{TM} : TM \rightarrow M$  et  $\pi_{T^*M} : T^*M \rightarrow M$  les projections canoniques. Étant donné un système de trivialisations locales  $(U_i, \Phi_i)$  sur  $TM$ , avec  $U_i \subseteq M$  ouvert et  $\Phi_i : \pi_{TM}^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{R}^n$  difféomorphisme linéaire dans les fibres, l'on définit

$$\Psi_i : \pi_{T^*M}^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times (\mathbb{R}^n)^* \cong U_i \times \mathbb{R}^n$$

par

$$\Psi_i := (\Phi_i^t)^{-1}.$$

Démontrons qu'il existe une unique structure de fibré vectoriel sur  $T^*M$  telle que les  $(U_i, \Psi_i)$  forment un système de trivialisations locales. Puisque chaque  $\Psi_i$  est une bijection linéaire dans les fibres, elle induit une unique structure différentiable et donc une unique structure de fibré vectoriel sur  $\pi_{T^*M}^{-1}(U_i)$ . Puisque les applications  $\Psi_j \circ \Psi_i^{-1} : (U_i \cap U_j) \times (\mathbb{R}^n)^* \rightarrow (U_i \cap U_j) \times (\mathbb{R}^n)^*$  sont des difféomorphismes linéaires dans les fibres, les structures différentiables et donc les structures de fibré vectoriel sur les  $\pi_{T^*M}^{-1}(U_i)$  sont compatibles sur les intersections, de sorte que  $T^*M$  possède une structure globale de fibré vectoriel.

Pour vérifier que  $\Psi_j \circ \Psi_i^{-1}$  est un difféomorphisme (linéaire dans les fibres), écrivons  $\Phi_j \circ \Phi_i^{-1} : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n \rightarrow (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n$  comme  $\Phi_j \circ \Phi_i^{-1}(p, v) = (p, \Phi_{ji}(p)v)$ , avec

$$\Phi_{ji} : U_i \cap U_j \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$$

des applications lisses. Alors  $\Psi_j \circ \Psi_i^{-1}$  est donné par  $\Psi_j \circ \Psi_i^{-1}(p, \alpha) = (p, \Psi_{ji}(p)\alpha)$ , avec

$$\Psi_{ji} : U_i \cap U_j \rightarrow \text{Aut}((\mathbb{R}^n)^*), \quad \Psi_{ji} = (\Phi_{ji}^t)^{-1}.$$

La lissité des  $\Phi_{ji}$  entraîne celle des  $\Psi_{ji}$  par le point (iii) ci-dessus, de sorte que chaque composition  $\Psi_j \circ \Psi_i^{-1}$  est lisse. Puisque chaque telle composition est une bijection d'inverse  $\Psi_i \circ \Psi_j^{-1}$ , on en déduit que c'est un difféomorphisme.

**Remarque 5.2** (dual d'un fibré vectoriel). *Le lecteur attentif aura remarqué une dissymétrie dans nos définitions de fibré tangent et de fibré cotangent. Nous avons défini  $TM$  de manière explicite en termes d'un atlas sur  $M$ , mais nous avons défini  $T^*M$  de manière moins explicite à partir de  $TM$ . Nous avons adopté ce point de vue puisqu'il est plus conceptuel. Par ailleurs, il est aussi plus général : étant donné un fibré vectoriel  $E$ , l'on peut définir de manière canonique son fibré dual  $E^*$ , ayant comme fibres les duaux des fibres de  $E$ . En effet, il suffit de considérer le fibré dont les fonctions de transition  $\Psi_{ji}$  sont données par les transposées inverses des fonctions de transition  $\Phi_{ji}$  de  $E$ .*

Présentons maintenant la construction explicite de  $T^*M$  à partir d'un atlas sur  $M$ . Chaque carte  $(U, \phi = (x^1, \dots, x^n))$  détermine sur  $U$  un repère  $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n})$  du fibré tangent  $TU = TM|_U$ . La base duale, notée  $(dx^1, \dots, dx^n)$ , est définie par les identités

$$dx^i \cdot \frac{\partial}{\partial x^j} = \delta_j^i, \quad i, j = 1, \dots, n$$

et fournit un repère du fibré cotangent  $T^*M|_U$ . On note la base duale en un point  $p \in U$  par  $(dx^1|_p, \dots, dx^n|_p)$ , ou  $(dx^1(p), \dots, dx^n(p))$ . Toute carte  $(U, \phi)$  détermine ainsi une bijection linéaire dans les fibres

$$U \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\cong} T^*M|_U, \quad (p, (\alpha_1, \dots, \alpha_n)) \mapsto \sum_{i=1}^n \alpha_i dx^i|_p.$$

L'inverse de cette bijection linéaire dans les fibres est par définition la trivialisatation locale de  $T^*M|_U$  déterminée par la carte  $(U, \phi)$ . Elle associe à un covecteur  $\alpha \in T_p^*M$  le tuple  $(p, (\alpha_1, \dots, \alpha_n))$  uniquement déterminé par la condition  $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i dx^i|_p$ .

Rendons explicites les applications de transition. Soient  $(U, \phi = (x^1, \dots, x^n))$  et  $(V, \psi = (y^1, \dots, y^n))$  deux cartes sur  $M$  et  $\Phi, \Psi$  les trivialisatations associées de  $T^*M|_U$ , respectivement  $T^*M|_V$ . Pour calculer  $\Psi \circ \Phi^{-1}$  il nous faut exprimer  $dx^i$  en fonction des  $dy^j$  sur  $U \cap V$ . Un calcul direct montre que

$$dx^i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial y^j} dy^j.$$

En effet

$$dx^i \cdot \frac{\partial}{\partial y^j} = dx^i \cdot \left( \sum_{k=1}^n \frac{\partial x^k}{\partial y^j} \frac{\partial}{\partial x^k} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial x^k}{\partial y^j} \delta_k^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^j}.$$

Ainsi

$$\Psi \circ \Phi^{-1}(p, (\alpha_1, \dots, \alpha_n)) = (p, \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \alpha_i \right)_{j=1, \dots, n}).$$

Notons

$$J_{\psi \circ \phi^{-1}} = \left( \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right)_{i,j}$$

la matrice jacobienne de  $\psi \circ \phi^{-1}$ , avec l'indice  $i$  correspondant aux lignes et l'indice  $j$  correspondant aux colonnes. Bien-sûr, nous avons

$$J_{\psi \circ \phi^{-1}}^{-1} = J_{\phi \circ \psi^{-1}} = \left( \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \right)_{i,j}.$$

L'application de transition  $\Psi \circ \Phi^{-1} : U \cap V \times \mathbb{R}^n \rightarrow U \cap V \times \mathbb{R}^n$  est donc donnée par

$$(p, \alpha) \mapsto (p, (J_{\psi \circ \phi^{-1}}^t)^{-1}(\phi(p)) \cdot \alpha).$$

Par contraste, l'application de transition correspondant aux trivialisations de  $TM|_U, TM|_V$  déterminées par  $\phi$ , respectivement  $\psi$  est donnée par

$$(p, (v^1, \dots, v^n)) \mapsto (p, \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial y^j}{\partial x^i} v^i \right)_{j=1, \dots, n}),$$

ou encore

$$(p, v) \mapsto (p, J_{\psi \circ \phi^{-1}}(\phi(p)) \cdot v).$$

L'on voit apparaître à nouveau la matrice d'une application linéaire dans le cas de  $TM$ , et l'inverse de sa transposée dans le cas de  $T^*M$ , comme dans notre première définition du fibré cotangent.

**5.1.3. Sections.** Par définition, une section de  $T^*M$  est lisse si et seulement si elle correspond à une fonction lisse  $U \rightarrow \mathbb{R}^n$  dans toute trivialisations locale de  $T^*M|_U$ . On déduit le corollaire suivant.

**Corollaire 5.3.** *La différentielle d'une fonction lisse  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  est une section lisse de  $T^*M$ .*

*Démonstration.* Soit  $(U, \phi = (x^1, \dots, x^n))$  une carte locale sur  $M$ . L'identité suivante est alors valable sur  $U$  :

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i.$$

En effet,  $df \cdot \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} \cdot f = \frac{\partial f}{\partial x^i}$ . Il s'ensuit que, dans la trivialisations de  $T^*M|_U$  déterminée par la carte  $(U, \phi)$  la section  $df$  correspond à la fonction  $U \rightarrow \mathbb{R}^n$  donnée par

$$p \mapsto \left( \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) \right)_{i=1, \dots, n}.$$

Cette dernière fonction est lisse puisque chacune de ses composantes est lisse.  $\square$

**Remarque.** Toute carte locale  $\phi = (x^1, \dots, x^n)$  définit  $n$  fonctions lisses  $x^1, \dots, x^n$  sur  $U$ . Puisque

$$\frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta_j^i$$

il s'ensuit que les différentielles  $(dx^1(p), \dots, dx^n(p))$  constituent la base duale de la base  $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n})$ . Ceci justifie la notation que nous avons utilisée d'emblée pour la base duale.

**Exercice 43.** Démontrer l'identité

$$df \cdot X = X(f),$$

pour toute fonction  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  et tout champ de vecteurs  $X$  sur  $M$ .

**Définition 5.4.** Une section lisse de  $T^*M$  est appelée 1-forme différentielle sur  $M$ . On note l'espace vectoriel des 1-formes différentielles par

$$\Omega^1(M) := \Gamma(T^*M).$$

**Définition 5.5.** Une 1-forme différentielle est dite exacte si elle est égale à  $df$  pour une fonction lisse  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ .

Toutes les 1-formes différentielles ne sont pas exactes. Le fait de reconnaître les formes exactes parmi toutes les 1-formes est important. Il met en jeu la notion de différentielle extérieure, la notion d'intégrale, et la notion de groupes de cohomologie de de Rham, que nous allons traiter plus loin.

**5.2. Intégration des 1-formes.** Les 1-formes sont des objets qui associent des scalaires à des vecteurs tangents. En tant que tels, ce sont des objets qui “demandent” à être intégrés le long des courbes. Nous verrons que l’intégrale ne dépend essentiellement pas de la paramétrisation et nous en déduirons une notion d’intégrale de 1-forme le long d’une sous-variété de dimension 1 *orientée*.

**Définition 5.6.** Soit  $M$  une variété et  $\alpha \in \Omega^1(M)$  une 1-forme. Pour toute courbe lisse  $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$  l’on définit l’intégrale de  $\alpha$  le long de  $\gamma$  comme

$$\int_{\gamma} \alpha := \int_I \alpha(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt.$$

Cette définition est à comprendre au sens de l’intégrale de Lebesgue. Lorsque l’intervalle de définition  $I$  est compact le membre de droite de l’égalité précédente est toujours défini. Lorsque l’intervalle de définition  $I$  n’est pas compact et que le membre de droite n’est pas défini, le lecteur doit sous-entendre que l’intégrale  $\int_{\gamma} \alpha$  n’est pas définie. Nous passerons sous silence ce genre de distinction par la suite et supposerons de manière implicite que toutes les intégrales sont définies.

Le point clé de cette définition est le suivant.

**Proposition 5.7.** Avec les notations de la définition 5.6, soit  $\varphi : J \rightarrow I$  un difféomorphisme croissant et posons

$$\tilde{\gamma} := \gamma \circ \varphi.$$

Alors

$$\int_{\tilde{\gamma}} \alpha = \int_{\gamma} \alpha.$$

*Démonstration.* La proposition est une conséquence de la définition et de la formule de changement de variable dans l’intégrale de Lebesgue. En effet

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\gamma}} \alpha &= \int_J \alpha(\gamma(\varphi(s))) \cdot \dot{\tilde{\gamma}}(s) ds \\ &= \int_J (\alpha(\gamma(\varphi(s))) \cdot \dot{\gamma}(\varphi(s))) \varphi'(s) ds \\ &= \int_I \alpha(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt \\ &= \int_{\gamma} \alpha. \end{aligned}$$

Nous avons utilisé dans la deuxième égalité l’identité

$$\dot{\tilde{\gamma}}(\varphi(s)) = \dot{\gamma}(\varphi(s))\varphi'(s),$$

qui est une conséquence de la règle de dérivation des fonctions composées. La troisième égalité est une conséquence du théorème de changement de variable appliqué à la fonction  $t \mapsto \alpha(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)$ .  $\square$

**Exercice 44.** Avec les notations de la définition 5.6, soit  $\varphi : J \rightarrow I$  un difféomorphisme *décroissant* et  $\tilde{\gamma} := \gamma \circ \varphi$ . Montrer que

$$\int_{\tilde{\gamma}} \alpha = - \int_{\gamma} \alpha.$$

Le fait que l'intégrale d'une 1-forme sur une courbe paramétrée soit indépendante de la paramétrisation au signe près nous amène naturellement à définir l'intégrale d'une 1-forme sur une sous-variété de dimension 1 *orientée*. La notion d'orientation, qui formalise en dimension 1 la notion de "sens de parcours", sert à lever l'ambiguïté de signe.

**Définition 5.8.** Soit  $C$  une variété de dimension 1. La donnée d'une orientation de  $C$  consiste à choisir en chaque point  $p \in C$  l'une des deux composantes connexes de  $T_p C \setminus \{0\}$ , composante que l'on note  $T_p^+ C$ , de manière à ce que la condition de continuité suivante soit satisfaite : pour toute carte locale  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$  définie sur un ouvert connexe  $U \subseteq C$ , l'on a

$$\forall p \in U, \quad d\phi(p) \cdot T_p^+ C = ]0, \infty[$$

(l'on parle de carte qui préserve l'orientation), ou

$$\forall p \in U, \quad d\phi(p) \cdot T_p^+ C = ]-\infty, 0[$$

(l'on parle de carte qui renverse l'orientation). Ici l'on regarde  $d\phi(p) : T_p C \rightarrow T_{\phi(p)} \mathbb{R}$  comme une application linéaire à valeurs dans  $\mathbb{R}$  via l'identification  $T_{\phi(p)} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ . L'on note  $T_p^- C := (T_p C \setminus \{0\}) \setminus T_p^+ C$ .

Le fait de se donner une orientation de  $C$  définit un "sens de parcours positif" sur  $C$  au sens suivant : nous pouvons parler de paramétrisation locale *directe*, ou *positive*. Il s'agit de difféomorphismes sur image  $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow C$  tels que  $\dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)}^+ C$  pour tout  $t \in I$ . À l'inverse, une paramétrisation locale  $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow C$  est dite *indirecte*, ou *négative* si  $\dot{\gamma}(t) \in T_{\gamma(t)}^- C$  pour tout  $t \in I$ . Deux paramétrisations locales diffèrent localement par un difféomorphisme d'intervalles de  $\mathbb{R}$ . Elles sont toutes les deux directes si et seulement si le difféomorphisme en question est croissant. Le fait de composer par un difféomorphisme décroissant transforme une paramétrisation directe en paramétrisation indirecte, et vice-versa.

**Proposition-Définition 5.9.** Soit  $M$  une variété,  $\alpha \in \Omega^1(M)$  une 1-forme et  $C \subset M$  une sous-variété de dimension 1 orientée difféomorphe à une union disjointe finie de cercles  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ . Soient  $\gamma_i : I_i \subseteq \mathbb{R} \rightarrow C$ ,  $i = 1, \dots, k$  des paramétrisations directes définies sur des intervalles de  $\mathbb{R}$ , telles que leurs images  $U_i := \gamma_i(I_i)$  soient deux-à-deux disjointes

et telles que  $C \setminus \cup_i U_i$  consiste en un nombre fini de points. Le nombre réel

$$\int_C \alpha := \sum_{i=1}^k \int_{\gamma_i} \alpha$$

est indépendant des choix. On l'appelle intégrale de  $\alpha$  le long de  $C$ .

*Démonstration.* Le réel en question ne dépend que de la collection  $\{U_i\}$ , ou encore de façon équivalente de l'ensemble discret  $\mathcal{P} := C \setminus \cup_i U_i$ . Ceci découle de la proposition 5.7 en utilisant le fait que deux paramétrisations directes d'un  $U_i$  diffèrent par un difféomorphisme croissant. Notons  $r_{\mathcal{P}}$  le réel associé à une collection  $\mathcal{P}$  de points.

Le réel  $r_{\mathcal{P}}$  est invariant par "fragmentation" : si  $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$  alors  $r_{\mathcal{P}} = r_{\mathcal{Q}}$ . Ceci découle de ce que l'intégrale de Lebesgue d'une fonction sur un intervalle est égale à l'intégrale de cette même fonction sur le même intervalle privé d'un nombre fini de points.

Finalement, étant données deux collections quelconques de points  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}'$  l'on a

$$r_{\mathcal{P}} = r_{\mathcal{P} \cup \mathcal{P}'} = r_{\mathcal{P}'}. \quad \square$$

Ceci achève la preuve de l'invariance. □

**Exemple 5.10.** Soit

$$\alpha = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}).$$

Soit  $C_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} : x^2 + y^2 = R^2\}$ ,  $R > 0$  le cercle de rayon  $R > 0$  orienté dans le sens trigonométrique. Ceci signifie que

$$T_{(x,y)}^+ C_R = \mathbb{R}^+ \cdot (-y, x) \subset T_{(x,y)} C = (x, y)^\perp.$$

Nous avons

$$\int_{C_R} \alpha = 2\pi, \quad \forall R > 0.$$

En effet, soit  $\gamma : ]0, 2\pi[ \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ,  $\gamma(t) = (R \cos t, R \sin t)$  une paramétrisation de  $C_R \setminus \{(R, 0)\}$ , de sorte que  $\dot{\gamma}(t) = (-R \sin t, R \cos t)$ . Nous avons par définition

$$\begin{aligned} \int_{C_R} \alpha &= \int_{\gamma} \alpha \\ &= \int_0^{2\pi} \left( -\frac{R \sin t}{R^2} dx + \frac{R \cos t}{R^2} dy \right) \cdot \left( -R \sin t \frac{\partial}{\partial x} + R \cos t \frac{\partial}{\partial y} \right) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t}{R^2} dt \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

**Remarque.** Vous avez déjà rencontré l'intégrale des 1-formes à au moins deux reprises :

(i) *La formule de Green-Riemann.* Étant donnée une 1-forme  $\alpha = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$  définie au voisinage d'un domaine à bord lisse  $D \subset \mathbb{R}^2$ , l'on a l'égalité

$$\iint_D \left( -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx dy = \int_{\partial D} P dx + Q dy.$$

Le membre de gauche dans cette égalité est une intégrale de Lebesgue double, alors que le membre de droite est l'intégrale de la 1-forme  $\alpha$  sur la sous-variété  $\partial D$  donnée par le "bord" de  $D$ , orienté par la "règle de la main gauche" : lorsque l'on parcourt  $\partial D$  dans le sens positif, le domaine  $D$  reste du "côté gauche". Nous allons revenir sur cette règle d'orientation du bord d'un domaine, ainsi que sur la définition d'un domaine à bord lisse, lorsque nous discuterons la formule de Stokes.

(ii) *L'intégrale de Cauchy.* Soit  $f$  une fonction holomorphe définie au voisinage d'une courbe fermée simple orientée  $C \subset \mathbb{C}$ . L'intégrale de Cauchy

$$\int_C f(z) dz \in \mathbb{C}$$

est un nombre complexe dont la partie réelle et la partie imaginaire sont définies par des intégrales sur  $C$  de 1-formes comme suit. Écrivons

$$f(z) = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f.$$

Écrivons formellement  $z = x + iy$ ,  $dz = dx + idy$ , et

$$\begin{aligned} f(z)dz &= (\operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f)(dx + idy) \\ &= (\operatorname{Re} f dx - \operatorname{Im} f dy) + i(\operatorname{Im} f dx + \operatorname{Re} f dy). \end{aligned}$$

L'on définit

$$\int_C f(z) dz := \int_C \operatorname{Re} f dx - \operatorname{Im} f dy + i \int_C \operatorname{Im} f dx + \operatorname{Re} f dy.$$

La manière la plus naturelle d'interpréter la définition est de regarder  $f(z)dz$  comme une 1-forme à *valeurs complexes*, mais nous n'allons pas développer ce point de vue.

### 5.3. Formes différentielles de degré supérieur.

La propriété centrale des 1-formes différentielles est de pouvoir être intégrées sur des sous-variétés orientées de dimension 1. Nous nous proposons maintenant de dégager la définition d'objets qui puissent être intégrés sur des sous-variétés orientées de dimension  $k \geq 1$  arbitraire. Ce seront les *k-formes différentielles*.

La définition de l'intégrale d'une 1-forme sur une sous-variété orientée repose sur l'indépendance par rapport au choix de paramétrisation (Proposition 5.7). Celle-ci repose à son tour sur la formule de changement de variable dans l'intégrale de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$ . De manière similaire, la définition des *k-formes* est *impliquée* par la formule de changement de variable dans l'intégrale de Lebesgue multi-dimensionnelle.

#### 5.3.1. Changement de variable dans l'intégrale de Lebesgue.

**Théorème 5.11** (Formule de changement de variable dans l'intégrale de Lebesgue). *Soit  $\varphi : \Omega \rightarrow \Omega'$  un difféomorphisme entre des ouverts de  $\mathbb{R}^n$  et  $f : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction mesurable. Notons  $J_\varphi : \Omega \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$  la matrice jacobienne de  $\varphi$ . La fonction  $f$  est intégrable sur  $\Omega'$  si et seulement si la fonction  $f \circ \varphi \cdot |\det J_\varphi|$  est intégrable sur  $\Omega$ . Dans ce cas nous avons l'égalité*

$$\int_{\Omega'} f = \int_{\Omega} f \circ \varphi \cdot |\det J_\varphi|.$$

□

Dans l'énoncé du théorème on sous-entend que l'on utilise la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^n$ , respectivement sur  $\Omega$  et  $\Omega'$ . Le lecteur pourra trouver une preuve de ce théorème au 8.26 du livre de W. Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill, New York, 1970. Une manière de le lire est la suivante : étant donné un difféomorphisme  $\varphi : \Omega \rightarrow \Omega'$  entre ouverts de  $\mathbb{R}^n$ , l'on définit une mesure sur  $\Omega$  en "tirant en arrière" la mesure de Lebesgue  $m$  sur  $\Omega'$ , i.e.

$$(\varphi^*m)(E) := ((\varphi^{-1})_*m)(E) = m(\varphi(E)).$$

Dans cette définition nous utilisons le fait que  $\varphi$  est bijective avec inverse mesurable. Nous avons alors directement l'égalité

$$\int_{\Omega'} f dm = \int_{\Omega} f \circ \varphi d\varphi^*m.$$

La formule de changement de variable découle de ce que la mesure  $\varphi^*m$  est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, avec densité donnée par  $|\det J_\varphi|$ . Plus précisément, l'on a

$$(5.1) \quad (\varphi^*m)(E) = \int_E |\det J_\varphi| dm$$

pour tout ensemble mesurable  $E \subseteq \Omega$  (W. Rudin, op. cit., 8.26(d)).

La formule (5.1) est expliquée géométriquement par le lemme suivant. L'on rappelle qu'un *parallépipède*, ou *parallépipède vectoriel*  $P = P(v_1, \dots, v_n) \subset \mathbb{R}^n$  est par définition l'enveloppe convexe de l'ensemble  $\{0, v_1, \dots, v_n\}$ ,  $v_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Un *parallépipède affine* est un ensemble de la forme  $x + P$ , avec  $P$  un parallépipède vectoriel.

**Lemme 5.12** (mesure des parallépipèdes). *Soit  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une transformation linéaire et  $P \subset \mathbb{R}^n$  un parallépipède. Alors*

$$m(A \cdot P) = |\det A| m(P).$$

□

Le lecteur pourra trouver une preuve de ce lemme dans W. Rudin, op. cit., 8.28. La formule (5.1) peut alors être comprise comme suit : l'image par  $\varphi$  d'un petit parallépipède affine  $x + P$  centré en un point  $x \in \Omega$  est approximée au premier ordre par le parallépipède affine  $\varphi(x) + d\varphi(x) \cdot P$ , de sorte que la mesure  $m(\varphi(x + P))$  de l'image est approximée au premier ordre par  $m(d\varphi(x) \cdot P) = |\det J_\varphi| m(P)$ . La formule (5.1) est la version intégrale de ce phénomène "ponctuel".

5.3.2. *La définition des  $k$ -formes différentielles est déterminée par la formule de changement de variable.* Par analogie avec les 1-formes, nous souhaitons qu'une  $k$ -forme différentielle  $\omega$ , en tant qu'objet que l'on peut intégrer sur une sous-variété de dimension  $k$ , vérifie les propriétés suivantes :

- (1)  $\omega$  est définie ponctuellement en chaque  $p \in M$  ;
- (2) pour toute sous-variété  $Q^k \subset M^n$  de dimension  $k$ ,  $\omega_p$  associe un réel à chaque  $k$ -tuple  $(v_1, \dots, v_k)$  de vecteurs de  $T_p Q$ . En particulier,  $\omega_p$  associe un réel à tout parallépipède  $P(v_1, \dots, v_k) \subset T_p Q$  ;
- (3)  $\omega_p(A \cdot P) = (\det A) \omega_p(P)$  pour tout parallépipède  $P \subset T_p Q$  et tout endomorphisme  $A \in \text{End}(T_p Q)$ .

Les deux premières conditions reflètent le caractère infinitésimal de l'objet que nous recherchons. La troisième condition est imposée si l'on souhaite que la notion d'intégrale qui en résulte soit indépendante de la paramétrisation.

En effet, supposons que l'on ait défini un tel objet. Étant donnée une paramétrisation locale  $g : \Omega' \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow Q$  de la sous-variété  $Q^k \subset M^n$ , posons

$$\int_g \omega := \int_{\Omega'} \omega_{g(x)}(dg(x) \cdot e_1, \dots, dg(x) \cdot e_k) dx.$$

Pour tout difféomorphisme  $\varphi : \Omega \rightarrow \Omega'$  tel que  $\det J_\varphi > 0$  l'on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{g \circ \varphi} \omega &= \int_{\Omega} \omega_{g \circ \varphi(y)}(d(g \circ \varphi)(y) \cdot e_1, \dots, d(g \circ \varphi)(y) \cdot e_k) dy \\
&= \int_{\Omega} \omega_{g(\varphi(y))}(dg(\varphi(y))d\varphi(y) \cdot e_1, \dots, dg(\varphi(y))d\varphi(y) \cdot e_k) dy \\
&= \int_{\Omega} \omega_{g(\varphi(y))}(dg(\varphi(y))d\varphi(y)dg(\varphi(y))^{-1}dg(\varphi(y)) \cdot e_1, \dots, \\
&\quad dg(\varphi(y))d\varphi(y)dg(\varphi(y))^{-1}dg(\varphi(y)) \cdot e_k) dy \\
&= \int_{\Omega} (\det dg(\varphi(y))d\varphi(y)dg(\varphi(y))^{-1})\omega_{g(\varphi(y))}(dg(\varphi(y)) \cdot e_1, \dots, \\
&\quad dg(\varphi(y)) \cdot e_k) dy \\
&= \int_{\Omega} \det d\varphi(y) \omega_{g(\varphi(y))}(dg(\varphi(y)) \cdot e_1, \dots, dg(\varphi(y)) \cdot e_k) dy \\
&= \int_{\Omega} \det J_\varphi(y) \omega_{g(\varphi(y))}(dg(\varphi(y)) \cdot e_1, \dots, dg(\varphi(y)) \cdot e_k) dy \\
&= \int_{\Omega'} \omega_{g(x)}(dg(x) \cdot e_1, \dots, dg(x) \cdot e_k) dx \\
&= \int_g \omega.
\end{aligned}$$

L'on voit que la définition de l'intégrale  $\int_g \omega$  est rendue possible par les propriétés (1) et (2) ci-dessus, alors que l'invariance par rapport aux changements de paramétrisation  $\varphi$  tels que  $\det J_\varphi > 0$  est assurée par la condition (3). Celle-ci fait que l'on peut appliquer le théorème de changement de variable dans l'avant-dernière égalité ci-dessus. (Note : si  $\varphi$  était un difféomorphisme tel que  $\det J_\varphi < 0$  on aurait obtenu  $\int_{g \circ \varphi} \omega = -\int_g \omega$ , tout comme dans le cas des 1-formes.)

Reformulons les conditions (2) et (3) ci-dessus. En notant  $V = T_p M$ , nous cherchons une application

$$\omega : \underbrace{V \times V \times \dots \times V}_{k \text{ fois}} \rightarrow \mathbb{R}$$

telle que, pour tout sous-espace  $W \subset V$  de dimension  $k$ , tout choix de vecteurs  $v_1, \dots, v_k \in W$ , et tout endomorphisme  $A \in \text{End}(W)$ , l'on ait

$$\omega(Av_1, \dots, Av_k) = (\det A)\omega(v_1, \dots, v_k).$$

Si l'on impose la condition supplémentaire que  $\omega$  soit une application  $k$ -multilinéaire, i.e. linéaire en chacune de ses  $k$  variables, la proposition qui suit montre que ce problème admet une solution simple : les applications  $k$ -multilinéaires alternées.

**Remarque 5.13.** *L'hypothèse de multilinéarité est naturelle pour un objet qui agit sur les éléments d'un espace vectoriel. Néanmoins, elle*

n'est impliquée par la condition (DET) que si  $k = n$ . Voir aussi les exercices 45 et 51 plus bas.

**Proposition 5.14.** Soit  $V$  un espace vectoriel réel et  $\omega : V^{\times k} \rightarrow \mathbb{R}$  une application  $k$ -multilinéaire. Alors  $\omega$  vérifie la condition

(DET) pour tout sous-espace  $W \subset V$  de dimension  $k$ , tout choix de vecteurs  $v_1, \dots, v_k \in W$ , et tout endomorphisme  $A \in \text{End}(W)$ , l'on a

$$\omega(Av_1, \dots, Av_k) = (\det A)\omega(v_1, \dots, v_k),$$

si et seulement si  $\omega$  est alternée, i.e.

$$(5.2) \quad \omega(\dots, v_i, \dots, v_j, \dots) = -\omega(\dots, v_j, \dots, v_i, \dots), \quad i \neq j.$$

*Démonstration.* Supposons que la condition (DET) est vérifiée et montrons que l'application  $\omega$  est  $k$ -multilinéaire alternée. Nous remarquons d'abord que la condition (DET) implique le fait que  $\omega(v_1, \dots, v_k) = 0$  dès que la famille de vecteurs  $\{v_1, \dots, v_k\}$  est liée. En effet, une telle famille peut être écrite comme image d'une famille libre de rang  $k$ , engendrant un sous-espace  $W$  de dimension  $k$ , par un endomorphisme de  $W$  qui est non-injectif, donc de déterminant nul. En particulier l'équation (5.2) est satisfaite pour une famille  $\{v_1, \dots, v_k\}$  liée. Supposons maintenant que la famille  $\{v_1, \dots, v_k\}$  est libre. Posons  $W := \text{Vect}\langle v_1, \dots, v_k \rangle$  et considérons l'automorphisme de  $W$  qui échange  $v_i$  avec  $v_j$  et fixe les  $v_\ell$ ,  $\ell \neq i, j$ . Alors  $\det A = -1$  et l'on obtient

$$\begin{aligned} \omega(\dots, v_j, \dots, v_i, \dots) &= \omega(\dots, Av_i, \dots, Av_j, \dots) \\ &= -\omega(\dots, v_i, \dots, v_j, \dots). \end{aligned}$$

Réciproquement, supposons que  $\omega$  est alternée. Montrons à nouveau, pour commencer, que  $\omega$  s'annule sur une famille  $\{v_1, \dots, v_k\}$  qui est liée. En effet, si les  $v_1, \dots, v_k$  sont linéairement dépendants, le scalaire  $\omega(v_1, \dots, v_k)$  s'écrit par multilinéarité comme une combinaison linéaire de termes de la forme  $\omega(w_1, \dots, w_k)$  tels que au moins deux parmi les  $w_i$ ,  $i = 1, \dots, k$  sont égaux. La condition (5.2) implique alors que chaque tel terme est nul, donc  $\omega(v_1, \dots, v_k) = 0$ .

Montrons maintenant que la condition (DET) est vérifiée. Soit  $W \subset V$  un sous-espace de dimension  $k$  et  $A \in \text{End}(W)$  quelconque. Choisissons des vecteurs  $v_1, \dots, v_k \in W$ . S'ils sont liés, il en est de même des vecteurs  $Av_1, \dots, Av_k$  et donc

$$\omega(Av_1, \dots, Av_k) = 0 = (\det A)\omega(v_1, \dots, v_k).$$

Supposons maintenant que les vecteurs  $v_1, \dots, v_k$  sont linéairement indépendants, de sorte qu'ils forment une base de  $W$ . Écrivons  $A$  dans cette base sous la forme  $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,k}$ , avec

$$Av_i = \sum_j a_{ji} v_j.$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned}
\omega(Av_1, \dots, Av_k) &= \omega\left(\sum_j a_{j1}v_j, \dots, \sum_j a_{jk}v_j\right) \\
&= \sum_{j_1, \dots, j_k} a_{j_1 1} \dots a_{j_k k} \omega(v_{j_1}, \dots, v_{j_k}) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(k)k} \omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(k)k} \epsilon(\sigma) \omega(v_1, \dots, v_k) \\
&= (\det A) \omega(v_1, \dots, v_k).
\end{aligned}$$

Ici  $\mathfrak{S}_k$  désigne le groupe des permutations de l'ensemble  $\{1, \dots, k\}$ , et  $\epsilon(\sigma)$ ,  $\sigma \in \mathfrak{S}_k$  désigne la signature d'une permutation. La deuxième égalité est une conséquence de la multilinéarité de  $\omega$ . La troisième égalité est une conséquence du fait que  $\omega(w_1, \dots, w_k) = 0$  dès que au moins deux des  $w_i$ ,  $i = 1, \dots, k$  sont égaux (cf. (5.2)). La quatrième égalité est une conséquence du fait que toute permutation est un produit de transpositions, et  $\omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = -\omega(v_1, \dots, v_k)$  lorsque  $\sigma$  est une transposition (formulation équivalente de (5.2)).  $\square$

**Exercice 45.** Soit  $V$  un espace vectoriel réel et  $\omega : V^{\times k} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction qui vérifie la condition (DET) de la proposition 5.14. Montrer que la restriction de  $\omega$  à tout sous-espace de dimension  $\leq k$  dans  $V$  est multilinéaire.

5.3.3. *Définition des  $k$ -formes différentielles.* Nous sommes maintenant prêts à donner la définition des  $k$ -formes différentielles. Étant donné un espace vectoriel réel  $V$  l'on note

$$A_k(V)$$

l'espace vectoriel des  $k$ -formes sur  $V$ , dont les éléments sont les applications  $k$ -multilinéaires alternées  $\omega : V^{\times k} \rightarrow \mathbb{R}$ , i.e. vérifiant la condition (5.2)

$$\omega(\dots, v_i, \dots, v_j, \dots) = -\omega(\dots, v_j, \dots, v_i, \dots), \quad i \neq j.$$

Si  $V$  est de dimension finie alors  $A_k(V)$  est aussi de dimension finie, puisque c'est un sous-espace vectoriel de l'espace des applications  $k$ -multilinéaires  $V^{\times k} \rightarrow \mathbb{R}$  qui, lui, est de dimension  $k \dim V$ . Notons par ailleurs l'égalité

$$A_1(V) = V^*.$$

**Définition 5.15.** Une  $k$ -forme différentielle sur une variété  $M$  est une famille

$$\omega_p \in A_k(T_p M), \quad p \in M.$$

Comme d'habitude dans ce cours, nous nous intéressons aux familles lisses. La démarche à suivre pour donner un sens à cette notion devrait déjà vous être familière : nous allons définir un fibré vectoriel

$$A_k(TM) \rightarrow M,$$

appelé *fibré des  $k$ -formes sur  $M$* , dont la fibre en  $p \in M$  est l'espace vectoriel  $A_k(T_p M)$ . Les  $k$ -formes différentielles lisses seront par définition les sections lisses de ce fibré.

Le fibré  $A_k(TM)$  est canoniquement déterminé par le fibré  $TM$ . Comme dans le cas du cotangent, la construction repose sur le fait suivant d'algèbre linéaire :

(i) À tout espace vectoriel  $E$  de dimension finie l'on associe de manière canonique l'espace  $A_k(E)$  des  $k$ -formes sur  $E$ .

(ii) À toute application linéaire entre espaces vectoriels de dimension finie  $f : E \rightarrow F$  l'on associe de manière canonique l'application "*tiré-en-arrière*"

$$f^* : A_k(F) \rightarrow A_k(E), \quad \omega \mapsto \omega \circ f^{\times k}.$$

De manière explicite

$$(f^* \omega)(v_1, \dots, v_k) = \omega(f(v_1), \dots, f(v_k)).$$

L'on a de manière évidente

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*.$$

(iii) Pour tous deux espaces vectoriels  $E, F$  de dimension finie, l'application

$$\text{Hom}(E, F) \rightarrow \text{Hom}(A_k(F), A_k(E)), \quad f \mapsto f^*$$

est lisse. En particulier, si  $\Phi : U \rightarrow \text{Hom}(E, F)$  est une application lisse définie sur une variété  $U$ , alors  $\Phi^* : U \rightarrow \text{Hom}(A_k(F), A_k(E))$  est lisse.

**Remarque.** La seule affirmation qui nécessite une explication est la lissité de l'application  $f \mapsto f^*$ . Nous pouvons la comprendre de manière intrinsèque, sans faire appel à un choix de bases, en utilisant la notion de produit tensoriel que nous allons discuter plus tard. L'on voit alors que  $f \mapsto f^*$  est une application polynomiale, donc lisse. De manière alternative, la lissité peut être comprise explicitement en choisissant des bases appropriées.

Définissons maintenant la structure de fibré vectoriel sur  $A_k(TM)$ . Notons  $\pi_{TM} : TM \rightarrow M$  et  $\pi_{A_k(TM)} : A_k(TM) \rightarrow M$  les projections canoniques. Étant donné un système de trivialisations locales  $(U_i, \Phi_i)$  sur  $TM$ , avec  $U_i \subseteq M$  ouvert et  $\Phi_i : \pi_{TM}^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{R}^n$  difféomorphisme linéaire dans les fibres, l'on définit

$$\Psi_i : \pi_{A_k(TM)}^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times A_k(\mathbb{R}^n)$$

par

$$\Psi_i := (\Phi_i^*)^{-1}.$$

Le même raisonnement que dans le cas de  $T^*M$  montre que  $A_k(TM)$  possède une unique structure de fibré vectoriel tel que les  $\Psi_i$  soient des trivialisations locales.

Le lecteur pourrait objecter que les trivialisations locales  $\Psi_i$  définies ci-dessus prennent valeurs dans  $A_k(\mathbb{R}^n)$  plutôt que dans un  $\mathbb{R}^N$  approprié. La différence n'est évidemment que de nature cosmétique et il est beaucoup plus naturel dans ce contexte d'utiliser  $A_k(\mathbb{R}^n)$  comme "fibre modèle".

Calculons maintenant la dimension de  $A_k(\mathbb{R}^n)$ . Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  et  $(dx^1, \dots, dx^n)$  la base duale canonique de  $(\mathbb{R}^n)^*$ . Pour tout multi-indice ordonné

$$I = (i_1, \dots, i_k), \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$$

nous définissons un élément

$$dx^I \in A_k(\mathbb{R}^n)$$

par

$$dx^I(v_1, \dots, v_k) := \det(v_\ell^{i_j})_{j,\ell=1,\dots,k} = \det \begin{pmatrix} v_1^{i_1} & & v_k^{i_1} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ v_1^{i_k} & & v_k^{i_k} \end{pmatrix}.$$

C'est le déterminant de la matrice carrée  $k \times k$  dont la colonne  $\ell$  est constituée des coordonnées  $(i_1, \dots, i_k)$  de  $v_\ell$  dans la base  $(e_1, \dots, e_n)$ .

**Lemme 5.16.** *L'espace  $A_k(\mathbb{R}^n)$  est réduit à zéro si  $k > n$ .*

*Pour  $1 \leq k \leq n$  la famille*

$$\{dx^I : I \text{ multi-indice ordonné}\}$$

*est une base de  $A_k(\mathbb{R}^n)$ . En particulier*

$$\dim A_k(\mathbb{R}^n) = \binom{n}{k}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

*Démonstration.* Soit  $k > n$ , de sorte que toute collection de  $k$  vecteurs dans  $\mathbb{R}^n$  est nécessairement liée. Nous avons déjà vu qu'une forme multilinéaire alternée s'annule sur un système de vecteurs linéairement dépendants, ce qui entraîne que tout élément de  $A_k(\mathbb{R}^n)$ ,  $k > n$  est nul.

Soit maintenant  $0 \leq k \leq n$ . Par convention  $A_0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$  et l'on suppose donc  $1 \leq k \leq n$ . Pour tout choix de multi-indices ordonnés  $I, J$  l'on vérifie directement que l'on a

$$dx^I(e_J) = \delta_J^I, \quad e_J := (e_{j_1}, \dots, e_{j_k}).$$

Ceci montre que les  $dx^I$  sont linéairement indépendants dans  $A_k(\mathbb{R}^n)$ .

Par ailleurs, tout élément  $\omega \in A_k(\mathbb{R}^n)$  s'écrit explicitement comme combinaison linéaire des  $dx^I$  sous la forme

$$\omega = \sum_I \omega(e_I) dx^I.$$

En effet, les membres de gauche et de droite de l'égalité ci-dessus définissent des éléments de  $A_k(\mathbb{R}^n)$  qui coïncident sur les  $e_J$ , avec  $J$  un multi-indice ordonné. Or tout élément de  $A_k(\mathbb{R}^n)$  est déterminé par ses valeurs sur les  $e_J$ .  $\square$

**Exercice 46.** Démontrer l'identité

$$\omega = \sum_I \omega(e_I) dx^I$$

par évaluation directe de  $\omega$  sur des vecteurs  $v_1, \dots, v_k$ .

**Notation.** On note  $\mathcal{I}(k, n)$  l'ensemble des multi-indices ordonnés de longueur  $k$  dont les composantes prennent valeurs dans  $\{1, \dots, n\}$ . C'est un ensemble de cardinal  $\binom{n}{k}$ , totalement ordonné par l'ordre lexicographique, qui peut donc être naturellement mis en bijection avec  $\{1, \dots, \binom{n}{k}\}$ . Il existe donc une identification naturelle, mais inutile, entre  $A_k(\mathbb{R}^n)$  et  $\mathbb{R}^{\binom{n}{k}}$ . Par contre, l'identification naturelle  $A_k(\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{R}^{\mathcal{I}(k, n)}$ , elle, est utile.

Présentons maintenant la construction explicite de  $A_k(TM)$  à partir d'un atlas sur  $M$ . Chaque carte  $(U, \phi = (x^1, \dots, x^n))$  détermine sur  $U$  un repère  $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n})$  du fibré tangent  $TU = TM|_U$ . La base duale  $(dx^1, \dots, dx^n)$  détermine un repère  $(dx^I)_{I \in \mathcal{I}(k, n)}$  du fibré  $A_k(TM)|_U$ . On note la valeur de ce repère en un point  $p \in U$  par  $(dx^I|_p)$ . Toute carte  $(U, \phi)$  détermine ainsi une bijection linéaire dans les fibres

$$U \times \mathbb{R}^{\mathcal{I}(k, n)} \xrightarrow{\cong} A_k(TM)|_U, \quad (p, (\omega_I)_{I \in \mathcal{I}(k, n)}) \mapsto \sum_I \omega_I dx^I|_p.$$

L'inverse de cette bijection linéaire dans les fibres est par définition la trivialisatation locale de  $A_k(TM)|_U$  déterminée par la carte  $(U, \phi)$ . Elle associe à  $\omega_p \in T_p^*M$  le tuple  $(p, (\omega_I))$  uniquement déterminé par la condition  $\omega_p = \sum_I \omega_I dx^I|_p$ .

**Définition 5.17.** Une  $k$ -forme différentielle lisse sur  $M$  est une section lisse de  $A_k(TM)$ .

De manière équivalente, une  $k$ -forme différentielle est lisse si et seulement si elle s'exprime dans toute trivialisatation déterminée par une carte  $(U, \phi = (x^1, \dots, x^n))$  sous la forme

$$\omega|_U = \sum_I \omega_I dx^I,$$

avec  $\omega_I : U \rightarrow \mathbb{R}$  des fonctions lisses sur  $U$ .

**Notation.** On pose

$$\Omega^k(M) := \Gamma(A_k(TM)), \quad k \geq 1.$$

Par construction nous avons  $A_1(TM) = T^*M$ , de sorte que la notation est cohérente avec celle utilisée pour les 1-formes. Nous avons bien évidemment  $\Omega^k(M) = \{0\}$  pour  $k > n$ .

Par convention nous définissons

$$\Omega^0(M) = \mathcal{F}(M) = \Gamma(M \times \mathbb{R} \xrightarrow{\text{pr}_1} M).$$

**Exemple-exercice.** Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension 1. Le lemme 5.16 nous montre que l'espace  $A_n(V)$  des  $n$ -formes sur  $V$  est de dimension 1. Pour tout  $f \in \text{End}(V)$  nous obtenons une application linéaire

$$f^* : A_n(V) \rightarrow A_n(V).$$

Un endomorphisme linéaire d'un espace vectoriel de dimension 1 est nécessairement donné par la multiplication avec un scalaire. Sans surprise, nous avons

$$f^*\omega = (\det f)\omega.$$

Ceci est en fait *la* définition intrinsèque de  $\det f$  ! Nous voyons en particulier sur cet exemple que l'application  $f \mapsto f^*$  mentionnée auparavant est de nature polynomiale.

L'application "tiré-en-arrière" se généralise aux formes différentielles.

**Proposition-Définition 5.18.** *Une application lisse entre variétés  $f : M \rightarrow N$  induit une application  $\mathbb{R}$ -linéaire*

$$f^* : \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M)$$

définie par

$$(f^*\omega)_p(v_1, \dots, v_k) := \omega_{f(p)}(df(p) \cdot v_1, \dots, df(p) \cdot v_k).$$

*Démonstration.* La lissité de  $f^*\omega$  est testée en coordonnées. Soient  $(U, \phi = (x^1, \dots, x^m))$  et  $(V, \psi = (y^1, \dots, y^n))$  des cartes locales sur  $M, N$  au voisinage de  $p$ , respectivement  $f(p)$ . Notons  $f^j := y^j \circ f$  au voisinage de  $p$  et  $\omega_J := \omega(\frac{\partial}{\partial y^J})$  pour  $J \in \mathcal{I}(k, n)$ , avec la notation  $\frac{\partial}{\partial y^J} := (\frac{\partial}{\partial y^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^{j_k}})$ . Nous obtenons pour  $q \in U$  et  $I = (i_1, \dots, i_k) \in$

$\mathcal{I}(k, m) :$

$$\begin{aligned}
(f^*\omega)_q\left(\frac{\partial}{\partial x^I}\right) &= \omega_{f(q)}\left(df(q) \cdot \frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \dots, df(q) \cdot \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}\right) \\
&= \omega_{f(q)}\left(\sum_j \frac{\partial f^j}{\partial x^{i_1}} \Big|_q \frac{\partial}{\partial y^j}, \dots, \sum_j \frac{\partial f^j}{\partial x^{i_k}} \Big|_q \frac{\partial}{\partial y^j}\right) \\
&= \sum_{\substack{j_1, \dots, j_k \\ 2 \text{ à } 2 \text{ distincts}}} \frac{\partial f^{j_1}}{\partial x^{i_1}} \Big|_q \cdots \frac{\partial f^{j_k}}{\partial x^{i_k}} \Big|_q \omega_{f(q)}\left(\frac{\partial}{\partial y^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^{j_k}}\right) \\
&= \sum_{J \in \mathcal{I}(k, n)} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \frac{\partial f^{j_{\sigma(1)}}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial f^{j_{\sigma(k)}}}{\partial x^{i_k}} \epsilon(\sigma) \omega_J \circ f \Big|_q.
\end{aligned}$$

Cette dernière expression définit une fonction lisse du point  $q \in U$ .  $\square$

#### 5.4. Variétés orientées. Intégrale des $k$ -formes différentielles.

La discussion que nous allons mener dans ce paragraphe suit de près celle du paragraphe sur l'intégration des 1-formes. Les différences notables concernent la définition de l'orientabilité en dimension  $> 1$  et la définition de l'intégrale en utilisant une partition de l'unité.

Étant donnée une variété  $M$ , nous appelons *nappe de dimension  $k$  dans  $M$* , ou *nappe  $k$ -dimensionnelle*, une application lisse  $g : \Omega \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow M$ , avec  $\Omega$  ouvert.

**Définition 5.19.** Soit  $M$  une variété et  $\omega \in \Omega^k(M)$  une  $k$ -forme. Pour toute nappe  $k$ -dimensionnelle  $g : \Omega \subseteq \mathbb{R}^k \rightarrow M$  l'on définit l'intégrale de  $\omega$  le long de  $g$  comme

$$\int_g \omega := \int_{\Omega} \omega_{g(x)}(dg(x) \cdot e_1, \dots, dg(x) \cdot e_k) dx.$$

Cette définition peut être reformulée de la manière suivante. L'intégrale  $\int_g \omega$  est définie comme

$$\int_g \omega = \int_{\Omega} g^* \omega,$$

où la dernière quantité doit être comprise comme suit :  $g^* \omega$  est une  $k$ -forme différentielle sur  $\Omega \subset \mathbb{R}^k$  et s'écrit par conséquent de manière unique comme  $g^* \omega|_x = f(x) dx^{(1, \dots, k)}$ , avec

$$f(x) = g^* \omega|_x(e_1, \dots, e_k) = \omega_{g(x)}(dg(x) \cdot e_1, \dots, dg(x) \cdot e_k).$$

L'intégrale  $\int_{\Omega} g^* \omega$  est par définition égale à l'intégrale de Lebesgue  $\int_{\Omega} f dx$ .

**Proposition 5.20.** Avec les notations de la définition 5.19, pour tout difféomorphisme  $\varphi : \Omega' \rightarrow \Omega$  tel que

$$\det J_{\varphi} > 0,$$

nous avons égalité

$$\int_{g \circ \varphi} \omega = \int_g \omega.$$

*Démonstration.* Toute  $k$ -forme  $\eta$  sur  $\Omega$  vérifie l'identité

$$\varphi^* \eta|_y = \det J_{\varphi}(y) \eta|_{\varphi(y)},$$

de sorte que le théorème de changement de variable implique

$$\int_{\Omega'} \varphi^* \eta = \int_{\Omega'} (\det J_{\varphi}) \eta \circ \varphi = \int_{\Omega} \eta.$$

Il s'ensuit que

$$\int_{g \circ \varphi} \omega = \int_{\Omega'} (g \circ \varphi)^* \omega = \int_{\Omega'} \varphi^* g^* \omega = \int_{\Omega} g^* \omega = \int_g \omega.$$

□

**Remarque.** Le lecteur est invité à remarquer la différence suivante entre la preuve ci-dessus et le calcul du début du paragraphe 5.3.2. Dans la preuve ci-dessus nous avons utilisé la propriété (DET) pour le tiré-en-arrière  $g^*\omega$  et l'endomorphisme  $d\varphi(y) \in \text{End}(\mathbb{R}^k)$ , alors que dans le calcul du 5.3.2 nous avons utilisé la propriété (DET) pour  $\omega$  et l'endomorphisme de  $T_pQ$  obtenu en conjuguant  $d\varphi(y)$  par  $dg(\varphi(y))$ . Cette dernière opération faisait sens puisque nous avons supposé que  $g$  était une paramétrisation locale de la sous-variété  $Q$ . La situation considérée dans la proposition ci-dessus est plus générale. Si l'on avait voulu démontrer la proposition précédente dans le contexte du paragraphe 5.3.2, nous aurions dû démontrer d'abord que la condition (DET) est stable par tiré-en-arrière. C'est vrai et facile à prouver, mais cela aurait légèrement détourné la discussion du §5.3.2.

**Remarque 5.21.** Lorsque  $\varphi : \Omega' \rightarrow \Omega$  est un difféomorphisme tel que  $\det J_\varphi < 0$ , nous avons  $\int_{g \circ \varphi} \omega = - \int_g \omega$ .

5.4.1. *Variétés orientées.* Le fait que l'intégrale d'une  $k$ -forme sur une nappe  $k$ -dimensionnelle soit indépendante de la paramétrisation au signe près nous amène à définir l'intégrale d'une  $k$ -forme sur une sous-variété de dimension  $k$  *orientée*. La notion d'orientation généralise la notion de "sens de parcours" sur une courbe. À la différence du cas des courbes, pour lesquelles il existe toujours une orientation, dans le cas des variétés de dimension supérieure l'existence d'une orientation est une propriété : il existe des variétés non-orientables en toute dimension  $k \geq 2$ .

Comme d'habitude, nous commençons par une discussion au niveau linéaire, pour ensuite la mettre "en famille" sur une variété.

(I) ORIENTATION D'UN ESPACE VECTORIEL. Soit  $V$  un espace vectoriel réel de dimension finie. Introduisons la relation d'équivalence suivante sur l'ensemble des bases de  $V$  : deux bases  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$  et  $\mathbf{v}' = (v'_1, \dots, v'_n)$  sont *équivalentes* si et seulement si la matrice de passage de  $\mathbf{v}$  à  $\mathbf{v}'$  est de déterminant positif. En d'autres termes, si l'on peut écrire

$$v_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} v'_j, \quad i = 1, \dots, n$$

avec

$$\det(a_{ij}) > 0.$$

**Définition 5.22.** Soit  $V$  un espace vectoriel réel de dimension finie. Une orientation de  $V$  est une classe d'équivalence de bases de  $V$  pour la relation d'équivalence précédente.

L'on note  $[\mathbf{v}]$ , ou  $[(v_1, \dots, v_n)]$ , l'orientation déterminée par une base  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$ . L'on parle de *choix d'une orientation sur  $V$* , ou du fait d'*orienter  $V$* .

Il existe exactement deux orientations sur  $V$  : deux bases ne sont pas équivalentes si et seulement si le déterminant de la matrice de passage est  $< 0$ . Ces deux orientations sont dites *opposées*.

**Exemple.** Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension 1. Les deux orientations de  $V$  sont les deux demi-droites vectorielles ouvertes dans  $V$ .

**Convention.** Un orientation de l'espace vectoriel nul  $V = \{0\}$  est par convention un signe  $\pm 1$ .

**Exemple.** Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ . Les deux orientations de  $\mathbb{R}^n$  sont  $[(e_1, \dots, e_n)]$  et  $[(e_1, \dots, e_{n-1}, -e_n)]$ .

Soit  $f : V \rightarrow W$  un isomorphisme d'espaces vectoriels de dimension finie. Étant donnée une orientation  $o$  de  $V$ , l'on induit une orientation  $f_*o$  de  $W$  par la formule

$$f_*[(v_1, \dots, v_n)] := [(f(v_1), \dots, f(v_n))].$$

De manière similaire, étant donnée une orientation de  $W$ , l'on induit une orientation  $f^*o$  de  $V$ . Étant donnés deux isomorphismes  $f, g$  nous avons de manière évidente

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*, \quad (g \circ f)^* = f^* \circ g^*.$$

**Lemme 5.23.** Soit  $V$  un espace vectoriel réel de dimension finie  $n$ . Une orientation de  $V$  correspond de manière canonique à une orientation de  $A_n(V)$ .

*Démonstration.* Puisque  $\dim A_n(V) = 1$ , le choix d'une orientation de  $A_n(V)$  équivaut au choix d'un élément non-nul défini à un scalaire positif près. Étant donnée une orientation  $[(v_1, \dots, v_n)]$  de  $V$ , il existe une  $n$ -forme  $\omega \in A_n(V)$  telle que  $\omega(v_1, \dots, v_n) > 0$ , et cette  $n$ -forme est uniquement déterminée à multiplication par un scalaire positif près. Réciproquement, une orientation  $[\omega]$  de  $A_n(V)$  détermine une orientation  $[(v_1, \dots, v_n)]$  de  $V$  par la condition  $\omega(v_1, \dots, v_n) > 0$ .  $\square$

**Exercice 47.** Pour tout  $0 \leq k \leq n$  l'on note

$$G_{\mathbb{R}}^+(k, n)$$

la *grassmannienne des  $k$ -plans orientés dans  $\mathbb{R}^n$* , dont les éléments sont les sous-espaces vectoriels de dimension  $k$  dans  $\mathbb{R}^n$ , munis d'une orientation. Montrer que  $G_{\mathbb{R}}^+(k, n)$  est naturellement un variété et que l'application naturelle  $G_{\mathbb{R}}^+(k, V) \rightarrow G_{\mathbb{R}}^+(k, n)$  qui consiste à ignorer l'orientation est un revêtement double. Détailler le cas particulier  $k = 1$ .

(II) ORIENTATION D'UNE VARIÉTÉ.

**Définition 5.24.** Soit  $M$  une variété. La donnée d'une orientation de  $M$  consiste à choisir en chaque point  $p \in M$  une orientation  $o_p$  de  $T_pM$  de manière à ce que la condition de continuité suivante soit satisfaite :

pour tout point  $p$  il existe une carte locale  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  définie au voisinage de  $p$  telle que les orientations de  $\mathbb{R}^n$  données par

$$d\phi(p)_*o_p, \quad p \in U$$

coïncident. Ici l'on regarde  $d\phi(p) : T_pM \rightarrow T_{\phi(p)}\mathbb{R}^n$  comme une application linéaire à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  via l'identification  $T_{\phi(p)}\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$ .

Si  $M$  admet une orientation on dit que  $M$  est orientable. Lorsque  $M$  est orientable et que l'on a choisi une orientation, on dit que  $M$  est orientée.

Dans le cas  $n = 1$  le lecteur doit comparer cette définition à la définition utilisée pour les courbes dans la section 5.2. La définition ci-dessus n'est qu'en apparence plus générale. En effet, supposons que  $M$  est orientable, soit  $\phi : U \subseteq M \xrightarrow{\cong} \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$  une carte quelconque définie sur un ouvert  $U$  connexe et soit  $p \in U$  fixé. L'on montre alors que l'ensemble des points  $x \in \phi(U)$ , tels que l'orientation de  $\mathbb{R}^n$  donnée par  $d\phi(\phi^{-1}(x))_*o_{\phi^{-1}(x)}$  coïncide avec l'orientation  $d\phi(p)_*o_p$ , est non-vide, ouvert, et fermé. Cet ensemble est donc égal à  $\phi(U)$  par connexité. Nous avons donc démontré l'affirmation suivante :

**Proposition 5.25.** *Soit  $M$  une variété orientable et  $o$  une orientation de  $M$ . Pour toute carte  $(U, \phi)$  avec  $U \subseteq M$  connexe, les orientations  $d\phi(p)_*o_p$  de  $\mathbb{R}^n$  coïncident.*  $\square$

Une variation sur le même argument montre le résultat suivant.

**Lemme 5.26.** *Soit  $M$  une variété orientable connexe et  $p \in M$  fixé. Étant donnée une orientation  $o_p$  de  $T_pM$ , il existe une unique orientation de  $M$  qui coïncide avec  $o_p$  au point  $p$ .*

*Démonstration.* Pour l'existence, choisissons une orientation  $\mathcal{O}$  de  $M$ . Si  $\mathcal{O}_p = o_p$ , alors  $\mathcal{O}$  convient. Sinon,  $-\mathcal{O}_p$  est une orientation qui convient. Pour l'unicité, l'on montre que deux orientations  $\mathcal{O}'$  et  $\mathcal{O}''$  qui coïncident au point  $p$  doivent être égales en montrant que l'ensemble des points où elles coïncident est non-vide, ouvert et fermé.  $\square$

**Corollaire 5.27.** *Sur une variété connexe orientable il existe exactement deux orientations.*  $\square$

**Exercice 48** (Critère de non-orientabilité). Soit  $M$  une variété ayant la propriété suivante : il existe deux cartes  $(U, \phi)$ ,  $(V, \psi)$  avec  $U, V$  connexes et telles que  $\det d(\phi \circ \psi^{-1})$  ne garde pas signe constant sur  $\psi(U \cap V)$  (en particulier  $U \cap V$  possède au moins deux composantes connexes). Alors  $M$  n'est pas orientable. Application : la bande de Möbius n'est pas orientable.

L'exercice précédent peut être vu comme un prélude au résultat central de cette section, que nous démontrons maintenant.

**Proposition 5.28.** *Soit  $M$  une variété de dimension  $n$ . Les affirmations suivantes sont équivalentes.*

- (1)  $M$  est orientable.
- (2)  $M$  admet un atlas dont toutes les applications de changement de carte ont une différentielle de déterminant positif.
- (3) Il existe une  $n$ -forme sur  $M$  partout non-nulle, i.e. le fibré en droites  $A_n(TM)$  est trivial.

*Démonstration.* (1) $\Rightarrow$ (2). Soit  $o$  une orientation sur  $M$ . Soit  $\{(U_i, \phi_i)\}$  un atlas sur  $M$  dont tous les domaines de carte sont connexes. Nous allons modifier les cartes  $(U_i, \phi_i)$  de manière à obtenir un atlas tel que tous les changements de carte aient une différentielle de déterminant positif. Soit  $o_{\mathbb{R}^n}$  une orientation fixée sur (l'espace vectoriel)  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application linéaire fixée de déterminant négatif, par exemple la réflexion  $(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n)$ . Posons

$$\tilde{\phi}_i := \begin{cases} \phi_i, & \text{si } d\phi_i^* o_{\mathbb{R}^n} = o, \\ A \circ \phi_i, & \text{si } d\phi_i^* o_{\mathbb{R}^n} = -o. \end{cases}$$

Chaque application  $\tilde{\phi}_i : U_i \rightarrow \tilde{\phi}_i(U_i)$  est un difféomorphisme qui vérifie

$$d\tilde{\phi}_i^* o_{\mathbb{R}^n} = o.$$

Ceci implique pour tous  $i, j$  la relation

$$d(\tilde{\phi}_j \circ \tilde{\phi}_i^{-1})^* o_{\mathbb{R}^n} = o_{\mathbb{R}^n},$$

qui équivaut à la condition  $\det d(\tilde{\phi}_j \circ \tilde{\phi}_i^{-1}) > 0$ .

(2) $\Rightarrow$ (1). Soit  $\{(U_i, \phi_i)\}$  un atlas tel que  $\det d(\phi_j \circ \phi_i^{-1}) > 0$  pour tous  $i, j$ . Soit  $o_{\mathbb{R}^n}$  une orientation fixée sur  $\mathbb{R}^n$ . Nous munissons chaque  $U_i$  de l'orientation

$$o_i := d\phi_i^* o_{\mathbb{R}^n}.$$

La condition  $\det d(\phi_j \circ \phi_i^{-1}) > 0$  équivaut au fait que, pour tous  $i, j$ , nous avons l'égalité

$$o_i|_{U_i \cap U_j} = o_j|_{U_i \cap U_j}.$$

Les orientations  $o_i$  se recollent donc en une orientation globale de  $M$ .

(2) $\Rightarrow$ (3). Soit  $\{(U_i, \phi_i)\}$  un atlas dont tous les changements de carte sont de déterminant positif. Notons  $\underline{\det} := dx^{(1, \dots, n)} \in \Omega^n(\mathbb{R}^n)$ . Posons

$$\omega_i := \phi_i^* \underline{\det} \in \Omega^n(U_i).$$

Soit  $\{\rho_i\}$  une partition de l'unité subordonnée au recouvrement  $\{U_i\}$ , de sorte que  $\text{supp}(\rho_i) \subset U_i$ ,  $0 \leq \rho_i \leq 1$  et  $\sum_i \rho_i = 1$ . Posons

$$\omega := \sum_i \rho_i \omega_i \in \Omega^n(M).$$

Alors  $\omega(p) \neq 0$  pour tout  $p \in M$ . Ceci découle du fait que pour tout  $p \in M$  il existe  $i$  tel que  $\rho_i(p) > 0$ , et du fait que pour tout  $p \in M$

et pour tous  $i, j$  tels que  $p \in U_i \cap U_j$  la  $n$ -forme  $\omega_i(p)$  est un multiple scalaire *strictement positif* de la  $n$ -forme  $\omega_j(p)$ . En effet, nous avons

$$\begin{aligned}\omega_i(p) &= d\phi_i(p)^* \underline{\det} \\ &= d(\phi_i \circ \phi_j^{-1} \circ \phi_j)(p)^* \underline{\det} \\ &= d\phi_j(p)^* d(\phi_i \circ \phi_j^{-1})(\phi_j(p))^* \underline{\det} \\ &= d\phi_j(p)^* \det d(\phi_i \circ \phi_j^{-1})(\phi_j(p)) \underline{\det} \\ &= \det d(\phi_i \circ \phi_j^{-1})(\phi_j(p)) \omega_j(p).\end{aligned}$$

La  $n$ -forme  $\omega(p)$  s'exprime donc comme un multiple strictement positif de  $\omega_i(p)$  pour tout  $i$  tel que  $p \in U_i$ . Or  $\omega_i(p) \neq 0$ , donc  $\omega(p) \neq 0$ .

(3) $\Rightarrow$ (1). Soit  $\omega \in \Omega^n(M)$  une  $n$ -forme lisse partout non-nulle. Nous définissons une orientation  $o_p = [(v_1, \dots, v_n)]$  sur  $T_p M$  par la condition

$$\omega_p(v_1, \dots, v_n) > 0.$$

Montrons que  $\{o_p : p \in M\}$  est bien une orientation sur  $M$ . Nous devons montrer que, pour toute carte  $(U, \phi)$  avec  $U$  connexe, les orientations  $d\phi(p)_* o_p$ ,  $p \in U$  sur  $\mathbb{R}^n$  coïncident. Puisque  $\dim A_n(\mathbb{R}^n) = 1$  nous obtenons une fonction  $f : \phi(U) \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$(\phi^{-1})^* \omega = f \underline{\det}.$$

Cette fonction est lisse puisque  $\omega$  est lisse, et elle ne s'annule pas sur  $\phi(U)$  puisque  $\omega$  ne s'annule pas. Puisque  $\phi(U)$  est connexe, nous obtenons que  $f$  garde signe constant sur  $\phi(U)$ , ce qui équivaut à dire que les orientations  $d\phi(p)_* o_p$ ,  $p \in U$  coïncident : elles sont égales à  $[(e_1, \dots, e_n)]$  lorsque  $f > 0$ , respectivement à l'orientation opposée  $-[(e_1, \dots, e_n)] = [(e_1, \dots, e_{n-1}, -e_n)]$  lorsque  $f < 0$ .  $\square$

**Exemples-exercices.** 1. Nous avons déjà vu que la bande de Möbius n'est pas orientable. Construire sur la même idée des exemples de variétés non-orientables en toute dimension  $n \geq 2$ , comme espaces totaux de fibrés de rang  $n - 1$  sur le cercle  $S^1$ .

2. Les espaces projectifs réels  $\mathbb{R}P^n$ ,  $n \geq 1$  sont orientables si et seulement si  $n$  est impair.

3. Toute variété complexe possède une orientation canonique.

4. Soit  $f : M \rightarrow N$  lisse,  $p \in N$  valeur régulière et  $M$  orientable. Alors  $f^{-1}(p)$  est orientable.

5. Si une variété contient un ouvert qui n'est pas orientable, alors elle n'est pas orientable. En déduire que  $\mathbb{R}P^2$  n'est pas orientable.

6. Une hypersurface dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  est orientable si et seulement si elle possède un champ de vecteurs normal unitaire continu ou, de manière équivalente, un champ de vecteurs transverses continu.

**Remarque 5.29.** *Ce dernier exercice explique le fait que, pour illustrer la non-orientabilité de la bande de Möbius vue comme sous-variété de  $\mathbb{R}^3$ , on utilise souvent la métaphore de la fourmi qui se déplace le long de l'équateur et arrive au point de départ "de l'autre côté de la surface". Le lecteur doit remarquer que le point de vue "de la fourmi", ou "du vecteur normal unitaire", est extrinsèque, alors que l'orientabilité est une propriété intrinsèque. Il est intéressant qu'une propriété extrinsèque (l'existence d'un champ de vecteurs normal unitaire continu) admette une caractérisation intrinsèque.*

**DIGRESSION : TRANSPORT D'UNE ORIENTATION LE LONG D'UN CHEMIN. LE REVÊTEMENT DOUBLE DES ORIENTATIONS.**

Comme conséquence du lemme 5.26, nous pouvons définir la notion importante de *transport d'une orientation le long d'un chemin continu*. Étant donné un chemin continu  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  et une orientation  $o_p$  en  $p := \gamma(0)$ , nous allons définir une orientation  $o_q$  en  $q := \gamma(1)$ , notée

$$o_q := \gamma_* o_p.$$

Soit  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1$  une subdivision de l'intervalle  $[0, 1]$  telle que  $\gamma(t_{i+1})$  appartient à un ouvert de carte connexe  $U_i$  autour de  $\gamma(t_i)$ ,  $i = 0, \dots, N-1$ . Nous définissons des orientations  $o_{\gamma(t_i)}$  par récurrence sur  $i = 0, \dots, N$  comme suit. L'on pose  $o_{\gamma(0)} := o_p$ . Ayant défini  $o_{\gamma(t_i)}$ , il existe (Lemme 5.26) une unique orientation sur  $U_i$  qui coïncide avec  $o_{\gamma(t_i)}$  en  $\gamma(t_i)$ , et nous définissons  $o_{\gamma(t_{i+1})}$  comme étant la valeur de cette orientation en  $\gamma(t_{i+1})$ .

**Exercice 49.** Montrer que l'orientation  $o_q = \gamma_* o_p$  ne dépend ni du choix de subdivision, ni du choix des ouverts de carte connexes voisins des points de la subdivision.

Soit maintenant  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  un *lacet* continu, i.e. un chemin continu tel que  $\gamma(0) = \gamma(1)$ . L'on dit que  $\gamma$  *préserve, respectivement renverse l'orientation* si, ayant fixé une orientation  $o_p$  au point base  $p := \gamma(0) = \gamma(1)$ , nous avons  $\gamma_* o_p = o_p$ , respectivement  $\gamma_* o_p = -o_p$ .

**Proposition 5.30.** *Une variété est orientable si et seulement si tout lacet sur  $M$  préserve l'orientation.*

*Démonstration (esquisse).* Nous pouvons supposer sans perte de généralité que  $M$  est connexe.

Supposons que  $M$  est orientable et choisissons une orientation  $o$ . Étant donné un lacet  $\gamma$  et une subdivision  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = 1$  adaptée au transport des orientations, l'on démontre par récurrence sur  $i = 0, \dots, N$  que le transport de l'orientation  $o_{\gamma(0)}$  le long de  $\gamma|_{[0, t_i]}$  est  $o_{\gamma(t_i)}$ . Pour  $i = N$  l'on obtient que  $\gamma$  préserve l'orientation.

Supposons maintenant que tout lacet préserve l'orientation. Fixons  $p \in M$  et une orientation  $o_p$  de  $T_pM$ . La variété  $M$  est connexe par arcs. Pour tout  $q \in M$  il existe un chemin  $\gamma$  reliant  $p$  à  $q$ , et l'on définit  $o_q := \gamma_*o_p$ . La définition ne dépend pas du choix de  $\gamma$  puisque, pour un autre choix  $\gamma'$ , le lacet  $\gamma' \# \gamma^{-1}$  obtenu par concaténation de  $\gamma'$  et de  $t \mapsto \gamma^{-1}(t) := \gamma(1-t)$  préserve l'orientation. L'on vérifie alors que  $\{o_q : q \in M\}$  est bien une orientation de  $M$ .  $\square$

**Exercice 50.** Soient  $p, q \in M$  et  $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow M$  deux chemins continus tels que  $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = p$  et  $\gamma_0(1) = \gamma_1(1) = q$ . On dit que  $\gamma_0, \gamma_1$  sont *homotopes à extrémités fixées* s'il existe une application continue  $\gamma : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M$ ,  $\gamma = \gamma(s, t)$  telle que  $\gamma(0, \cdot) = \gamma_0$ ,  $\gamma(1, \cdot) = \gamma_1$  et, pour tout  $s \in [0, 1]$ , le chemin  $\gamma_s := \gamma(s, \cdot)$  vérifie  $\gamma_s(0) = p$ ,  $\gamma_s(1) = q$ . Notation :  $\gamma_0 \sim \gamma_1$ .

Soit  $o_p$  une orientation de  $T_pM$ . Montrer que  $\gamma_0 \sim \gamma_1$  implique

$$(\gamma_0)_*o_p = (\gamma_1)_*o_p.$$

Ce phénomène est en relation avec le fait suivant : pour toute variété  $M$  il existe un revêtement double canonique  $\bar{M} \rightarrow M$  appelé *revêtement des orientations*, qui est déterminé par la propriété suivante : la monodromie le long d'un lacet dans  $M$  échange les deux feuillets si et seulement si le lacet renverse l'orientation. Le revêtement des orientations  $\bar{M}$  est toujours orientable. Lorsque  $M$  est connexe, le revêtement  $\bar{M}$  est disconnexe si et seulement si  $M$  est orientable, dans quel cas les composantes connexes de  $\bar{M}$  correspondent aux orientations de  $M$ .

Le fait de travailler avec des objets orientés ou avec des orientations mène naturellement à considérer des revêtements doubles. L'exercice qui suit fournit un exemple supplémentaire.

**Exercice 51.** Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension  $n$  et fixons  $0 \leq k \leq n$ . Montrer que l'espace des fonctions  $\omega : V^{\times k} \rightarrow \mathbb{R}$  qui vérifient la condition

(DET) pour tout sous-espace  $W \subset V$  de dimension  $k$ , tout choix de vecteurs  $v_1, \dots, v_k \in W$ , et tout endomorphisme  $A \in \text{End}(W)$ , l'on a

$$\omega(Av_1, \dots, Av_k) = (\det A)\omega(v_1, \dots, v_k),$$

est en bijection naturelle avec l'espace des fonctions

$$f : G^+(k, V) \rightarrow \mathbb{R}$$

définies sur la grassmannienne des  $k$ -plans orientés dans  $V$ , qui vérifient

$$f(-W) = -f(W), \quad W \in G^+(k, V).$$

Ici  $-W$  désigne l'élément de  $G^+(k, V)$  qui a le même sous-espace sous-jacent que  $W$ , muni de l'orientation opposée.

FIN DE LA DIGRESSION.

5.4.2. *Intégrale d'une forme différentielle sur une variété orientée.* Soit  $M$  une variété orientée de dimension  $n$  et  $\omega \in \Omega^n(M)$ . Nous définissons dans ce paragraphe l'intégrale

$$(5.3) \quad \int_M \omega.$$

Ceci fournit par ailleurs une définition de l'intégrale

$$\int_Q \omega$$

lorsque  $\omega \in \Omega^k(M)$  et  $Q \subset M$  est une sous-variété orientée de dimension  $k$ . En effet, la restriction de  $\omega$  à la sous-variété  $Q$ , notée encore  $\iota^*\omega$  avec  $\iota : Q \hookrightarrow M$  l'inclusion, définit une forme de degré maximal sur  $Q$ , à laquelle on peut appliquer la définition (5.3).

Soit  $M$  une variété orientée. On dit qu'un atlas  $\{(U_i, \phi_i)\}$  est *compatible avec l'orientation de  $M$*  si, pour tout  $i$ , l'orientation de  $U_i$  est égale à  $d\phi_i^*[(e_1, \dots, e_n)]$ , avec  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ . Dans ce cas nous avons  $\det d(\phi_i \circ \phi_j^{-1}) > 0$  pour tous  $i, j$ .

**Proposition-Définition 5.31.** *Soit  $M$  une variété orientée de dimension  $n$  et  $\omega \in \Omega^n(M)$ . Soient  $\{(U_i, \phi_i)\}$  un atlas compatible avec l'orientation de  $M$  et  $\{\rho_i\}$  une partition de l'unité subordonnée au recouvrement  $(U_i)$ . La quantité*

$$\begin{aligned} \int_M \omega &:= \sum_i \int_{\phi_i^{-1}} \rho_i \omega \\ &= \sum_i \int_{\phi_i(U_i)} \rho_i(\phi_i^{-1}(x)) \omega_{\phi_i^{-1}(x)}(d\phi_i^{-1}(x) \cdot e_1, \dots, d\phi_i^{-1}(x) \cdot e_n) dx. \end{aligned}$$

*ne dépend pas des choix. On l'appelle intégrale de  $\omega$  sur  $M$ .*

*Démonstration.* Soit  $(V_j, \psi_j)$  un autre atlas compatible avec l'orientation et  $\{\eta_j\}$  une partition de l'unité subordonnée au recouvrement  $(V_j)$ . Alors  $(U_i \cap V_j)_{i,j}$  est un recouvrement ouvert de  $M$  et  $\{\rho_i \eta_j\}_{i,j}$  est une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement. Aussi, pour tous

$i, j$  nous avons  $\det d(\phi_i \circ \psi_j^{-1}) > 0$ . Nous calculons

$$\begin{aligned}
\sum_i \int_{\phi_i^{-1}} \rho_i \omega &= \sum_i \int_{\phi_i^{-1}} \rho_i (\sum_j \eta_j) \omega \\
&= \sum_{i,j} \int_{\phi_i^{-1}} \rho_i \eta_j \omega \\
&= \sum_{i,j} \int_{\phi_i^{-1}|_{\phi_i(U_i \cap V_j)}} \rho_i \eta_j \omega \\
&= \sum_{i,j} \int_{\phi_i^{-1} \circ \psi_j^{-1}|_{\psi_j(U_i \cap V_j)}} \rho_i \eta_j \omega \\
&= \sum_{i,j} \int_{\psi_j^{-1}|_{\psi_j(U_i \cap V_j)}} \rho_i \eta_j \omega \\
&= \sum_{i,j} \int_{\psi_j^{-1}} \rho_i \eta_j \omega \\
&= \sum_j \int_{\psi_j^{-1}} (\sum_i \rho_i) \eta_j \omega \\
&= \sum_j \int_{\psi_j^{-1}} \eta_j \omega.
\end{aligned}$$

La troisième égalité utilise le fait que le support de  $\rho_i \eta_j$  est contenu dans  $U_i \cap V_j$ . La quatrième égalité est le point clé du calcul : c'est la proposition 5.20 appliquée au difféomorphisme  $\phi_i \circ \psi_j^{-1}$ , dont la différentielle est de déterminant positif puisque les atlas que nous considérons sont compatibles avec l'orientation de  $M$ . La cinquième égalité est simplement la transcription du fait que  $\phi_i^{-1} \circ \phi_i = \text{Id}$ . La deuxième moitié du calcul est l'analogie en sens inverse de la première moitié.  $\square$

**Remarque.** Le lecteur est invité à comparer la définition de l'intégrale donnée ci-dessus avec la définition de l'intégrale d'une 1-forme au paragraphe 5.2. La définition que nous venons de donner est beaucoup plus robuste : à la différence de la définition du §5.2 elle n'utilise pas d'information sur la combinatoire des intersections des ouverts  $U_i$ . Ce manque d'information est contourné par l'utilisation d'un outil autrement puissant, les partitions de l'unité.

Il est également utile de remarquer que les deux preuves de l'indépendance par rapport aux choix reposent en dernier ressort sur le fait de considérer des intersections  $U_i \cap V_j$ . C'est un exercice utile que de démontrer l'équivalence des deux définitions dans le cas  $n = 1$ .

**Remarque.** L'intégrale  $\int_M \omega$  doit être comprise au sens de Lebesgue, comme nous l'avons déjà précisé à plusieurs reprises. Lorsque la variété  $M$  est compacte, ou lorsque la forme différentielle  $\omega$  est à support

compact, l'intégrale est toujours définie. Dans les autres cas, nous supposons tacitement que l'intégrale est définie. L'existence de l'intégrale pour un choix  $\{(U_i, \phi_i)\}, (\rho_i)$  est équivalente à l'existence de l'intégrale pour tout autre choix, avec égalité des quantités correspondantes.

Les propriétés qui suivent découlent directement de la définition.

1. Soit  $M = \cup_i M_i$  une décomposition en union disjointe de variétés (de même dimension). Alors

$$\int_M \omega = \sum_i \int_{M_i} \omega|_{M_i}.$$

2. Notons  $-M$  la variété  $M$  munie sur chaque composante connexe de l'orientation opposée. Alors

$$\int_{-M} \omega = - \int_M \omega.$$

3. Un sous-ensemble  $A \subset M$  est dit *de mesure nulle* s'il peut être recouvert par une famille dénombrable d'ouverts de carte  $(U_i, \phi_i)$  tels que la mesure de Lebesgue de l'ensemble  $\phi_i(A \cap U_i) \subset \mathbb{R}^n$  soit nulle pour tout  $i$ . La définition ne dépend pas du choix de cartes puisque les ensembles de mesure nulle sont préservés par les difféomorphismes de  $\mathbb{R}^n$ .

Soit  $A \subseteq M$  un fermé de mesure nulle. Alors

$$\int_M \omega = \int_{M \setminus A} \omega.$$

Cette propriété est particulièrement utile pour faire des calculs explicites. Elle permet souvent de ramener le calcul d'une intégrale de  $n$ -forme sur une variété au calcul de l'intégrale sur un *unique* ouvert de carte. Ainsi, dans la pratique, nous ne devons *jamais* utiliser de partition de l'unité explicite. Exemple : en utilisant l'atlas fourni par les projections stéréographiques sur la sphère  $S^n$ , une intégrale sur  $S^n$  est égale à l'intégrale sur la sphère privée du pôle nord, qui à son tour se réduit au calcul d'une intégrale sur  $\mathbb{R}^n$ .

**Exemple.** Considérons  $S^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$  et  $\omega \in \Omega^2(S^2)$  donnée par  $\omega_x(X, Y) := \det(x|X|Y)$ , où  $X, Y \in T_x S^2 \cong x^\perp$  et les vecteurs  $x, X, Y$  sont écrits comme des vecteurs colonnes dans le déterminant. Munissons  $S^2$  de l'orientation suivante : la base  $(X, Y)$  de  $T_x S^2$  est par définition *positive* si  $[(x, X, Y)] = [(e_1, e_2, e_3)]$  en tant qu'orientations de  $\mathbb{R}^3$ . Nous avons alors

$$\int_{S^2} \omega = 4\pi.$$

4. Soient  $P, M$  deux variétés orientées de même dimension et  $\varphi : P \rightarrow M$  un difféomorphisme qui préserve l'orientation. Alors

$$\int_{M=\varphi(P)} \omega = \int_P \varphi^* \omega.$$

Cette même égalité peut être écrite de manière formelle sous la forme

$$\langle \omega, \varphi(P) \rangle = \langle \varphi^* \omega, P \rangle.$$

Ici  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne l'appariement entre formes et (sous-)variétés donné par l'intégration. Le fait de tirer en arrière une forme différentielle apparaît ici comme étant dual à l'évaluation d'un difféomorphisme sur une (sous-)variété. Nous rejoignons ainsi le thème de la dualité par lequel nous avons ouvert notre étude des formes différentielles.

**Exercice-définition (volume d'une hypersurface orientée de  $\mathbb{R}^{n+1}$ ).** Soit  $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  une hypersurface orientée dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  et soit  $\nu : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  le champ de vecteurs normal unitaire déterminé par l'orientation. Ainsi  $\nu(x)$  est l'unique vecteur de  $\mathbb{R}^n$  ayant les propriétés suivantes :

$$\nu(x) \perp T_x M, \quad \|\nu(x)\| = 1$$

et

$$[(\nu(x), v_1, \dots, v_n)] = [(e_1, \dots, e_{n+1})]$$

pour toute base positive  $(v_1, \dots, v_n)$  de  $T_x M$ . L'application  $\nu : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  est alors lisse.

Nous définissons une  $n$ -forme  $\omega \in \Omega^n(M)$  par

$$\omega_x(v_1, \dots, v_n) := \det(\nu(x)|v_1| \dots |v_n), \quad v_1, \dots, v_n \in T_x M.$$

C'est une  $n$ -forme différentielle lisse sur  $M$ , que l'on appelle *forme volume*. Le *volume  $n$ -dimensionnel* de  $M$  est défini comme

$$\text{vol}(M) := \int_M \omega.$$

N.B. : cette construction est une instance particulière de la définition du volume d'une variété riemannienne orientée (cf. plus bas).

**Exercice.** Comment définir le volume  $n$ -dimensionnel d'une hypersurface quelconque de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , pas nécessairement orientée ou orientable ?

### 5.5. Formule de Stokes. Variétés à bord. Différentielle extérieure. Cohomologie de De Rham.

Dans cette section nous allons généraliser aux formes différentielles la “formule fondamentale du calcul différentiel et intégral” (FFCDI)

$$\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a).$$

Ici  $a, b \in \mathbb{R}$  avec  $a < b$  et  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction (dérivable à dérivée continue). Vous avez déjà fait l’expérience de l’utilité de cette formule dans des calculs explicites, quoique sa vraie importance réside dans le fait qu’elle fournit une interprétation de l’intégrale comme manière de construire des primitives de fonctions. (Étant donnée une fonction (continue)  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , la fonction  $x \mapsto \int_a^x g(t) dt$  est une primitive de  $g$ .)

Écrivons la formule précédente de manière équivalente sous la forme

$$(5.4) \quad \int_{[a,b]} df = \int_{\{a,b\}} f.$$

En effet, nous avons déjà vu que l’on peut – et l’on doit – interpréter le symbole  $f'(t) dt$  comme une 1-forme définie sur l’intervalle  $[a, b]$ , auquel cas l’on a  $f'(t) dt = df$ . Le membre de gauche devient une intégrale de 1-forme sur la variété “à bord”  $[a, b]$ . Pour ce qui est du membre de droite, souvenons-nous que l’intégrale désigne fondamentalement une Somme (souvent infinie), d’où la notation  $\int$ . L’on pense à  $\{a, b\}$  comme étant un espace discret muni d’un “mesure avec signe” : chaque point est de mesure  $\pm 1$ , en l’occurrence  $b$  est de mesure  $+1$  et  $a$  est de mesure  $-1$ , et l’intégrale  $\int_{\{a,b\}} f$  vaut dans ce cas  $f(b) - f(a)$ .

Nous allons généraliser la formule (5.4) sous la forme suivante.

**Théorème 5.32** (Formule de Stokes). *Soit  $M^n$  une variété de dimension  $n \geq 1$  orientée à bord et  $\omega \in \Omega^{n-1}(M)$  une  $(n-1)$ -forme à support compact. Nous avons l’égalité*

$$(5.5) \quad \int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Ici  $\partial M$  désigne le bord de  $M$  muni de l’orientation induite,  $d\omega \in \Omega^n(M)$  désigne la différentielle extérieure de  $\omega$ , et dans le membre de droite on sous-entend que l’on intègre la restriction de  $\omega$  à  $\partial M$ .

Dans l’énoncé du théorème le *support* de  $\omega$  désigne, sans surprise, l’ensemble fermé

$$\text{supp}(\omega) := \overline{\{p \in M : \omega_p \neq 0\}}.$$

Lorsque  $M$  est compacte, l’hypothèse de compacité sur le support est redondante.

Nous allons expliquer dans ce paragraphe la notion de variété à bord, la notion de différentielle extérieure et celle de produit extérieur de formes, et nous allons démontrer la formule de Stokes. L'analogie entre les identités (5.4) et (5.5) est la suivante :

FFCDI	Stokes
$[a, b] \subset \mathbb{R}$ intervalle compact	$M^n$ variété compacte orientée à bord
$\{a, b\} \subset [a, b]$	$\partial M \subset M$ bord orienté
$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonction (0-forme)	$\omega \in \Omega^{n-1}(M)$
$f'(t) dt$	différentielle extérieure $d\omega$
$\int_{[a,b]} f'(t) dt$	$\int_M d\omega$
$\int_{\{a,b\}} f$	$\int_{\partial M} \omega$

Si l'on continue l'analogie, l'on pourrait croire que la formule de Stokes sert aussi à construire des “primitives” de formes différentielles (une forme  $\eta$  est dite être “primitive” d'une forme  $\omega$  si  $d\eta = \omega$ ). C'est *presque* vrai. L'existence de primitives de formes différentielles lisses n'est pas automatique, l'obstruction étant de nature à la fois locale et globale. L'étude de l'existence de primitives débouche sur ce que l'on appelle *cohomologie de De Rham* (le nom rend honneur à son inventeur Georges de Rham, mathématicien suisse, 1903-1990 ; cf. plus bas).

## 5.5.1. Variétés à bord.

(I) PRÉLIMINAIRES DANS  $\mathbb{R}^k$ . On note

$$\mathbb{R}_+^k := \{(x^1, \dots, x^k) \in \mathbb{R}^k : x^k \geq 0\}$$

et on l'appelle *demi-espace supérieur dans  $\mathbb{R}^k$* . De façon heuristique, les variétés à bord sont des espaces modélés de façon différentiable sur les ouverts de  $\mathbb{R}_+^k$ .

On note

$$\text{int}(\mathbb{R}_+^k) := \{(x^1, \dots, x^k) \in \mathbb{R}_+^k : x^k > 0\}$$

et on l'appelle *intérieur de  $\mathbb{R}_+^k$* . On note

$$\partial\mathbb{R}_+^k := \{(x^1, \dots, x^{k-1}, x^k) \in \mathbb{R}_+^k : x^k = 0\}$$

et on l'appelle *bord de  $\mathbb{R}_+^k$* . On a une identification naturelle

$$\mathbb{R}^{k-1} \cong \partial\mathbb{R}_+^k, \quad (x^1, \dots, x^{k-1}) \mapsto (x^1, \dots, x^{k-1}, 0).$$

De manière évidente

$$\mathbb{R}_+^k = \text{int}(\mathbb{R}_+^k) \sqcup \partial\mathbb{R}_+^k.$$

Par définition, un ouvert de  $\mathbb{R}_+^k$  s'écrit comme intersection d'un ouvert de  $\mathbb{R}^k$  avec  $\mathbb{R}_+^k$ . Les ouverts de  $\mathbb{R}_+^k$  sont par conséquent de deux types : ceux qui sont contenus dans  $\text{int}(\mathbb{R}_+^k)$ , qui sont aussi des ouverts de  $\mathbb{R}^k$ , et ceux qui intersectent  $\partial\mathbb{R}_+^k$ . Dans ce dernier cas, l'intersection est un ouvert de  $\mathbb{R}^{k-1} \cong \partial\mathbb{R}_+^k$ . Les ouverts du deuxième type ne sont *pas* des ouverts de  $\mathbb{R}^k$ .

**Définition 5.33.** Soit  $U \subseteq \mathbb{R}_+^k$  un ouvert. Une application  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  est dite lisse si elle admet au voisinage de chaque point  $x \in U$  une extension lisse à un ouvert de  $\mathbb{R}^k$  contenant  $x$ .

Lorsque  $U \subseteq \text{int}(\mathbb{R}_+^k)$ , c'est-à-dire lorsque  $U$  est aussi un ouvert de  $\mathbb{R}^k$ , cette définition coïncide avec la définition habituelle de la lissité. Lorsque  $U \cap \partial\mathbb{R}_+^k \neq \emptyset$ , l'application  $\varphi$  est lisse au sens habituel sur  $U \cap \text{int}(\mathbb{R}_+^k)$ , et pour chaque point  $x \in U \cap \partial\mathbb{R}_+^k$  elle est localement la restriction d'une application lisse définie sur un voisinage ouvert de  $x$  dans  $\mathbb{R}^k$ .

Une observation importante dans notre contexte est la suivante.

**Proposition-Définition 5.34.** Soit  $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}_+^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application lisse définie sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}_+^k$ . Pour tout point  $x \in U$  la différentielle de  $\varphi$  en  $x$  est bien définie en tant qu'application linéaire

$$d\varphi(x) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$$

par la formule

$$d\varphi(x) := d\tilde{\varphi}(x),$$

où  $\tilde{\varphi}$  est une extension lisse arbitraire définie sur un voisinage ouvert de  $x$  dans  $\mathbb{R}^k$ .

*Démonstration.* Lorsque  $x \in U \cap \text{int}(\mathbb{R}_+^k)$ , toute extension  $\tilde{\varphi}$  coïncide avec  $\varphi$  sur un voisinage de  $x$  dans  $\mathbb{R}^k$  et la formule décrit la différentielle habituelle  $d\varphi(x)$ .

Soit  $x \in U \cap \partial\mathbb{R}_+^k$  et soient  $\tilde{\varphi} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\tilde{\varphi}' : \tilde{U}' \rightarrow \mathbb{R}^n$  deux extensions lisses définies sur des voisinages ouverts  $\tilde{U}$ ,  $\tilde{U}'$  de  $x$  dans  $\mathbb{R}^k$ . Nous allons utiliser les dérivées directionnelles pour montrer que  $d\tilde{\varphi}(x)\xi = d\tilde{\varphi}'(x)\xi$  pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^k$ . L'observation principale est que, pour tout vecteur  $\xi \in \mathbb{R}^k$ , l'alternative suivante est vérifiée :

$$\text{ou bien } \xi \in \mathbb{R}_+^k, \text{ ou bien } -\xi \in \mathbb{R}_+^k.$$

Soit  $\xi \in \mathbb{R}_+^k$ . Alors  $x + t\xi \in \tilde{U} \cap \tilde{U}' \cap U$  pour  $t \in \mathbb{R}$  assez petit, de sorte que  $\tilde{\varphi}(x + t\xi) = \varphi(x + t\xi) = \tilde{\varphi}'(x + t\xi)$  pour  $t$  assez petit. Ainsi

$$\begin{aligned} d\tilde{\varphi}(x)\xi &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tilde{\varphi}(x + t\xi) - \tilde{\varphi}(x)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(x + t\xi) - \varphi(x)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tilde{\varphi}'(x + t\xi) - \tilde{\varphi}'(x)}{t} = d\tilde{\varphi}'(x)\xi. \end{aligned}$$

Soit maintenant  $\xi$  tel que  $-\xi \in \mathbb{R}_+^k$ . Par  $\mathbb{R}$ -linéarité et en utilisant le cas précédent nous obtenons

$$d\tilde{\varphi}(x)\xi = -d\tilde{\varphi}(x)(-\xi) = -d\tilde{\varphi}'(x)(-\xi) = d\tilde{\varphi}'(x)\xi.$$

□

**Exercice 52.** Soit  $\varphi : U \rightarrow V$  un difféomorphisme entre des ouverts de  $\mathbb{R}_+^k$ , i.e. une application bijective lisse dont l'inverse est lisse. Montrer que la différentielle  $d\varphi(x)$  est bijective en chaque point  $x \in U$ , avec  $d\varphi(x)^{-1} = d(\varphi^{-1})(\varphi(x))$ .

(II) DÉFINITION DES VARIÉTÉS À BORD.

**Définition 5.35.** Une variété de dimension  $k$  à bord est un espace topologique  $M$  muni d'une famille  $\{(U_i, \phi_i)\}_{i \in I}$  de paires  $(U_i, \phi_i)$  telles que :

- la famille  $(U_i)$  est un recouvrement ouvert de  $M$  ;
- chaque  $\phi_i : U_i \rightarrow \phi_i(U_i) \subseteq \mathbb{R}_+^k$  est un homéomorphisme sur son image, qui est un ouvert du demi-espace supérieur  $\mathbb{R}_+^k$  ;
- pour tous  $i, j \in I$  l'application

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \xrightarrow{\cong} \phi_j(U_i \cap U_j)$$

est un difféomorphisme.

On note  $\text{int}(M)$  l'ensemble des points  $p \in M$  qui admettent une carte modelée sur un ouvert de  $\text{int}(\mathbb{R}^k)$  et on l'appelle *intérieur de  $M$* . On note

$$\partial M := M \setminus \text{int}(M)$$

et on l'appelle *bord de  $M$* . Par définition

$$M = \text{int}(M) \sqcup \partial M.$$

**Exercice 53.** Montrer que les notations  $\text{int}(M)$  et  $\partial M$  sont compatibles avec les notations du paragraphe (I) lorsque  $M = \mathbb{R}_+^k$ .

Puisque  $\text{int}(\mathbb{R}_+^k)$  est difféomorphe à  $\mathbb{R}^k$  (exercice!), il s'ensuit que toute variété au sens habituel est aussi une variété à bord au sens de la définition précédente, le bord étant vide.

**Convention de terminologie.** Nous désignerons par variété à bord une variété au sens de la définition 5.35, le bord pouvant être vide. Nous désignerons par variété sans bord, ou simplement variété, une variété au sens de la définition 1.12.

**Proposition 5.36.** Soit  $M^k$  une variété de dimension  $k$  à bord. Alors  $\partial M$  est une variété sans bord de dimension  $k - 1$ .

*Démonstration.* Étant donné un atlas  $\{(U_i, \phi_i)\}$  sur  $M$ , la famille

$$\{(U_i \cap \partial M, \phi_i|_{U_i \cap \partial M})\}$$

constitue un atlas pour  $\partial M$ , modelé sur des ouverts de  $\partial \mathbb{R}^k \equiv \mathbb{R}^{k-1}$ . Noter que  $U_i \cap \partial M = \phi_i^{-1}(\phi_i(U_i) \cap \partial \mathbb{R}^k)$ .  $\square$

Une manière utile de reformuler la proposition précédente est d'écrire

$$(5.6) \quad \partial(\partial M) = \emptyset.$$

(III) EXEMPLES. Nous avons pris comme source primaire d'exemples de variétés les sous-variétés de  $\mathbb{R}^N$ , ou encore les préimages de valeurs régulières de fonctions lisses. La source primaire d'exemples de variétés à bord est constituée par les *ensembles de sous-niveau* de fonctions à valeurs réelles.

Étant donnée une variété  $M$  et une fonction lisse  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , on appelle *ensemble de sous-niveau de  $f$*  une partie de  $M$  de la forme  $\{p \in M : f(p) \leq a\}$  avec  $a \in \mathbb{R}$ . On le note encore  $\{f \leq a\}$ , ou  $M^{\leq a}$  lorsqu'il n'y a pas de confusion possible quant à la fonction  $f$  utilisée. On note aussi  $M^{< a} := \{f < a\}$ .

**Proposition 5.37.** Soit  $M$  une variété et  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction lisse. Pour toute valeur régulière  $a \in \mathbb{R}$ , l'ensemble de sous-niveau  $M^{\leq a} \subseteq M$  est une variété à bord, avec

$$\partial M^{\leq a} = f^{-1}(a), \quad \text{int}(M^{\leq a}) = M^{< a}.$$

*Esquisse de preuve.* Puisque  $M^{<a} \subseteq M$  est un ouvert, donc une sous-variété, il suffit de vérifier la définition aux points de  $f^{-1}(a)$ . L'énoncé est là une conséquence directe de la définition d'une variété à bord et du théorème de la submersion locale.  $\square$

Ce résultat nous permet de donner des exemples non-triviaux de variétés à bord sous la forme de *domaines à bord dans*  $\mathbb{R}^n$  : boules fermées dans  $\mathbb{R}^n$ , ellipsoïdes fermés dans  $\mathbb{R}^n$ , et plus généralement domaines fermés  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  définis par une équation de la forme  $\{f \leq a\}$ , avec  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  lisse et  $a \in \mathbb{R}$  valeur régulière. Les hémisphères fermés dans  $S^n$  sont aussi des variétés à bord.

**Exercice 54.** Soit  $M$  une variété (sans bord) et  $B \subset M$  une boule ouverte. Alors  $M \setminus B$  est une variété à bord. (Par "boule ouverte" on entend un ensemble de la forme  $\phi^{-1}(B^n)$ , où  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une carte et  $B^n \subset \phi(U)$  est une boule euclidienne ouverte telle que  $\bar{B}^n \subset \phi(U)$ .)

#### (IV) ESPACE TANGENT EN UN POINT DU BORD.

La proposition-définition 5.34 nous permet de définir l'espace tangent en tant qu'espace vectoriel même aux points du bord, ainsi que la différentielle d'une application lisse en tant qu'application linéaire. Les définitions sont formellement les mêmes que pour les variétés sans bord : étant donné un atlas  $\{(U_i, \phi_i)\}$  sur  $M$ , un élément de l'espace tangent  $T_p M$  est une classe d'équivalence  $[(i, \xi)]$  par rapport à la relation d'équivalence

$$(i, \xi) \sim (j, \eta) \Leftrightarrow d(\phi_j \circ \phi_i^{-1})(x)\xi = \eta, \quad x = \phi_i(p).$$

Étant donnée une application lisse  $f : M \rightarrow N$  entre deux variétés munies d'atlas  $\{(U_i, \phi_i)\}$  et  $\{(V_j, \psi_j)\}$ , la différentielle  $df(p) : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  agit par

$$df(p)[(i, \xi)] := [j, d(\psi_j \circ f \circ \phi_i^{-1})(x)\xi], \quad x = \phi_i(p).$$

Le point important est que, en tout point  $p \in \partial M$ , l'espace tangent au bord  $T_p \partial M$  est naturellement un sous-espace vectoriel de codimension 1 dans  $T_p M$  :

$$T_p \partial M \subset T_p M,$$

avec

$$T_p \partial M \equiv \{[(i, \xi)] : \xi \in \mathbb{R}^{k-1} \times \{0\} \equiv \partial \mathbb{R}_+^k \subset \mathbb{R}^k\}.$$

(IV) ORIENTATION INDUITE SUR LE BORD. La notion de variété à bord orientable, ainsi que celle d'orientation, sont définies exactement de la même manière que pour les variétés sans bord. L'aspect nouveau est le suivant.

**Proposition-Définition 5.38.** Soit  $M^k$  une variété orientable à bord. Le bord  $\partial M$  est alors orientable.

Plus précisément, une orientation  $o$  sur  $M$  induit une orientation  $o_{\partial M}$  sur  $\partial M$ , dite orientation de la normale sortante, de la manière suivante. Pour tout  $p \in \partial M$ , on choisit un vecteur tangent  $\nu = [(i, \xi)] \in T_p M$  avec  $\xi \notin \mathbb{R}_+^k$  (“vecteur sortant”). Une base  $(v_1, \dots, v_{k-1})$  de  $T_p \partial M$  définit  $o_{\partial M}|_p$  si et seulement si

$$[(\nu, v_1, \dots, v_{k-1})] = o_p.$$

*Esquisse de preuve.* L’on vérifie directement que la définition de  $o_{\partial M}|_p$  ne dépend pas du choix de  $\nu$ .

Soit alors  $\{(U_i, \phi_i)\}$  un atlas sur  $M$  tel que  $\det d(\phi_i \circ \phi_j^{-1}) > 0$  pour tous  $i, j$ . L’atlas induit sur  $\partial M$ , constitué des  $(V_i, \psi_i) := (U_i \cap \partial M, \phi_i|_{U_i \cap \partial M})$  a aussi la propriété que  $\det d(\psi_i \circ \psi_j^{-1}) > 0$ . Il s’ensuit que  $\partial M$  est orientable, et l’on vérifie en utilisant l’exemple ci-dessous que l’orientation induite par l’atlas  $\{(V_i, \psi_i)\}$  coïncide en tout point avec  $(-1)^k o_{\partial M}$ . En particulier  $o_{\partial M}$  définit bien une orientation.  $\square$

**Exemple 5.39.** Soit  $o^k$  l’orientation sur  $\mathbb{R}_+^k$  déterminée par la base canonique  $(e_1, \dots, e_k)$ . L’on identifie  $\partial \mathbb{R}_+^k = \mathbb{R}^{k-1} \times \{0\}$  avec  $\mathbb{R}^{k-1}$ . Alors

$$o_{\partial \mathbb{R}_+^k}^k = (-1)^k o^{k-1}.$$

En effet, en un point  $x \in \partial \mathbb{R}_+^k$  un vecteur sortant est donné par  $-e_k$ . L’orientation  $o^{k-1}|_x$  est celle déterminée par la base  $(e_1, \dots, e_{k-1})$ , mais

$$[(-e_k, e_1, \dots, e_{k-1})] = (-1)^{k-1} [(e_1, \dots, e_{k-1}, -e_k)] = (-1)^k o^k|_x.$$

(V) DIGRESSION : THÉORIE DE MORSE, OU “SAUCISSONAGE DES VARIÉTÉS”.

Toutes les constructions de variétés que nous avons présentées jusqu’ici étaient de nature globale. Ceci est en contraste flagrant avec la philosophie du calcul différentiel, qui voit les variétés comme étant localement modelées sur des morceaux simples “standard”, à savoir les boules ouvertes dans  $\mathbb{R}^k$ . L’on sent le besoin d’avoir à disposition un outil pour “casser” une variété en morceaux “simples”. C’est ce que réalise la théorie de Morse.

**Théorème 5.40** (Premier théorème de la théorie de Morse.). *Soit  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction lisse définie sur une variété compacte et  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  un intervalle constitué de valeurs régulières. Alors  $f^{-1}(a)$  et  $f^{-1}(b)$  sont difféomorphes, et*

$$M^{\leq a} \simeq M^{\leq b}.$$

$\square$

Ce théorème fournit une manière de “discrétiser” l’étude d’une variété. Supposons que la fonction  $f$  possède un nombre fini de valeurs critiques  $c_1 < \dots < c_\ell$  et imaginons que le paramètre réel  $a$  varie entre

$-\infty$  et  $+\infty$  de manière croissante. Tant que l'on ne franchit pas de valeur critique, la topologie globale de l'ensemble de sous-niveau ne change pas. Lorsque l'on franchit un niveau critique, la topologie globale de l'ensemble de sous-niveau change. Le deuxième théorème de la théorie de Morse décrit de manière précise ce changement, pour une classe générique de fonctions dites *fonctions de Morse*. Le changement est le suivant : lorsque l'on franchit un niveau critique, le nouvel ensemble de sous-niveau s'obtient à partir du précédent par attachement d'un objet standard, appelé *anse d'indice*  $\lambda$ , avec  $\lambda$  un entier compris entre 0 et  $k$ . Les variétés à bord jouent un rôle central en théorie de Morse à travers la proposition 5.37. Le lecteur curieux pourra se familiariser avec les premiers éléments de cette théorie en lisant le premier chapitre du livre classique de J. Milnor, *Morse theory*.

5.5.2. *Produit extérieur de formes différentielles.* Nous définissons dans ce paragraphe une structure d'algèbre graduée sur l'espace des applications multilinéaires alternées sur un espace vectoriel, respectivement sur l'espace des formes différentielles sur une variété.

(I) PRÉLIMINAIRES LINÉAIRES.

Soit  $V$  un espace vectoriel réel et posons

$$A_*(V) := \bigoplus_{k \geq 0} A_k(V).$$

On note  $|\alpha| = k$  lorsque  $\alpha \in A_k(V)$  et on l'appelle *degré de  $\alpha$* .

Pour  $k, \ell \geq 0$  considérons l'application bilinéaire

$$\wedge : A_k(V) \times A_\ell(V) \rightarrow A_{k+\ell}(V)$$

définie par

$$\begin{aligned} & (\alpha \wedge \beta)(v_1, \dots, v_{k+\ell}) \\ & := \frac{1}{k!\ell!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+\ell}} (-1)^{\epsilon(\sigma)} \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \beta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+\ell)}). \end{aligned}$$

Par définition nous avons  $A_0(V) = \mathbb{R}$  et  $\alpha \in A_0(V)$  agit par  $\alpha(\emptyset) := \alpha$ . La restriction de  $\wedge$  à  $A_0(V) \times A_0(V)$  coïncide donc avec la multiplication dans  $\mathbb{R}$ .

On étend  $\wedge$  à une application bilinéaire

$$\wedge : A_*(V) \times A_*(V) \rightarrow A_*(V)$$

et on appelle cette dernière *produit extérieur (des applications multilinéaires alternées)*.

**Lemme 5.41.** *Le produit extérieur  $\wedge$  est associatif, i.e.*

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma),$$

*et commutatif au sens gradué, i.e.*

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{|\alpha||\beta|} \beta \wedge \alpha.$$

*Démonstration.* L'associativité découle en montrant par un calcul direct l'identité

$$\begin{aligned} & ((\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma)(v_1, \dots, v_{k+\ell+m}) \\ & = \frac{1}{k!\ell!m!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+\ell+m}} \epsilon(\sigma) \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \beta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+\ell)}) \\ & \qquad \qquad \qquad \gamma(v_{\sigma(k+\ell+1)}, \dots, v_{\sigma(k+\ell+m)}) \\ & = (\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma))(v_1, \dots, v_{k+\ell+m}). \end{aligned}$$

L'on remarquera que le coefficient  $1/k!\ell!$  dans la définition de  $\wedge$  joue un rôle essentiel dans la preuve.

Pour la commutativité, considérons la permutation

$$\tau := \begin{pmatrix} 1 & \dots & \ell & \ell + 1 & \dots & \ell + k \\ k + 1 & \dots & k + \ell & 1 & \dots & k \end{pmatrix}.$$

La signature de cette permutation est  $\epsilon(\tau) = (-1)^{k\ell}$ . Nous obtenons

$$\begin{aligned} & (\alpha \wedge \beta)(v_1, \dots, v_{k+\ell}) \\ &= \frac{1}{k!\ell!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+\ell}} \epsilon(\sigma\tau^{-1}) \alpha(v_{\sigma\tau^{-1}(1)}, \dots, v_{\sigma\tau^{-1}(k)}) \\ & \qquad \qquad \qquad \beta(v_{\sigma\tau^{-1}(k+1)}, \dots, v_{\sigma\tau^{-1}(k+\ell)}) \\ &= \epsilon(\tau^{-1}) (\beta \wedge \alpha)(v_1, \dots, v_{k+\ell}) \\ &= (-1)^{|\alpha||\beta|} (\beta \wedge \alpha)(v_1, \dots, v_{k+\ell}). \end{aligned}$$

Nous avons utilisé le fait que la signature  $\epsilon : \mathfrak{S}_{k+\ell} \rightarrow \{\pm 1\}$  est un morphisme de groupes.  $\square$

**Exercice 55.** Montrer que

$$\begin{aligned} & (\alpha \wedge \beta)(v_1, \dots, v_{k+\ell}) \\ &:= \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+\ell} \\ \sigma(1) < \dots < \sigma(k) \\ \sigma(k+1) < \dots < \sigma(k+\ell)}} (-1)^{\epsilon(\sigma)} \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \beta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+\ell)}). \end{aligned}$$

**Définition 5.42.** Un espace vectoriel gradué est un espace vectoriel de la forme

$$\bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} V_k,$$

noté aussi  $V_*$ , avec  $V_k$  espace vectoriel pour tout  $k$ . Les éléments de  $V_k$  sont appelés éléments de degré  $k$ . Pour  $v \in V_k$  on note  $|v| := k$ .

Une algèbre graduée est un espace vectoriel gradué muni d'un produit  $\cdot$  associatif et bilinéaire tel que  $V_k \cdot V_\ell \subseteq V_{k+\ell}$ . Une algèbre graduée est dite commutative (au sens gradué) si  $v \cdot w = (-1)^{|v||w|} w \cdot v$ .

La discussion précédente montre que

$$(A_*(V), \wedge)$$

est une algèbre graduée commutative.

**Exercice 56.** Soit  $V = \mathbb{R}^n$  et considérons les formes linéaires

$$dx^1, \dots, dx^n \in A_1(\mathbb{R}^n) = (\mathbb{R}^n)^*$$

constituant la base duale de la base canonique  $(e_1, \dots, e_n)$ . Pour tout multi-indice  $(i_1, \dots, i_k)$ , ordonné ou pas, nous avons l'égalité

$$dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = dx^{(i_1, \dots, i_k)}.$$

Ceci montre que  $A_*(\mathbb{R}^n)$  est engendré en tant qu'algèbre par les éléments  $1, dx^1, \dots, dx^n$ , ou encore par  $A_0(\mathbb{R}^n) \oplus A_1(\mathbb{R}^n)$ . De manière générale, si  $V$  est un espace vectoriel (de dimension finie) alors l'algèbre  $A_*(V)$  est engendrée par  $A_0(V) \oplus A_1(V)$ . Le lecteur pourra penser à l'analogie suivante : l'algèbre  $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$  des polynômes à  $n$  variables est engendrée par  $1, X_1, \dots, X_n$ .

**Exercice 57.** Montrer que

$$dx^i \wedge dx^i = 0,$$

et

$$dx^I \wedge dx^J = 0 \text{ si } I \cap J \neq \emptyset.$$

**Exercice 58.** Soit  $V$  un espace vectoriel. Montrer que pour tout  $\alpha \in V^* = A_1(V)$  l'on a

$$\alpha \wedge \alpha = 0.$$

Montrer qu'une famille  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\} \subset V^*$  de formes linéaires est libre si et seulement si

$$\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_\ell \neq 0.$$

**Exemple 5.43.** Plaçons-nous dans  $\mathbb{R}^n$  et notons

$$\underline{\det} := dx^{(1, \dots, n)}$$

la  $n$ -forme multilinéaire alternée qui associe à un tuple de  $n$  vecteurs le déterminant de la matrice  $n \times n$  déterminée par les coordonnées de ces  $n$  vecteurs dans la base canonique.

L'égalité

$$dx^1 \wedge dx^{(2, \dots, n)} = \underline{\det}$$

n'est rien d'autre que la règle de calcul du déterminant par développement selon la première ligne ! De manière similaire, l'égalité

$$dx^{(1, \dots, k)} \wedge dx^{(k+1, \dots, n)} = \underline{\det}$$

n'est rien d'autre que la règle de calcul du déterminant par développement simultané selon les  $k$  premières lignes. Cette dernière règle est moins connue, mais elle est bien mentionnée dans certains manuels d'algèbre linéaire. La raison pour laquelle l'on est rarement amenés à l'utiliser (si jamais !) est que l'on peut très bien calculer un déterminant de manière itérative en développant uniquement selon des lignes. C'est une manifestation *a posteriori* du fait que  $A_*(\mathbb{R}^n)$  est engendrée en tant qu'algèbre par (1 et) les  $dx^i$ .

(II) **PRODUIT EXTÉRIEUR DE FORMES DIFFÉRENTIELLES.** Soit  $M$  une variété. Le produit extérieur sur chaque  $A_*(T_p M)$ ,  $p \in M$  induit un produit commutatif (au sens gradué) sur

$$\Omega^*(M) := \bigoplus_{k \geq 0} \Omega^k(M)$$

via

$$(\omega \wedge \eta)|_p := \omega_p \wedge \eta_p, \quad p \in M.$$

Le fait que  $\omega \wedge \eta$  soit une forme lisse se vérifie directement en coordonnées locales : si  $\omega = \sum_I \omega_I dx^I$  et  $\eta = \sum_J \eta_J dx^J$  sur un ouvert de carte  $(U, \phi = (x^1, \dots, x^n))$ , alors

$$\omega \wedge \eta = \sum_{I,J} \omega_I \eta_J dx^I \wedge dx^J$$

sur  $U$ . Chaque produit  $\omega_I \eta_J$  de fonctions lisses est lisse, et chaque produit  $dx^I \wedge dx^J$  est soit nul, soit égal au signe près à un  $dx^K$ , avec  $K$  multi-indice ordonné de longueur  $|I| + |J|$ . Ainsi  $\omega \wedge \eta$  s'écrit comme une combinaison linéaire à coefficients lisses de tels  $dx^K$ , ce qui signifie que  $\omega \wedge \eta$  est lisse.

Il découle directement de la discussion précédente que

$$(\Omega^*(M), \wedge)$$

est une algèbre graduée commutative.

Il est important de remarquer le fait que le produit extérieur des formes étend le produit des fonctions, ou encore que la restriction de  $\wedge$  à  $\Omega^0(M) = \mathcal{F}(M)$  coïncide avec le produit des fonctions.

### (III) ALGÈBRE TENSORIELLE. ALGÈBRE EXTÉRIEURE.

La définition du produit extérieur de formes multilinéaires alternées peut sembler *ad hoc*. Une première manière de le rendre naturel est de le considérer dans la perspective du développement des déterminants selon les lignes, ou plus généralement selon les multi-lignes, comme dans l'exemple 5.43. Une autre manière de le rendre naturel est de le considérer dans la perspective des puissances extérieures d'un espace vectoriel, qui repose elle-même sur la définition du produit tensoriel d'espaces vectoriels. C'est le contenu de ce paragraphe.

Nous limitons notre présentation aux espaces vectoriels (réels), dans quel cas le produit tensoriel constitue juste un élément de langage convenable. Le lecteur est invité à se familiariser avec le produit tensoriel de modules sur des anneaux quelconques, qui lui, possède un contenu mathématique non-trivial (voir par exemple le livre de Serge Lang, *Algebra*).

#### (III.1) Produit tensoriel d'espaces vectoriels.

Le produit tensoriel est une manière de transformer un problème de nature bilinéaire/multilinéaire en un problème linéaire.

**Définition 5.44.** Soient  $V, W$  deux espaces vectoriels (réels). Un produit tensoriel de  $V$  et  $W$  est un couple  $(V \otimes W, \pi)$ , avec

$$\pi : V \times W \rightarrow V \otimes W$$

une application bilinéaire, qui satisfait la propriété d'universalité suivante : pour tout espace vectoriel  $F$  et pour toute application bilinéaire  $f : V \times W \rightarrow F$ , il existe une unique application linéaire  $\bar{f} : V \otimes W \rightarrow F$  telle que  $\bar{f} \circ \pi = f$  :

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{f} & F \\ \downarrow \pi & \nearrow \exists! \bar{f} & \\ V \otimes W & & \end{array}$$

Le produit tensoriel est uniquement défini à unique isomorphisme près, comme tout objet défini par une propriété d'universalité (voir la discussion de la section 1.3). L'existence est prouvée par la construction explicite suivante :

$$V \otimes W := \text{Vect}(V \times W)/B,$$

où  $\text{Vect}(V \times W)$  désigne l'espace vectoriel (de dimension infinie!) engendré par les éléments de  $V \times W$  et  $B$  désigne le sous-espace engendré par les éléments de  $\text{Vect}(V \times W)$  de la forme

$$\begin{aligned} (v + v', w) - (v, w) - (v', w), \\ (v, w + w') - (v, w) - (v, w'), \\ (\lambda v, w) - \lambda(v, w), \\ (v, \lambda w) - \lambda(v, w), \end{aligned}$$

avec  $v, v' \in V$ ,  $w, w' \in W$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . La projection  $\pi : V \times W \rightarrow V \otimes W$  est définie par

$$\pi(v, w) := [(v, w)],$$

où  $[(v, w)]$  désigne la classe d'équivalence de  $(v, w)$  dans l'espace quotient  $\text{Vect}(V \times W)/B$ . L'application  $\pi$  est bilinéaire par construction de  $V \otimes W$ . Par abus de langage l'on appelle  $V \otimes W$  le produit tensoriel de  $V$  et  $W$ , sans plus mentionner la projection  $\pi$ .

**Exercice fondamental.** Vérifier que le couple  $(V \otimes W, \pi)$  vérifie la propriété d'universalité du produit tensoriel.

**Notation.** L'on note

$$v \otimes w := [(v, w)]$$

et on l'appelle *monôme tensoriel*, ou simplement *monôme*.

Par construction tout élément de  $V \otimes W$  est combinaison linéaire de monômes  $\sum_i \lambda_i v_i \otimes w_i$ . Par contre, il n'est pas vrai que tout élément de  $V \otimes W$  est un monôme.

**Remarque.** L'espace vectoriel  $\text{Vect}(V \times W)$  est de dimension non-dénombrable même si  $V$  et  $W$  sont de dimension finie (sauf lorsque  $V$  et  $W$  sont tous les deux réduits à zéro, auquel cas  $\text{Vect}(V \otimes W)$  est de dimension 1, engendré par  $(0, 0)$ ). Comparer ceci avec le corollaire 5.46.

**Proposition 5.45.** *Il existe un isomorphisme canonique*

$$\left(\bigoplus_i V_i\right) \otimes \left(\bigoplus_j W_j\right) \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{i,j} V_i \otimes W_j,$$

déterminé par

$$\left(\sum_i v_i\right) \otimes \left(\sum_j w_j\right) \mapsto \sum_{i,j} v_i \otimes w_j.$$

*Démonstration.* C'est une conséquence directe de la propriété universelle du produit tensoriel.  $\square$

**Corollaire 5.46.** *Soit  $\{v_i\}$  une base de  $V$  et  $\{w_j\}$  une base de  $W$ . Alors  $\{v_i \otimes w_j\}$  est une base de  $V \otimes W$ . En particulier, si  $V$  et  $W$  sont de dimension finie alors  $V \otimes W$  est de dimension finie et*

$$\dim V \otimes W = \dim V \cdot \dim W.$$

*Démonstration.* Ceci découle de la proposition précédente et du fait que, lorsque  $V$  et  $W$  sont de dimension 1, alors  $V \otimes W$  est de dimension 1, engendré par  $v \otimes w$  avec  $0 \neq v \in V$  et  $0 \neq w \in W$  fixés.  $\square$

**Proposition 5.47.** *Soient  $V$  et  $W$  de dimension finie. Il existe un isomorphisme canonique*

$$V^* \otimes W \xrightarrow{\cong} \text{Hom}(V, W)$$

déterminé par

$$\alpha \otimes w \mapsto \alpha(\cdot)w.$$

*Démonstration.* La bonne définition de ce morphisme vient de ce que  $V^* \otimes W \rightarrow \text{Hom}(V, W)$ ,  $(\alpha, w) \mapsto \alpha(\cdot)w$  est une application bilinéaire. Pour démontrer la surjectivité choisissons des bases  $\{e_i\}$  et  $\{f_j\}$  pour  $V$  et  $W$  respectivement, et soit  $\{e_i^*\}$  la base duale de  $V^*$ . Toute application linéaire  $L \in \text{Hom}(V, W)$  est uniquement déterminée par sa matrice  $(a_{ij})$  par rapport aux bases choisies, définie par la condition

$$L(e_j) := \sum_i a_{ij} f_i.$$

Or cette identité est équivalente à

$$L = \sum_{i,j} a_{ij} e_j^*(\cdot) f_i,$$

ce qui montre que  $L$  appartient bien à l'image de notre morphisme. L'injectivité découle de l'égalité des dimensions.  $\square$

**Corollaire 5.48.** *Soient  $V, W$  de dimension finie. Il existe un isomorphisme canonique*

$$V^* \otimes W^* \cong (V \otimes W)^*,$$

déterminé par

$$(5.7) \quad \alpha \otimes \beta \mapsto (v \otimes w \mapsto \alpha(v)\beta(w)).$$

*Démonstration.* Notons  $\text{Bil}(V \times W, \mathbb{R})$  l'espace vectoriel des applications bilinéaires à valeurs réelles définies sur  $V \times W$ . Nous avons un isomorphisme canonique

$$\text{Bil}(V \times W, \mathbb{R}) \cong \text{Hom}(V, \text{Hom}(W, \mathbb{R})), \quad f(\cdot, \cdot) \mapsto (v \mapsto f(v, \cdot)).$$

Par définition du produit tensoriel nous avons un isomorphisme canonique

$$(V \otimes W)^* \cong \text{Hom}(V \otimes W, \mathbb{R}) \cong \text{Bil}(V \times W, \mathbb{R}).$$

Ainsi, par la proposition précédente, nous obtenons

$$(V \otimes W)^* \cong \text{Hom}(V, \text{Hom}(W, \mathbb{R})) \cong V^* \otimes W^*.$$

L'expression de l'isomorphisme donnée dans l'énoncé est obtenue à partir des expressions explicites des isomorphismes précédents.  $\square$

**Proposition 5.49.** *Il existe un isomorphisme canonique*

$$V \otimes W \cong W \otimes V$$

déterminé par

$$v \otimes w \mapsto w \otimes v.$$

$\square$

**Proposition 5.50.** *Il existe un isomorphisme canonique*

$$(V \otimes W) \otimes U \cong V \otimes (W \otimes U)$$

déterminé par

$$(v \otimes w) \otimes u \mapsto v \otimes (w \otimes u).$$

$\square$

Les résultats précédents admettent des généralisations évidentes aux applications multilinéaires. Celles-ci sont représentées par des produits tensoriels multiples. En particulier, l'espace

$$L^k(V^{\times k}, E)$$

des applications multilinéaires de degré  $k$  définies sur un espace vectoriel  $V$  à valeurs dans un espace vectoriel  $E$  est canoniquement isomorphe à

$$\text{Hom}(V^{\otimes k}, E),$$

où

$$V^{\otimes k} = \underbrace{V \otimes V \otimes \dots \otimes V}_{k \text{ fois}}.$$

(III.2) *Puissance extérieure.* La discussion précédente montre que l'on a un isomorphisme canonique

$$L^k(V^{\times k}, \mathbb{R}) \cong \text{Hom}(V^{\otimes k}, \mathbb{R}) = (V^{\otimes k})^*.$$

Le sous-espace  $A_k(V) \subset L^k(V^{\times k}, \mathbb{R}) \cong (V^{\otimes k})^*$  est canoniquement isomorphe au dual d'un espace quotient de  $V^{\otimes k}$ . Celui-ci s'appelle *la  $k$ -ème puissance extérieure de  $V$*  et on le note

$$\Lambda^k V.$$

En effet, de manière générale, un sous-espace du dual d'un espace vectoriel est canoniquement isomorphe au dual d'un quotient approprié de l'espace vectoriel lui-même. Ici notre discussion rejoint le paragraphe 1.3, et plus précisément la digression concernant la dualité entre équations paramétriques et équations cartésiennes.

La  $k$ -ème puissance extérieure  $\Lambda^k V$  permet de réduire l'étude des applications  $k$ -multilinéaires alternées définies sur un produit  $V^{\times k}$  à l'étude d'applications linéaires définies sur  $\Lambda^k V$ .

**Définition 5.51.** *Soit  $V$  un espace vectoriel réel. Une  $k$ -ème puissance extérieure de  $V$  est une paire  $(\Lambda^k V, \pi)$ , où  $\Lambda^k V$  est un espace vectoriel et  $\pi : V^{\times k} \rightarrow \Lambda^k V$  est une application  $k$ -multilinéaire alternée, satisfaisant la propriété d'universalité suivante : pour tout espace vectoriel  $F$  et pour toute application  $k$ -multilinéaire alternée  $f : V^{\times k} \rightarrow F$ , il existe une unique application linéaire  $\bar{f} : \Lambda^k V \rightarrow F$  telle que  $\bar{f} \circ \pi = f$  :*

$$\begin{array}{ccc} V^{\times k} & \xrightarrow{f} & F \\ \downarrow \pi & \nearrow \exists! \bar{f} & \\ \Lambda^k V & & \end{array}$$

Tout comme le produit tensoriel, la  $k$ -ème puissance extérieure est uniquement déterminée à unique isomorphisme près. L'existence est démontrée par une construction explicite : l'on pose

$$\Lambda^k V := V^{\otimes k} / A,$$

où  $A \subset V^{\otimes k}$  est le sous-espace engendré par les éléments de la forme

$$v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(k)} - \epsilon(\sigma) v_1 \otimes \dots \otimes v_k,$$

avec  $v_1, \dots, v_k \in V$  et  $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ . Comme d'habitude  $\epsilon(\sigma) \in \{\pm 1\}$  désigne la signature de la permutation  $\sigma$ .

On note la classe d'un monôme  $v_1 \otimes \dots \otimes v_k$  dans  $\Lambda^k V$  par

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_k.$$

L'application de projection  $\pi : V^{\times k} \rightarrow \Lambda^k V$  est la composition des projections  $V^{\times k} \rightarrow V^{\otimes k} \rightarrow \Lambda^k V$  et agit par

$$\pi(v_1, \dots, v_k) := v_1 \wedge \dots \wedge v_k.$$

**Exercice fondamental.** Vérifier que le couple  $(\Lambda^k V, \pi)$  vérifie la propriété d'universalité de la puissance extérieure.

Il découle de la propriété universelle (avec  $F = \mathbb{R}$ ) que l'on a un isomorphisme canonique

$$A_k(V) \cong (\Lambda^k V)^*.$$

**Proposition 5.52.** *Soit  $\{e_i\}_{i \in I}$  une base de  $V$ , avec  $I$  un ensemble totalement ordonné. Une base de  $\Lambda^k V$  est donnée par*

$$\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} : i_1 < \dots < i_k\}.$$

*Démonstration.* Notons  $\bar{e}_I := e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$ , avec  $I = (i_1 < \dots < i_k)$  un multi-indice ordonné. Il est clair que la famille des  $\bar{e}_I$  engendre  $\Lambda^k V$ . Pour montrer l'indépendance linéaire des  $\bar{e}_I$  nous utilisons la propriété universelle de la puissance extérieure : supposons qu'il existe une combinaison linéaire non-triviale  $\sum_I \lambda_I \bar{e}_I = 0$  et considérons pour  $J$  fixé l'unique application  $k$ -multilinéaire alternée  $e_J^* : V^{\times k} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $e_J^*(e_I) = \delta_{JI}$ , avec  $e_I = (e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$ . L'application linéaire  $\bar{e}_J^* : \Lambda^k V \rightarrow \mathbb{R}$  fournie par la propriété universelle vérifie alors  $\bar{e}_J^*(\bar{e}_I) = \delta_{JI}$ . En l'appliquant à la combinaison linéaire  $\sum_I \lambda_I \bar{e}_I = 0$  l'on obtient  $\lambda_J = 0$ , et ceci vaut pour tout choix de  $J$ .  $\square$

**Corollaire 5.53.** *Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension  $n$ . La dimension de  $\Lambda^k V$  est*

$$\dim \Lambda^k V = \binom{n}{k}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

*Par ailleurs  $\Lambda^k V = \{0\}$  si  $k > n$ .*  $\square$

Notons que, par convention, l'on a

$$\Lambda^0 V = \mathbb{R}.$$

**Proposition 5.54.** *Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension finie. Il existe un isomorphisme canonique*

$$\Lambda^k(V^*) \cong (\Lambda^k V)^*$$

*déterminé par*

$$(5.8) \quad \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k \mapsto (v_1 \wedge \dots \wedge v_k \mapsto \det(\alpha_i(v_j))_{i,j}).$$

*Démonstration.* Soit  $\dim V = n$  et notons  $\Phi : \Lambda^k(V^*) \rightarrow (\Lambda^k V)^*$  le morphisme de l'énoncé. Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $V$  et  $(e_1^*, \dots, e_n^*)$  la base duale de  $V^*$ . Nous avons vu dans la proposition 5.52 que la famille  $\{\bar{e}_I\}$ , avec  $I = (i_1 < \dots < i_k)$  multi-indice ordonné et  $\bar{e}_I = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$ , constitue une base de  $\Lambda^k V$ . Notons  $\{(\bar{e}_I)^*\}$  la base duale de  $(\Lambda^k V)^*$ , déterminée par la condition  $(\bar{e}_I)^* \cdot \bar{e}_J = \delta_{IJ}$ . D'un autre côté, la famille  $\{\bar{e}_I^*\}$ , avec  $I = (i_1 < \dots < i_k)$  multi-indice ordonné et  $\bar{e}_I^* = e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^*$ , est une base de  $\Lambda^k(V^*)$ . Le morphisme  $\Phi$  vérifie

$$\Phi(\bar{e}_I^*) = (\bar{e}_I)^*.$$

On déduit que  $\Phi$  est un isomorphisme puisqu'il envoie les éléments d'une base sur les éléments d'une base.  $\square$

**Remarque.** Le lecteur est invité à comparer la formule (5.8) pour cet isomorphisme (disons pour  $k = 2$ ) avec la formule correspondante (5.7) pour l'isomorphisme  $(V^*)^{\otimes 2} \cong (V^{\otimes 2})^*$  donné par le corollaire 5.48. La raison pour laquelle elles sont différentes est que l'isomorphisme (5.8) ne s'obtient *pas* par restriction de l'isomorphisme (5.7). En effet, la flèche (5.7) s'insère dans un diagramme

$$\begin{array}{ccc} (V^*)^{\otimes 2} & \xrightarrow{(5.7)} & (V^{\otimes 2})^* \\ \pi \downarrow & & \uparrow \text{incl} \\ \Lambda^2(V^*) & & (\Lambda^2 V)^* \end{array}$$

qui ne peut pas être complété en un diagramme commutatif pour des raisons de dimension. En même temps la flèche (5.8) se relève bien en un morphisme dit "d'anti-symétrisation"  $(V^*)^{\otimes 2} \rightarrow (\Lambda^2 V)^*$  pour former un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} (V^*)^{\otimes 2} & \xrightarrow{\text{incl} \circ \text{anti-sym.}} & (V^{\otimes 2})^* \\ \pi \downarrow & \searrow \text{anti-sym.} & \uparrow \text{incl} \\ \Lambda^2(V^*) & \xrightarrow{(5.8)} & (\Lambda^2 V)^* \end{array}$$

mais la composition  $\text{incl} \circ \text{anti-sym.}$  n'est pas un isomorphisme.

Nous énonçons sans preuve un autre isomorphisme fondamental concernant les puissances tensorielles.

**Proposition 5.55.** *Il existe un isomorphisme canonique*

$$\Lambda^k(V \oplus W) \cong \bigoplus_{i+j=k} \Lambda^i V \otimes \Lambda^j W.$$

déterminé par

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_i \wedge w_1 \wedge \dots \wedge w_j \longleftarrow (v_1 \wedge \dots \wedge v_i) \otimes (w_1 \wedge \dots \wedge w_j)$$

$\square$

(III.3) *Algèbre tensorielle et algèbre extérieure.* Soit  $V$  un espace vectoriel. Notons

$$TV := \bigoplus_{k \geq 0} V^{\otimes k}.$$

Le produit bilinéaire

$$\otimes : V^{\otimes k} \times V^{\otimes \ell} \rightarrow V^{\otimes(k+\ell)},$$

$(v_1 \otimes \dots \otimes v_k, v'_1 \otimes \dots \otimes v'_\ell) \mapsto v_1 \otimes \dots \otimes v_k \otimes v'_1 \otimes \dots \otimes v'_\ell$   
induit un produit bilinéaire

$$\otimes : TV \times TV \rightarrow TV,$$

ou encore

$$\otimes : TV \otimes TV \rightarrow TV,$$

On appelle

$$(TV, \otimes)$$

l'*algèbre tensorielle* de  $V$ . C'est une algèbre graduée non-commutative.

Notons

$$\Lambda V := \bigoplus_{k \geq 0} \Lambda^k V.$$

Le produit

$$\wedge : \Lambda^k V \times \Lambda^\ell V \rightarrow \Lambda^{k+\ell} V,$$

$$(v_1 \wedge \dots \wedge v_k, v'_1 \wedge \dots \wedge v'_\ell) \mapsto v_1 \wedge \dots \wedge v_k \wedge v'_1 \wedge \dots \wedge v'_\ell$$

est bilinéaire et commutatif au sens gradué :

$$(v_1 \wedge \dots \wedge v_k) \wedge (v'_1 \wedge \dots \wedge v'_\ell) = (-1)^{k\ell} (v'_1 \wedge \dots \wedge v'_\ell) \wedge (v_1 \wedge \dots \wedge v_k).$$

On appelle

$$(\Lambda V, \wedge)$$

l'*algèbre extérieure* de  $V$ . C'est une algèbre graduée commutative.

Soit  $V$  de dimension finie. L'isomorphisme

$$(\Lambda V)^* \cong \Lambda(V^*)$$

induit à partir du produit  $\wedge$  sur  $\Lambda(V^*)$  un produit

$$\wedge : (\Lambda V)^* \times (\Lambda V)^* \rightarrow (\Lambda V)^*$$

qui est bilinéaire et commutatif au sens gradué.

**Proposition 5.56.** *La propriété universelle des puissances extérieures détermine un isomorphisme d'algèbres graduées commutatives*

$$(A_*(V), \wedge) \cong ((\Lambda V)^*, \wedge).$$

□

Nous laissons la preuve de cette proposition en exercice au lecteur. En dernier ressort, via la définition du produit  $\wedge$  et la formule (5.8) pour l'isomorphisme  $(\Lambda V)^* \cong \Lambda(V^*)$ , elle se réduit au fait que le produit extérieur des applications multilinéaires alternées s'interprète comme développement simultané du déterminant selon plusieurs lignes.

Un manière de lire la proposition 5.56 est la suivante : si nous avons pris comme point de départ la structure d'algèbre graduée commutative sur  $\Lambda(V^*)$  donnée par le produit  $\wedge$ , nous aurions induit via les identifications

$$A_*(V) \cong (\Lambda V)^* \cong \Lambda(V^*)$$

un produit commutatif au sens gradué sur  $A_*(V)$ . Après analyse des formules explicites qui entrent en jeu, nous aurions abouti à l'expression donnée dans la section 5.5.2 pour le produit extérieur des formes multilinéaires alternées. Pour un esprit algébriste cette démarche est certainement plus naturelle que celle de “deviner” (ou pas) la formule du produit extérieur de la section 5.5.2 à partir du développement du déterminant selon des lignes. Nous avons fait un long détour algébrique, mais nous avons gagné la certitude *a priori* de l'existence du produit extérieur de formes multilinéaires alternées. Son expression explicite est *a posteriori* simplement rassurante, et non plus surprenante ou, je l'espère, mystérieuse.

5.5.3. *Différentielle extérieure.* Soit  $M$  une variété et considérons le tableau suivant :

	produit	dérivation
$\Omega^0(M)$	$\cdot$	$d$
$\Omega^*(M)$	$\wedge$	?

L'espace  $\Omega^0(M) = \mathcal{F}(M)$  porte une structure d'algèbre commutative par rapport au produit  $\cdot$  de fonctions. La différentielle

$$d : \Omega^0(M) \rightarrow \Omega^1(M)$$

est une dérivation, i.e. elle vérifie la règle de Leibniz par rapport au produit de fonctions :

$$d(f \cdot g) = (df) \cdot g + f \cdot (dg).$$

(Ici l'on regarde  $\Omega^1(M)$  comme un  $\Omega^0(M)$ -bimodule, i.e. un module à droite et à gauche; dans ce cas particulier les structures de module à droite et à gauche coïncident.)

L'espace des formes différentielles  $\Omega^*(M)$  est muni d'une structure d'algèbre graduée commutative par rapport au produit extérieur de formes  $\wedge$ . Le sous-espace

$$\Omega^0(M) \subset \Omega^*(M)$$

est stable par produit extérieur et la restriction de  $\wedge$  à  $\Omega^0(M)$  coïncide avec le produit  $\cdot$  des fonctions. Le produit extérieur  $\wedge$  peut donc être vu comme une *extension* du produit des fonctions.

Dans ce paragraphe nous allons construire un opérateur

$$d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M), \quad k \geq 0$$

qui coïncide avec/constitue une extension de la différentielle des fonctions sur  $\Omega^0(M)$ , et qui est une dérivation de degré 1, au sens où elle vérifie la règle de Leibniz graduée

$$d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^{|\alpha|} \alpha \wedge (d\beta).$$

(Ici l'on regarde l'algèbre  $\Omega^*(M)$  comme bimodule sur elle-même par multiplication.) Le triple  $(\Omega^*(M), \wedge, d)$  est un exemple de ce que l'on appelle *algèbre différentielle commutative graduée*.

**Théorème 5.57.** *Pour toute variété  $M$  il existe une unique application  $\mathbb{R}$ -linéaire  $d : \Omega^*(M) \rightarrow \Omega^*(M)$  de degré 1, i.e.*

$$d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M), \quad k \geq 0,$$

*appelée différentielle extérieure, qui vérifie les propriétés suivantes :*

(DIFFÉRENTIELLE)  $d|_{\Omega^0(M)} : \Omega^0(M) \rightarrow \Omega^1(M)$  est la différentielle des fonctions.

(DÉRIVATION)

$$d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^{|\alpha|} \alpha \wedge (d\beta), \quad \alpha, \beta \in \Omega^*(M).$$

(DIFFÉRENTIELLE HOMOLOGIQUE)

$$d \circ d = 0.$$

La différentielle extérieure vérifie de plus les propriétés suivantes :

(LOCALISATION) pour tout ouvert  $U \subset M$  l'on a

$$(d\omega)|_U = d(\omega|_U).$$

(FONCTORIALITÉ) pour toutes deux variétés  $N, M$  et toute application lisse  $\varphi : N \rightarrow M$  l'on a

$$\varphi^* d\omega = d(\varphi^* \omega).$$

**Exercice 59.** Montrer par récurrence sur  $p \geq 2$  que la propriété (DÉRIVATION) implique

$$d(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_p) = \sum_{i=1}^p (-1)^{|\alpha_1| + \dots + |\alpha_{i-1}|} \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_{i-1} \wedge d\alpha_i \wedge \alpha_{i+1} \wedge \dots \wedge \alpha_p,$$

pour tous  $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \Omega^*(M)$ .

**Remarque.** L'on écrit souvent

$$d : \Omega^*(M) \rightarrow \Omega^{*+1}(M)$$

pour mettre en évidence le fait que  $d$  est une application de degré 1.

**Remarque.** Les égalités postulées par les deux dernières propriétés font intervenir les différentielles extérieures sur des variétés distinctes :  $M$  et  $U$ , respectivement  $M$  et  $N$ . La propriété (LOCALISATION) est en fait un cas particulier de la propriété (FONCTORIALITÉ) : elle correspond à  $N = U$  et  $\varphi = \iota : U \hookrightarrow M$ , l'inclusion de  $U$  dans  $M$ .

Avant de donner la preuve du théorème, commentons les trois dernières propriétés de la différentielle extérieure.

- (DIFFÉRENTIELLE HOMOLOGIQUE) La propriété

$$d \circ d = 0$$

doit être regardée comme étant duale, via la formule de Stokes, à la relation

$$\partial(\partial N) = \emptyset$$

pour une variété  $N$  à bord. Noter que l'on peut réécrire cette dernière de manière légèrement abusive comme

$$\partial \circ \partial = 0.$$

En effet, non seulement nous souhaitons construire  $d : \Omega^*(M) \rightarrow \Omega^{*+1}(M)$  comme une dérivation qui étend la différentielle des fonctions, mais nous souhaitons aussi que cet opérateur satisfasse la généralisation de la FFCDI qu'est le théorème de Stokes. Ceci force  $d \circ d = 0$  : étant donnée une forme différentielle  $\omega$  de degré  $k$  et une sous-variété orientée à bord  $N^{k+2} \subset M$ , le théorème de Stokes implique

$$\int_N d(d\omega)|_N = \int_{\partial N} d\omega|_{\partial N} = \int_{\partial(\partial N)} \omega|_{\partial(\partial N)} = 0.$$

**Exercice 60.** Soit  $M$  une variété et  $\alpha \in \Omega^p(M)$ . Montrer que  $\alpha = 0$  si et seulement si pour toute sous-variété de dimension  $p$  orientée à bord  $N^p \subset M$  l'on a

$$\int_N \alpha|_N = 0.$$

Lors de la preuve du théorème 5.57 nous allons voir que la relation  $d \circ d = 0$  peut aussi être lue comme une généralisation de la propriété de commutation des dérivées secondes d'une application  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  (théorème de Schwarz) :

$$\forall i, j, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}.$$

- (LOCALISATION). La propriété  $(d\omega)|_U = d(\omega|_U)$  est une propriété qui caractérise les opérateurs différentiels, i.e. les applications  $\mathbb{R}$ -linéaires entre espaces de sections de fibrés vectoriels qui s'écrivent en coordonnées locales uniquement en termes d'opérations arithmétiques élémentaires impliquant des dérivées. Elle doit être interprétée comme affirmant le fait que la valeur de  $d\omega$  en un point  $p \in M$  ne dépend que des valeurs de  $\omega$  au voisinage de  $p$ .

- (FONCTORIALITÉ). La functorialité par rapport à des applications  $\varphi$  qui sont des difféomorphismes est une propriété *nécessaire* pour tout objet défini sur une variété : elle exprime simplement l'indépendance par rapport au choix de coordonnées. Le fait que, dans le cas des formes différentielles, la functorialité est vérifiée par rapport aux applications lisses quelconques (et non seulement par rapport aux difféomorphismes), implique la functorialité de la cohomologie de De Rham et qualifie les formes différentielles comme outil privilégié pour l'étude de la topologie globale des variétés. Nous donnons un aperçu rapide de la cohomologie de De Rham plus bas. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à la bibliographie et à l'ouvrage classique de Raoul Bott et Loring Tu, *Differential forms in algebraic topology*, GTM, Springer.

Ceci est par ailleurs l'endroit opportun pour souligner une différence fondamentale entre formes différentielles et champs de vecteurs : alors que les champs de vecteurs peuvent être poussés en avant uniquement par des difféomorphismes, les formes différentielles peuvent être tirées

en arrière par des applications lisses *quelconques*. Il y a là un paradoxe : les formes différentielles sont des objets plus abstraits que les champs de vecteurs, mais, en contrepartie, beaucoup plus maniables. C'est une situation que l'on rencontre fréquemment : l'abstraction apporte de la souplesse.

*Démonstration du théorème 5.57.*

*Étape 1 : le cas des ouverts de  $\mathbb{R}^n$ .* Soit  $V \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert. Toute forme  $\omega \in \Omega^k(V)$  s'écrit de manière unique

$$\omega = \sum_I \omega_I dx^I,$$

où  $I = (1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n)$  parcourt les multi-indices ordonnés,  $\omega_I : V \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction lisse et  $dx^I = dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ . Nous interprétons  $\omega_I$  comme un élément de  $\Omega^0(V)$  et l'expression  $\omega_I dx^I$  comme  $\omega_I \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ . La  $\mathbb{R}$ -linéarité et les propriétés (DIFFÉRENTIELLE), (DÉRIVATION) (cf. Exercice 59) et (DIFFÉRENTIELLE HOMOLOGIQUE) impliquent alors que

$$(5.9) \quad d\omega = \sum_I d\omega_I \wedge dx^I.$$

Ceci démontre l'unicité de  $d$ . Pour l'existence,

*nous prenons la formule (5.9) comme définition de  $d$ .*

La propriété (DIFFÉRENTIELLE) est satisfaite par définition. La propriété (DÉRIVATION) est une conséquence directe du fait que la différentielle des fonctions satisfait la règle de Leibniz. La propriété (DIFFÉRENTIELLE HOMOLOGIQUE) est satisfaite grâce au fait que chaque  $\omega_I$  est lisse, en particulier de classe  $C^2$ , et vérifie donc le théorème de Schwarz de commutation des dérivées secondes :  $\partial^2 \omega_I / \partial x^i \partial x^j = \partial^2 \omega_I / \partial x^j \partial x^i$

pour tous  $i, j$ . En effet, pour  $\omega = \sum_I \omega_I dx^I$  nous avons :

$$\begin{aligned}
d(d\omega) &= d\left(\sum_I d\omega_I \wedge dx^I\right) \\
&= d\left(\sum_I \left(\sum_i \frac{\partial \omega_I}{\partial x^i} dx^i\right) \wedge dx^I\right) \\
&= d\left(\sum_{I,i} \frac{\partial \omega_I}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^I\right) \\
&= \sum_{I,i} d\left(\frac{\partial \omega_I}{\partial x^i}\right) dx^i \wedge dx^I \\
&= \sum_{I,i,j} \frac{\partial^2 \omega_I}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge dx^i \wedge dx^I \\
&= \sum_I \left(\sum_{i \neq j} \frac{\partial^2 \omega_I}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge dx^i\right) \wedge dx^I \\
&= \sum_I \left(\sum_{i > j} \frac{\partial^2 \omega_I}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge dx^i + \frac{\partial^2 \omega_I}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \wedge dx^j\right) \wedge dx^I \\
&= \sum_I \left(\sum_{i > j} \left(\frac{\partial^2 \omega_I}{\partial x^j \partial x^i} - \frac{\partial^2 \omega_I}{\partial x^i \partial x^j}\right) dx^j \wedge dx^i\right) \wedge dx^I \\
&= 0.
\end{aligned}$$

La propriété (LOCALISATION) est conséquence de cette même propriété pour la différentielle des fonctions. Enfin, l'on vérifie la propriété (FONCTORIALITÉ) par rapport aux applications lisses  $\varphi : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V' \subset \mathbb{R}^m$  par un calcul direct : le point clé est que, pour toute fonction lisse  $f : V' \rightarrow \mathbb{R}$ , l'on a

$$\varphi^* df = d(f \circ \varphi).$$

En effet, ceci n'est rien d'autre qu'une transcription de la "règle de la chaîne"  $d(f \circ \varphi)(p) = df(\varphi(p)) \circ d\varphi(p)$ . Notons par ailleurs que  $f \circ \varphi = \varphi^* f$  par définition, de sorte que

$$d(f \circ \varphi) = d(\varphi^* f)$$

et donc

$$\varphi^* df = d(\varphi^* f).$$

Soit  $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^m)$  avec  $\varphi^i = x^i \circ \varphi = \varphi^* x^i$ , où  $(x^1, \dots, x^m)$  sont les coordonnées sur  $V'$ . L'on a en particulier  $\varphi^* dx^i = d\varphi^i$ . Pour une forme différentielle générale  $\omega = \sum_I \omega_I dx^I \in \Omega^k(V')$  l'on obtient  $\varphi^* \omega = \sum_I (\omega_I \circ \varphi) d\varphi^{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{i_k}$  et donc, puisque  $d \circ d = 0$ ,

$$d\varphi^* \omega = \sum_I d(\omega_I \circ \varphi) \wedge d\varphi^{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{i_k}.$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned}\varphi^* d\omega &= \varphi^* \sum_I d\omega_I \wedge dx^I \\ &= \sum_I (\varphi^* d\omega_I) \wedge d\varphi^{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi^{i_k}.\end{aligned}$$

En vue de l'égalité  $d(\omega_I \circ \varphi) = \varphi^* d\omega_I$  l'on conclut

$$d\varphi^* \omega = \varphi^* d\omega.$$

Ceci achève la preuve du théorème dans le cas des ouverts de  $\mathbb{R}^n$ .

**Remarque.** L'identité  $d\varphi^* = \varphi^* d$  peut être démontrée de manière plus conceptuelle, quoique essentiellement équivalente, en utilisant le lemme 5.71 ci-dessous (voir aussi l'exercice 61).

*Étape 2 : existence de  $d$  sur les variétés.* Soit  $M$  une variété de dimension  $n$ . Démontrons d'abord l'existence d'un opérateur  $d$  qui satisfait aux propriétés de l'énoncé. Notre guide pour la définition de  $d\omega$ ,  $\omega \in \Omega^k(M)$  sont les propriétés de (LOCALISATION) et (FONCTORIALITÉ). En effet, ces deux propriétés entraînent que, pour toute carte  $(U, \phi)$  sur  $M$ , l'on doit nécessairement avoir

$$(d\omega)|_U = d(\omega|_U) = d(\phi^*(\phi^{-1})^*\omega|_U) = \phi^* d((\phi^{-1})^*\omega|_U).$$

Ici  $(\phi^{-1})^*\omega|_U$  est une forme différentielle sur l'ouvert  $\phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ , dont nous connaissons la valeur de la différentielle extérieure  $d((\phi^{-1})^*\omega|_U) \in \Omega^{k+1}(\phi(U))$ . Celle-ci peut être tirée en arrière par  $\phi$  et fournit une forme de degré  $k+1$  sur  $U$ .

Étant donnée  $\omega \in \Omega^k(M)$ , nous définissons  $d\omega \in \Omega^{k+1}(M)$  comme étant l'unique forme différentielle qui vérifie l'identité

$$(d\omega)|_U := \phi^* d((\phi^{-1})^*\omega|_U)$$

pour toute carte  $(U, \phi)$  sur  $M$ .

Montrons la bonne définition de  $d\omega$  : étant donnée une autre carte  $(V, \psi)$  nous souhaitons montrer l'égalité

$$\phi^* d((\phi^{-1})^*\omega|_{U \cap V}) = \psi^* d((\psi^{-1})^*\omega|_{U \cap V}).$$

Ceci est une conséquence de la (FONCTORIALITÉ) de la différentielle extérieure sur des ouverts de  $\mathbb{R}^n$  :

$$\begin{aligned}\psi^* d((\psi^{-1})^*\omega|_{U \cap V}) &= \phi^*(\phi^{-1})^* \psi^* d((\psi^{-1})^* \phi^*(\phi^{-1})^*\omega|_{U \cap V}) \\ &= \phi^*(\psi \circ \phi^{-1})^* d((\phi \circ \psi^{-1})^*(\phi^{-1})^*\omega|_{U \cap V}) \\ &= \phi^* d((\psi \circ \phi^{-1})^*(\phi \circ \psi^{-1})^*(\phi^{-1})^*\omega|_{U \cap V}) \\ &= \phi^* d((\phi^{-1})^*\omega|_{U \cap V}).\end{aligned}$$

Nous avons utilisé la propriété de (FONCTORIALITÉ) dans la troisième égalité, pour le difféomorphisme de changement de carte  $\psi \circ \phi^{-1}$ . La dernière égalité découle de ce que  $\psi \circ \phi^{-1} = (\phi \circ \psi^{-1})^{-1}$ .

**Remarque.** De manière explicite, notre définition de  $d\omega$  est telle que, si  $\omega|_U = \sum_I \omega_I dx^I$  dans une carte locale  $(U, \phi = (x^1, \dots, x^n))$ , alors

$$(d\omega)|_U = \sum_I d\omega_I \wedge dx^I.$$

Les cinq propriétés (DIFFÉRENTIELLE), (DÉRIVATION), (DIFFÉRENTIELLE HOMOLOGIQUE), (LOCALISATION), et (FONCTORIALITÉ) sont de nature locale et, puisqu'elles sont vérifiées sur des ouverts de  $\mathbb{R}^n$ , elles le sont pour une variété quelconque. C'est un exercice utile que de s'en convaincre.

*Étape 3 : unicité de  $d$  sur les variétés.* L'observation clé est la suivante. Soit  $M$  une variété et  $d : \Omega^*(M) \rightarrow \Omega^{*+1}(M)$  un opérateur qui vérifie (DIFFÉRENTIELLE) et (DÉRIVATION). Pour toute  $\omega \in \Omega^k(M)$ , pour tout ouvert  $U \subseteq M$ , pour tout point  $p \in U$ , et pour toute fonction  $\rho : M \rightarrow [0, 1]$  telle que  $\text{supp}(\rho) \subset U$  et  $\rho = 1$  au voisinage de  $p$ , l'on a

$$d(\rho\omega)_p = d\rho(p) \wedge \omega_p + \rho(p)(d\omega)_p = (d\omega)_p.$$

En d'autres termes, l'on peut calculer  $(d\omega)_p$  en connaissant uniquement les valeurs de  $\omega$  au voisinage de  $p$ .

Une variante de cette observation est la suivante. Soit  $M$  une variété et  $d : \Omega^*(M) \rightarrow \Omega^{*+1}(M)$  qui vérifie les propriétés (DIFFÉRENTIELLE) et (DÉRIVATION). Soit  $U \subseteq M$  fixé. Pour toute forme  $\omega \in \Omega^k(U)$  et pour toute fonction  $\rho : M \rightarrow [0, 1]$  avec  $\text{supp}(\rho) \subset U$ , l'extension de  $\rho|_U \omega$  par 0 en dehors de  $U$  est une forme différentielle lisse sur  $M$ . On la note  $\rho\omega$ . Alors : pour toute forme  $\omega \in \Omega^k(U)$ , pour tout point  $p \in U$ , pour toutes deux fonctions lisses  $\rho, \chi : M \rightarrow [0, 1]$  dont le support est contenu dans  $U$  et qui valent 1 au voisinage de  $p$ , l'on a

$$d(\rho\omega)_p = d(\chi\omega)_p.$$

En effet, soit  $\sigma : M \rightarrow [0, 1]$  une fonction lisse dont le support est contenu dans un voisinage de  $p$  où  $\rho$  et  $\chi$  valent 1. Alors  $\sigma\rho\omega = \sigma\chi\omega$ . L'observation précédente montre que  $d(\rho\omega)_p = d(\sigma\rho\omega)_p$  et  $d(\chi\omega)_p = d(\sigma\chi\omega)_p$ , ce qui implique  $d(\rho\omega)_p = d(\chi\omega)_p$ .

L'opérateur  $d$  induit donc un opérateur

$$d_U : \Omega^*(U) \rightarrow \Omega^{*+1}(U)$$

via

$$(d_U\omega)_p := d(\rho_p\omega)_p, \quad p \in U,$$

où  $\rho_p : M \rightarrow [0, 1]$  est une fonction lisse dont le support est contenu dans  $U$  et qui vaut 1 au voisinage de  $p$ . Une vérification directe montre

que  $d_U$  satisfait les conditions (DIFFÉRENTIELLE), (DÉRIVATION) et (DIFFÉRENTIELLE HOMOLOGIQUE) (exercice!).

Supposons maintenant que  $(U, \phi)$  est un ouvert de carte. L'on peut transporter  $d_U$  en un opérateur  $d_{\phi(U)} : \Omega^*(\phi(U)) \rightarrow \Omega^{*+1}(\phi(U))$  via

$$d_{\phi(U)}\alpha := (\phi^{-1})^*d_U(\phi^*\alpha),$$

ou encore

$$d_U\omega = \phi^*d_{\phi(U)}((\phi^{-1})^*\omega).$$

L'opérateur  $d_{\phi(U)}$  satisfait alors également les conditions (DIFFÉRENTIELLE), (DÉRIVATION) et (DIFFÉRENTIELLE HOMOLOGIQUE). Par l'unicité de la différentielle extérieure (notée  $d_{ext}$ ) sur  $\phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$  démontrée à l'étape 1, nous obtenons

$$d_{\phi(U)} = d_{ext},$$

et donc

$$d_U\omega = \phi^*d_{ext}((\phi^{-1})^*\omega).$$

Ainsi l'opérateur  $d$  sur  $M$  coïncide avec la différentielle extérieure que nous avons défini à l'étape 2.

Ceci démontre l'unicité de la différentielle extérieure sur les variétés et achève la preuve du théorème.  $\square$

5.5.4. *Cohomologie de De Rham.* Le but de ce paragraphe est de donner une ouverture vers la cohomologie de De Rham. Disons-le d'emblée : ce n'est qu'une fenêtre ouverte vers un *continent mathématique*, celui de la topologie algébrique et des méthodes homologiques. Le lecteur est encouragé à lire au moins un livre de topologie algébrique et au moins un livre d'algèbre homologique. Voici quelques exemples, qui reflètent mes goûts personnels :

- R. Bott et L. Tu, *Differential forms in algebraic topology*, GTM, Springer.
- M. Greenberg, J. Harper, *Algebraic topology - a first course*, Benjamin/Cummings.
- W. Fulton, *Algebraic topology - a first course*, GTM, Springer.
- G. Bredon, *Geometry and Topology*, GTM, Springer.
- C. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge University Press.
- R. Godement, *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Hermann.
- J.-L. Loday, *Cyclic homology*, Springer.
- A. Grothendieck, “Sur quelques points d'algèbre homologique”, *Tohoku Math. J. (2)* 9 : 2 (1957), 119–221. C'est un article historique. <http://projecteuclid.org/euclid.tmj/1178244839>

Soit  $M$  une variété. Le point de départ de notre discussion est la question de savoir si une forme différentielle donnée  $\omega \in \Omega^k(M)$  admet ou pas une primitive, i.e. une forme  $\eta \in \Omega^{k-1}(M)$  telle que  $d\eta = \omega$ . Clairement, la condition  $d \circ d = 0$  entraîne qu'une condition nécessaire pour l'existence d'une primitive est que  $d\omega = 0$ . Ceci motive la définition suivante.

**Définition 5.58.** *Une forme  $\omega \in \Omega^k(M)$  est dite fermée si elle vérifie*

$$d\omega = 0,$$

*et elle est dite exacte s'il existe  $\eta \in \Omega^{k-1}(M)$  telle que*

$$d\eta = \omega.$$

On note

$$\begin{aligned} Z^k(M) &:= \{\omega \in \Omega^k(M) : \omega \text{ fermée}\} \\ &= \ker(d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)) \subseteq \Omega^k(M). \end{aligned}$$

Ceci est un sous-espace vectoriel de  $\Omega^k(M)$  que l'on appelle *espace des cocycles* ou, par abus de langage, *espace des cycles*. On note aussi

$$\begin{aligned} B^k(M) &:= \{\omega \in \Omega^k(M) : \omega \text{ exacte}\} \\ &= \operatorname{im}(d : \Omega^{k-1}(M) \rightarrow \Omega^k(M)) \subseteq Z^k(M). \end{aligned}$$

(Par convention  $\Omega^i(M) = 0$  pour  $i < 0$ .) Ceci est un sous-espace vectoriel de  $Z^k(M)$  que l'on appelle *espace des cobords* ou, par abus de langage, *espace des bords*.

**Définition 5.59.** *Le groupe de cohomologie de De Rham en degré  $k$  est l'espace vectoriel quotient*

$$\begin{aligned} H^k(M) &:= \frac{Z^k(M)}{B^k(M)} \\ &= \frac{\ker d : \Omega^k \rightarrow \Omega^{k+1}}{\operatorname{im} d : \Omega^{k-1} \rightarrow \Omega^k}. \end{aligned}$$

On note la classe d'un élément  $\omega \in Z^k(M)$  par

$$[\omega] \in H^k(M)$$

et on l'appelle classe de cohomologie de  $\omega$ .

Par définition, deux formes fermées  $\omega, \omega'$  définissent la même classe de cohomologie si et seulement si  $\omega' = \omega + d\eta$  pour une certaine forme  $\eta$ . Noter que, si  $\dim M = n$ , alors  $H^k(M) = 0$  pour  $k \notin \{0, \dots, n\}$ , simplement parce-que  $\Omega^k(M) = 0$  en ces degrés.

Le point de vue suivant est omniprésent en topologie algébrique. Une suite d'espaces vectoriels et de morphismes d'espaces vectoriels

$$(C^*, d) := (\dots \xrightarrow{d} C^{k-1} \xrightarrow{d} C^k \xrightarrow{d} C^{k+1} \xrightarrow{d} \dots)$$

s'appelle *complexe différentiel*, ou *complexe différentiel cohomologique*, ou *complexe de cochaines*, si l'on a

$$d \circ d = 0,$$

i.e.  $\operatorname{im}(d : C^{k-1} \rightarrow C^k) \subseteq \ker(d : C^k \rightarrow C^{k+1})$  en chaque degré  $k$ . Le *groupe de cohomologie de  $(C^*, d)$  en degré  $k$* , ou  *$k$ -ème groupe de cohomologie de  $(C^*, d)$* , noté  $H^k(C^*, d)$ , est l'espace vectoriel quotient

$$H^k(C^*, d) := \frac{\ker d : C^k \rightarrow C^{k+1}}{\operatorname{im} d : C^{k-1} \rightarrow C^k}.$$

Avec cette terminologie, les groupes de cohomologie de De Rham sont les groupes de cohomologie du complexe différentiel ( $\dim M = n$ )

$$(\Omega^*(M), d) = (0 \rightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega^n(M) \rightarrow 0).$$

Voici un premier exemple de calcul.

**Proposition 5.60.** *Étant donnée une variété  $M$ , l'on a*

$$H^0(M) = \prod_{\text{composantes connexes de } M} \mathbb{R}.$$

*Démonstration.* Une 0-forme, i.e. une fonction, est de différentielle nulle si et seulement si elle est localement constante. Ainsi  $Z^0(M)$  est un produit de droites réelles indexé par les composantes connexes de  $M$ . Par ailleurs  $B^0(M) = 0$  puisque  $\Omega^{-1}(M) = 0$  par convention.  $\square$

Le résultat précédent s'insère dans le contexte plus large de l'identification canonique

$$H^k\left(\coprod_i M_i\right) \cong \prod_i H^k(M_i).$$

Cette identification découle directement de la définition.

Nous énonçons sans démonstration deux autres exemples importants.

**Proposition 5.61** (“Lemme de Poincaré”). *Pour tout ouvert convexe  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  l'on a*

$$H^k(U) = \begin{cases} \mathbb{R}, & k = 0, \\ 0, & k \neq 0. \end{cases}$$

$\square$

**Proposition 5.62.** *Les groupes de cohomologie de De Rham de la sphère  $S^n$  vérifient*

$$\dim H^k(S^n) = \begin{cases} 1, & k = 0 \text{ ou } k = n, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

$\square$

Ce dernier calcul peut être réinterprété à la lumière du résultat général suivant.

**Proposition 5.63.** *Soit  $M^n$  une variété compacte de dimension  $n$  orientée sans bord. Il existe un isomorphisme canonique*

$$H^n(M) \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}, \quad [\omega] \mapsto \int_M \omega.$$

$\square$

La bonne définition de l'application  $[\omega] \mapsto \int_M \omega$  est une conséquence du théorème de Stokes : étant donné un autre représentant  $\omega'$  de  $\omega$ , il existe  $\eta \in \Omega^{n-1}(M)$  telle que  $\omega' = \omega + d\eta$ . Puisque  $\partial M = \emptyset$ , l'on obtient par le théorème de Stokes

$$\int_M d\eta = \int_{\partial M} \eta|_{\partial M} = 0,$$

de sorte que  $\int_M \omega' = \int_M \omega$ .

De manière heuristique, l'on pense parfois au groupe de cohomologie  $H^k(M)$  comme étant une mesure du “nombre de trous  $k$ -dimensionnels linéairement indépendants dans  $M$ ” (penser à l'exemple de  $S^n$ ).

Le résultat suivant peut être démontré en utilisant la théorie de Morse.

**Théorème 5.64.** *Soit  $M$  variété compacte connexe sans bord. Alors*

$$\dim H^k(M) < \infty, \quad k = 0, \dots, n.$$

□

Ceci devrait venir comme une grande surprise : les groupes de cohomologie de De Rham sont des quotients d'espaces vectoriels de dimension infinie, et pourtant ils sont de dimension finie. C'est un gage de calculabilité, et aussi un signe du fait que les groupes de cohomologie de De Rham pourraient admettre une interprétation en termes combinatoires. C'est effectivement le cas (théorème de De Rham).

Notons

$$H^*(M) := \bigoplus_k H^k(M).$$

C'est un espace vectoriel gradué.

**Proposition 5.65.** *Le produit extérieur des formes différentielles induit un produit commutatif au sens gradué sur  $H^*(M)$  via*

$$[\omega] \wedge [\eta] := [\omega \wedge \eta].$$

□

La preuve de cette proposition consiste en une vérification directe, en utilisant la propriété de (DÉRIVATION) de la différentielle extérieure.

On appelle

$$(H^*(M), \wedge)$$

*l'algèbre de cohomologie de De Rham.*

La propriété la plus importante de l'algèbre de cohomologie de De Rham est sa functorialité.

**Proposition 5.66.** *Toute application lisse*

$$\varphi : N \rightarrow M$$

*induit un morphisme d'algèbres commutatives graduées*

$$\varphi^* : H^*(M) \rightarrow H^*(N), \quad [\omega] \mapsto [\varphi^*\omega].$$

*De plus,*

$$(\varphi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \varphi^*$$

*et*

$$(\text{Id}_M)^* = \text{Id}_{H^*(M)}.$$

*Démonstration.* Notons par le même symbole  $\varphi^* : \Omega^*(M) \rightarrow \Omega^*(N)$  le tiré en arrière des formes différentielles. Si  $\omega$  est fermée alors  $\varphi^*\omega$  est fermée puisque  $d\varphi^* = \varphi^*d$ . Cette même relation assure que la classe de cohomologie de  $\varphi^*\omega$  ne dépend que de la classe de cohomologie de  $\omega$ . Le fait que l'application induite  $\varphi^* : H^*(M) \rightarrow H^*(N)$  soit un morphisme

d'algèbres découle du fait que  $\varphi^* : \Omega^*(M) \rightarrow \Omega^*(N)$  est un morphisme d'algèbres.  $\square$

L'on dit que *l'algèbre de cohomologie de De Rham est un foncteur (contravariant) depuis la catégorie VarDiff des variétés différentielles lisses vers la catégorie CGAlg des algèbres commutatives graduées*. Nous allons voir dans la section suivante une application du caractère fonctoriel de la cohomologie de De Rham.

Un *foncteur (contravariant)  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$*  depuis une catégorie  $\mathcal{C}$  vers une catégorie  $\mathcal{D}$  est une application qui associe à chaque objet  $x$  dans  $\mathcal{C}$  un objet  $F(x)$  dans  $\mathcal{D}$ , et à chaque morphisme  $\varphi \in \mathcal{C}(x, y)$  un morphisme  $F(\varphi) \in \mathcal{D}(y, x)$  de manière à ce que

$$(5.10) \quad F(\varphi \circ \psi) = F(\psi) \circ F(\varphi)$$

et

$$F(\text{Id}_x) = \text{Id}_{F(x)}.$$

(Le foncteur est dit “contravariant” puisqu’il renverse l’ordre de la composition dans (5.10). Les foncteurs qui préservent l’ordre de la composition sont dits “covariants”.)

La notion de foncteur doit être pensée heuristiquement comme étant la formalisation mathématique de la notion de *dictionnaire*. Dans notre cas, la cohomologie de De Rham associe à tout énoncé formulé en termes de variétés et applications lisses un énoncé formulé en termes d'algèbres commutatives graduées et morphismes d'algèbres : c'est un “dictionnaire” de la géométrie vers l'algèbre. Si l'énoncé algébrique est faux, l'énoncé géométrique est nécessairement faux aussi. Ceci constitue un moyen efficace d'étudier la question de la classification des variétés à difféomorphismes près : deux variétés difféomorphes doivent avoir des algèbres de cohomologie de De Rham isomorphes. Exemple d'application : la sphère  $S^{2n}$  et l'espace projectif complexe  $\mathbb{C}P^n$  ne sont pas difféomorphes. En effet, l'algèbre de cohomologie de De Rham de  $S^{2n}$  est isomorphe à  $\mathbb{R}[x]/x^2$ ,  $|x| = 2n$ , alors que l'algèbre de cohomologie de De Rham de  $\mathbb{C}P^n$  est isomorphe à  $\mathbb{R}[x]/x^{n+1}$ ,  $|x| = 2$ .

Bien évidemment, nul dictionnaire n'est parfait : il existe des variétés non-difféomorphes qui ont des algèbres de cohomologie de De Rham isomorphes. D'autres invariants de nature algébrique sont nécessaires !

5.5.5. *Théorème de Stokes.* Dans cette section nous démontrons le théorème 5.32 : pour toute variété  $M$  de dimension  $n \geq 1$  orientée à bord et toute  $n - 1$ -forme à support compact sur  $M$  l'on a

$$(5.11) \quad \int_M d\omega = \int_{\partial M} \iota^* \omega,$$

où

$$\iota : \partial M \hookrightarrow M$$

est l'inclusion. Nous donnons aussi une application topologique, à savoir le théorème de Brouwer.

Notons d'emblée le cas particulier important suivant du théorème de Stokes, que nous avons déjà utilisé : pour toute variété  $M$  de dimension  $n \geq 1$  orientée *sans bord* et toute  $n - 1$ -forme à support compact sur  $M$  l'on a

$$\int_M d\omega = 0.$$

*Démonstration de la formule (5.11).* Nous donnons la preuve en trois étapes. La première concerne les ouverts de  $\mathbb{R}_+^n$ . Elle est calculatoire et fait intervenir de manière essentielle une intégration par parties pour une intégrale sur  $\mathbb{R}$ . Les deux dernières étapes sont formelles (quoique profondes !) : elles reposent sur la functorialité des constructions introduites jusqu'ici.

*Étape 1 : le cas des ouverts  $U \subset \mathbb{R}_+^n$  munis de l'orientation  $[(e_1, \dots, e_n)]$  donnée par la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .* La forme  $\omega$  s'écrit

$$\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx^1 \wedge \dots \widehat{dx^i} \dots \wedge dx^n,$$

où le symbole  $\widehat{\phantom{x}}$  signifie que l'on omet le terme en question. Ici les  $\omega_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$  sont des fonctions lisses à support compact. L'on obtient

$$d\omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n,$$

de sorte que

$$\int_U d\omega = \sum_{i=1}^n \int_U (-1)^{i-1} \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i} dx,$$

le membre de droite désignant l'intégrale par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $U$ .

Puisque le support de  $\omega$  est compact l'on peut supposer sans perte de généralité que ce dernier est un produit d'intervalles

$$U = I_1 \times \dots \times I_n,$$

avec  $I_i = ]a_i, b_i[$ ,  $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ ,  $a_i < b_i$  et  $I_n = [0, b_n[$ ,  $b_n > 0$ , chaque  $\omega_i$  étant définie sur  $\bar{U} = \bar{I}_1 \times \dots \times \bar{I}_n$ . En appliquant le théorème de Fubini et en intégrant par parties l'on obtient pour  $1 \leq i \leq n-1$  :

$$\begin{aligned} \int_U \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i} dx &= \int_{I_1 \times \dots \times \hat{I}_i \times \dots \times I_n} \int_{I_i} \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i} dx^i dx_{I_1 \times \dots \times \hat{I}_i \times \dots \times I_n} \\ &= \int_{I_1 \times \dots \times \hat{I}_i \times \dots \times I_n} \left[ \omega_i(x^1, \dots, x^{i-1}, \cdot, x^{i+1}, \dots, x^n) \right]_{a_i}^{b_i} dx_{I_1 \times \dots \times \hat{I}_i \times \dots \times I_n} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ici  $dx_{I_1 \times \dots \times \hat{I}_i \times \dots \times I_n}$  désigne la mesure de Lebesgue sur le produit d'intervalles  $I_1 \times \dots \times \hat{I}_i \times \dots \times I_n$ , et l'on a utilisé le fait que  $\omega_i$  est à support compact dans  $U$ .

Pour  $i = n$  l'on obtient par un calcul similaire :

$$\begin{aligned} \int_U \frac{\partial \omega_n}{\partial x^n} dx &= \int_{I_1 \times \dots \times I_{n-1}} \int_{I_n} \frac{\partial \omega_n}{\partial x^n} dx^n dx_{I_1 \times \dots \times I_{n-1}} \\ &= \int_{I_1 \times \dots \times I_{n-1}} \left[ \omega_n(x^1, \dots, x^{n-1}, \cdot) \right]_0^{b_n} dx_{I_1 \times \dots \times I_{n-1}} \\ &= - \int_{I_1 \times \dots \times I_{n-1}} \omega_n(x^1, \dots, x^{n-1}, 0) dx_{I_1 \times \dots \times I_{n-1}}. \end{aligned}$$

En conclusion

$$\int_U d\omega = (-1)^n \int_{I_1 \times \dots \times I_{n-1}} \omega_n(x^1, \dots, x^{n-1}, 0) dx_{I_1 \times \dots \times I_{n-1}}.$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} \int_{\partial U = I_1 \times \dots \times I_{n-1} \times \{0\}} \iota^* \omega &= \int_{\partial U = I_1 \times \dots \times I_{n-1} \times \{0\}} \sum_i \iota^* \omega_i dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n \\ &= \int_{\partial U} \iota^* \omega_n dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1} \\ &= (-1)^n \int_{I_1 \times \dots \times I_{n-1}} \omega_n(x^1, \dots, x^{n-1}, 0) dx_{I_1 \times \dots \times I_{n-1}}. \end{aligned}$$

Dans la deuxième égalité nous utilisons le fait que  $\iota^*(dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n) = 0$  pour  $1 \leq i \leq n$  puisque  $\iota^* dx^n = 0$ . Dans la troisième égalité nous utilisons le fait que l'orientation sur  $\partial U \subset \partial \mathbb{R}_+^n$  induite par l'orientation  $[(e_1, \dots, e_n)]$  diffère par  $(-1)^n$  de l'orientation donnée par la base canonique  $[(e_1, \dots, e_{n-1})]$  dans  $\mathbb{R}^{n-1}$  (cf. §5.5.1).

Ceci achève la démonstration de l'étape 1.

*Étape 2* :  $M = U$  ouvert de carte  $(U, \phi)$  sur une variété orientée  $N$ . Comme déjà annoncé, cette étape est purement formelle. Nous pouvons supposer sans perte de généralité que  $\phi$  est une carte qui envoie l'orientation de  $U$  sur l'orientation  $[(e_1, \dots, e_n)]$  de  $\phi(U)$ . Soit

$j : \partial\phi(U) \hookrightarrow \phi(U)$  l'inclusion, de sorte que  $\phi \circ \iota = j \circ \phi|_{\partial U}$ . En utilisant la définition de l'intégrale nous obtenons successivement

$$\begin{aligned}
\int_U d\omega &= \int_{\phi(U)} (\phi^{-1})^* d\omega \\
&= \int_{\phi(U)} d((\phi^{-1})^* \omega) \\
&= \int_{\partial\phi(U)} j^* (\phi^{-1})^* \omega \\
&= \int_{\partial\phi(U)} (\phi|_{\partial U}^{-1})^* \iota^* \omega \\
&= \int_{\partial U} \iota^* \omega.
\end{aligned}$$

Dans la troisième égalité nous avons utilisé l'étape 1.

*Étape 3 : le cas d'une variété  $M$  orientée arbitraire.* Soit  $\{(U_i, \phi_i)\}$  un atlas compatible avec l'orientation, i.e. tel que les déterminants des différentielles de toutes les applications de changement de carte soient positifs, et tel que chaque  $\phi_i$  envoie l'orientation de  $U_i$  sur l'orientation  $[(e_1, \dots, e_n)]$  de  $\phi_i(U_i) \subseteq \mathbb{R}^n$ . Soit  $\{\rho_i\}$  une partition de l'unité subordonnée au recouvrement  $(U_i)$  de la variété  $M$ . L'on note  $incl : \partial U_i \hookrightarrow U_i$  l'inclusion, sans spécifier l'indice  $i$ . Nous obtenons successivement

$$\begin{aligned}
\int_M d\omega &= \int_M d\left(\sum_i \rho_i\right) \omega \\
&= \sum_i \int_M d(\rho_i \omega) \\
&= \sum_i \int_{U_i} d(\rho_i \omega) \\
&= \sum_i \int_{\partial U_i} incl^* (\rho_i \omega) \\
&= \sum_i \int_{\partial M} \iota^* \rho_i \iota^* \omega \\
&= \int_{\partial M} \left(\sum_i \iota^* \rho_i\right) \iota^* \omega \\
&= \int_{\partial M} \iota^* \omega.
\end{aligned}$$

Dans la troisième et dans la cinquième égalité nous utilisons le fait que  $\text{supp}(\rho_i) \subset U_i$ , respectivement  $\text{supp}(incl^* \rho_i) \subset \partial U_i$ . Dans la quatrième égalité nous utilisons l'étape 2. Dans la dernière égalité nous

utilisons le fait que  $\{incl^* \rho_i\}$  est une partition de l'unité subordonnée au recouvrement de  $\partial M$  par les ouverts de carte  $(\partial U_i, \phi|_{\partial U_i})$ .  $\square$

APPLICATION : LE THÉORÈME DE POINT FIXE DE BROUWER.

Soit  $B^n$  la boule unité fermée dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$  et  $S^{n-1} = \partial B^n$  la sphère unité.

**Théorème 5.67** (Brouwer (1910)). *Toute application continue  $\varphi : B^n \rightarrow B^n$  possède un point fixe.*

Le théorème de point fixe de Brouwer est l'un des grands théorèmes de topologie dans  $\mathbb{R}^n$ . C'est par ailleurs l'un des plus robustes théorèmes de point fixe qui existent. Nous allons le démontrer comme conséquence du résultat suivant.

**Théorème 5.68.** *Il n'existe pas d'application lisse  $f : B^n \rightarrow S^{n-1}$  telle que  $f|_{S^{n-1}} = \text{Id}_{S^{n-1}}$  (on appelle une telle application rétracte de  $B^n$  sur  $S^{n-1}$ ).*

*Démonstration.* Supposons qu'il existe une telle rétracte et notons-là

$$f = (f^1, \dots, f^n) : B^n \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

avec

$$\sum_i (f^i)^2 = 1$$

et  $f^i|_{S^{n-1}} = x^i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Soit  $\iota : S^{n-1} \hookrightarrow B^n$  l'inclusion et munissons  $B^n$  de l'orientation  $[(e_1, \dots, e_n)]$  définie par la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ . Considérons les  $(n-1)$ -formes différentielles

$$\omega := x^1 dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n, \quad \eta := f^1 df^2 \wedge \dots \wedge df^n$$

définies sur  $B^n$ .

D'un côté nous avons  $\iota^* \omega = \iota^* \eta$ , de sorte que

$$\int_{S^{n-1}} \iota^* \omega = \int_{S^{n-1}} \iota^* \eta.$$

D'un autre côté, le théorème de Stokes implique

$$\int_{S^{n-1}=\partial B^n} \iota^* \omega = \int_{B^n} d\omega = \int_{B^n} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = m(B^n) > 0,$$

avec  $m$  la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^n$ , et

$$\int_{S^{n-1}=\partial B^n} \iota^* \eta = \int_{B^n} d\eta = \int_{B^n} df^1 \wedge \dots \wedge df^n = 0.$$

En effet, la relation  $\sum_i (f^i)^2 = 1$  implique par différentiation  $\sum_i 2f^i df^i = 0$ , de sorte que les 1-formes  $df^1, \dots, df^n$  sont linéairement dépendantes et donc  $df^1 \wedge \dots \wedge df^n = 0$ .

Ceci fournit une contradiction et achève la démonstration.  $\square$

*Démonstration du théorème 5.67.*

*Étape 1 : réduction au cas lisse.* Supposons qu'il existe une application continue  $\varphi : B^n \rightarrow B^n$  sans point fixe. Puisque  $B^n$  est compacte l'on trouve  $\epsilon > 0$  tel que

$$|\varphi(x) - x| \geq \epsilon, \quad x \in B^n.$$

Toute application continue définie sur un compact de  $\mathbb{R}^n$  peut être approximée uniformément par des applications lisses. Il existe donc  $\psi : B^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  lisse telle que

$$\|\varphi - \psi\|_\infty \leq \frac{\epsilon}{100}.$$

En particulier  $\psi$  prend ses valeurs dans la boule de rayon  $1 + \frac{\epsilon}{100}$  et, quitte à composer  $\psi$  avec une homothétie appropriée, l'on trouve une application lisse  $\psi : B^n \rightarrow B^n$  telle que

$$\|\varphi - \psi\|_\infty \leq \frac{\epsilon}{50}.$$

En particulier  $|\psi(x) - x| \geq \frac{\epsilon}{2}$  pour tout  $x \in B^n$  et donc  $\psi$  n'a pas de point fixe.

*Étape 2 : preuve du théorème dans le cas lisse.* Supposons qu'il existe  $\psi : B^n \rightarrow B^n$  lisse sans point fixe. Nous construisons alors une application lisse  $f : B^n \rightarrow S^{n-1}$  telle que  $f|_{S^{n-1}} = \text{Id}_{S^{n-1}}$ , ce qui contredit le théorème 5.68.

L'application  $f$  est construite de la manière suivante : pour  $x \in B^n$  le point  $f(x) \in S^{n-1}$  est défini comme étant l'intersection de  $S^{n-1}$  avec la demi-droite affine d'origine  $\psi(x)$  passant par  $x$  (Figure 5). La lissité de  $f$  est vue par un calcul explicite : nous avons  $f(x) = \psi(x) + \lambda(x - \psi(x))$ , avec  $\lambda > 0$  uniquement déterminé par la condition

$$\|\psi(x) + \lambda(x - \psi(x))\|^2 = 1.$$

Cette dernière équation équivaut à l'équation du second degré

$$\lambda^2 \|x - \psi(x)\|^2 + 2\lambda \langle \psi(x), x - \psi(x) \rangle + \|\psi(x)\|^2 - 1 = 0,$$

dont le discriminant est

$$\Delta = 4(\langle \psi(x), x - \psi(x) \rangle^2 - \|x - \psi(x)\|^2(\|\psi(x)\|^2 - 1)).$$

Puisque  $\|\psi(x)\|^2 - 1 \leq 0$  nous obtenons directement

$$\Delta \geq 4\langle \psi(x), x - \psi(x) \rangle^2 \geq 0.$$

L'unique racine positive de l'équation est alors donnée par la formule

$$\lambda := \frac{-2\langle \psi(x), x - \psi(x) \rangle + \sqrt{\Delta}}{2\|x - \psi(x)\|^2},$$

fonction lisse du point  $x \in B^n$ . On en déduit que  $f$  est lisse.  $\square$

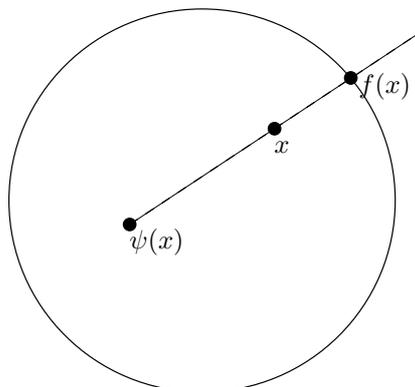


FIGURE 5. Théorème de Brouwer.

Nous concluons ce paragraphe en présentant une démonstration du théorème 5.68 basée sur la cohomologie de De Rham.

*Démonstration alternative du théorème 5.68.* Supposons qu'il existe une application lisse  $f : B^n \rightarrow S^{n-1}$  telle que  $f|_{S^{n-1}} = \text{Id}_{S^{n-1}}$ . Si l'on note  $\iota : S^{n-1} \hookrightarrow B^n$  l'inclusion, cette dernière condition équivaut alors à

$$f \circ \iota = \text{Id}_{S^{n-1}}.$$

Au niveau des groupes de cohomologie de De Rham nous obtenons  $\iota^* f^* = \text{Id}_{H^*(S^{n-1})}$ , et en particulier un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^{n-1}(S^{n-1}) & \xrightarrow{f^*} & H^{n-1}(B^n) \\ & \searrow \text{Id} & \downarrow \iota^* \\ & & H^{n-1}(S^{n-1}) \end{array}$$

Or  $H^{n-1}(B^n) = 0$  (variante de la Proposition 5.61) et  $H^{n-1}(S^{n-1}) \neq 0$  (Proposition 5.62 ou Proposition 5.63). Ceci est une contradiction, puisqu'il n'est pas possible pour l'identité d'un espace vectoriel non-trivial de factoriser à travers un espace vectoriel nul.  $\square$

**Remarque.** Il est utile de comparer les deux preuves du théorème 5.68 : la deuxième preuve est beaucoup plus conceptuelle et illustre parfaitement la puissance des outils cohomologiques tels la cohomologie de De Rham.

**5.6. Compléments sur la différentielle extérieure. Calcul de Lie.** Notre but principal dans cette section est de démontrer la formule globale suivante pour la différentielle extérieure. Au passage nous allons discuter la dérivée de Lie, le produit intérieur et la formule de Cartan.

**Proposition 5.69.** *Soient  $M$  une variété,  $\omega \in \Omega^k(M)$  et  $X_0, \dots, X_k \in \mathcal{X}(M)$  des champs de vecteurs sur  $M$ . Alors*

$$\begin{aligned} d\omega(X_0, \dots, X_k) &= \sum_i (-1)^i \omega(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_k) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_k). \end{aligned}$$

Certaines des preuves dans cette section sont seulement esquissées, mais vous avez tous les éléments pour les reconstruire. Au besoin, consulter la bibliographie.

**5.6.1. Dérivations.** Soit  $A = (A_*, \wedge)$  une algèbre commutative graduée et soit  $M = M_*$  un  $A$ -bimodule gradué, i.e. un espace vectoriel gradué qui est un module à droite et à gauche sur  $A$  tel que  $A_k \cdot M_\ell \subseteq M_{k+\ell}$  et  $M_\ell \cdot A_k \subseteq M_{k+\ell}$ .

Une *dérivation de degré  $d \in \mathbb{Z}$  sur  $A$  à valeurs dans  $M$*  est une application linéaire

$$D : A_* \rightarrow M_{*+d}$$

qui vérifie la règle de Leibniz

$$D(a \wedge b) = D(a) \cdot b + (-1)^{|a| \cdot d} a \cdot D(b).$$

L'on note  $|D| = d$ .

Dans le cas particulier important où  $M = A$ , on note l'ensemble des dérivations de degré  $d$  de  $A$  dans  $A$  par  $\text{Der}_d(A)$ , et

$$\text{Der}_*(A) := \bigoplus_d \text{Der}_d(A).$$

C'est un espace vectoriel gradué.

Étant donnée deux dérivations  $D, D' \in \text{Der}_*(A)$ , l'on définit leur *crochet* par

$$[D, D'] := DD' - (-1)^{|D| \cdot |D'|} D'D.$$

L'on vérifie directement que  $[D, D']$  est bien une dérivations, de degré  $|D| + |D'|$ .

**Proposition 5.70.** *Le couple  $(\text{Der}_*(A), [\cdot, \cdot])$  définit une algèbre de Lie graduée. Ceci signifie que  $[\text{Der}_k(A), \text{Der}_\ell(A)] \subseteq \text{Der}_{k+\ell}(A)$  et le crochet vérifie la relation d'anti-symétrie graduée*

$$[D, D'] = -(-1)^{|D| \cdot |D'|} [D', D],$$

ainsi que l'identité de Jacobi graduée

$$(-1)^{|D| \cdot |D''|} [D, [D', D'']] + \text{permutations cycliques} = 0.$$

*Démonstration* : vérification directe.  $\square$

**Lemma 5.71.** Soient  $D, D'$  deux dérivations de l'algèbre des formes différentielles  $(\Omega^*(M), \wedge)$  sur une variété  $M$ . L'on a

$$D = D'$$

si et seulement si  $D$  et  $D'$  coïncident sur  $\Omega^0(M) \oplus \Omega^1(M)$ . Si  $D$  et  $D'$  commutent avec  $d$ , alors  $D = D'$  si et seulement si  $D$  et  $D'$  coïncident sur  $\Omega^0(M)$ .

*Démonstration.* Supposons que  $D = D'$  sur  $\Omega^0(M) \oplus \Omega^1(M)$ . En particulier  $D$  et  $D'$  ont même degré. Par récurrence,  $D$  et  $D'$  coïncident sur la sous-algèbre engendrée par  $\Omega^0(M) \oplus \Omega^1(M)$ . Or cette dernière est égale à  $\Omega^*(M)$  : étant donné un atlas  $\{(U_i, \phi_i = (x_i^1, \dots, x_i^n))\}$  et une partition de l'unité  $\{\rho_i\}$  subordonnée au recouvrement  $(U_i)$  de  $M$ , toute forme  $\omega$  s'écrit

$$\omega = \sum_i \rho_i \omega = \sum_i \rho_i \sum_I \omega_{i,I} dx_i^I = \sum_{i,I} \rho_i \omega_{i,I} dx_i^I.$$

Cette dernière expression appartient à la sous-algèbre engendrée par  $\Omega^0(M) \oplus \Omega^1(M)$ . En effet, pour chaque  $i$  choisissons une fonction lisse  $\chi_i : M \rightarrow [0, 1]$  telle que  $\text{supp}(\chi_i) \subset U_i$  et  $\chi_i = 1$  sur  $\text{supp}(\rho_i)$ . Pour un multi-indice  $I = (i_1 < \dots < i_k)$  nous avons  $\rho_i \omega_I dx_i^I = \rho_i (\chi_i)^k \omega_I dx_i^I = (\rho_i \omega_I) (\chi_i dx^{i_1}) \wedge \dots \wedge (\chi_i dx^{i_k})$ . Or  $\rho_i \omega_I$  et les  $\chi_i dx^{i_j}$ ,  $j = 1, \dots, k$  peuvent être regardées comme une fonction, respectivement des 1-formes globalement définies sur  $M$ , par extension avec 0 en dehors de  $U_i$ .

Supposons maintenant que  $D$  et  $D'$  commutent avec  $d$  et coïncident sur  $\Omega^0(M)$ . Elles sont en particulier de même degré. Il suffit de montrer qu'elles coïncident sur  $\Omega^1(M)$ . Le calcul précédent montre qu'il suffit de prouver que, pour un ouvert de carte  $(U, \phi = (x^1, \dots, x^n))$  et  $\rho : M \rightarrow [0, 1]$  une fonction lisse avec  $\text{supp}(\rho) \subset U$ , les dérivations  $D$  et  $D'$  prennent les mêmes valeurs sur  $\rho dx^i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . L'on a

$$\rho dx^i = d(\rho x^i) - x^i d\rho.$$

Soit  $\chi : M \rightarrow [0, 1]$  lisse avec  $\text{supp}(\chi) \subset U$  et  $\chi = 1$  sur  $\text{supp}(\rho)$ . Alors  $x^i d\rho = \chi x^i d\rho$  et  $D(x^i d\rho) = D((\chi x^i) d\rho) = D'((\chi x^i) d\rho) = D'(x^i d\rho)$ . Dans la deuxième égalité nous avons utilisé la règle de Leibniz et le fait que  $D$  et  $D'$  commutent avec  $d$ . (Le fait d'avoir introduit la fonction  $\chi$  permet de regarder  $x^i$  comme fonction globalement définie sur  $M$  en la remplaçant par  $\chi x^i$ .) Par ailleurs  $D(d(\rho x^i)) = D'(d(\rho x^i))$ , ce qui démontre que

$$D(\rho dx^i) = D'(\rho dx^i).$$

$\square$

**Exercice 61.** Soit  $\varphi : N \rightarrow M$  une application lisse entre variétés. Montrer l'identité

$$d\varphi^* = \varphi^*d$$

en utilisant le lemme 5.71.

### 5.6.2. Dérivée de Lie.

**Définition 5.72.** Soit  $M$  une variété,  $X \in \mathcal{X}(M)$  un champ de vecteurs et  $\omega \in \Omega^k(M)$  une  $k$ -forme différentielle. La dérivée de Lie de  $\omega$  dans la direction de  $X$ , notée  $L_X\omega$ , est la  $k$ -forme différentielle

$$(L_X\omega)_p := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}((\varphi_X^t)^*\omega)_p, \quad p \in M.$$

L'exercice suivant fournit une intuition quant à la signification de la dérivée de Lie.

**Exercice 62.** Soit  $\omega = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$  la "forme volume euclidienne" sur  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $X \in \mathcal{X}(\mathbb{R}^n)$  un champ de vecteurs. Montrer que le flot  $\varphi_X^t$  préserve la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^n$  pour tout  $t$  si et seulement si

$$L_X\omega = 0.$$

**Proposition 5.73.** La dérivée de Lie

$$L_X : \Omega^*(M) \rightarrow \Omega^*(M)$$

est une dérivation de degré 0 de  $(\Omega^*(M), \wedge)$  qui commute avec  $d$ , i.e.

$$L_X(\omega \wedge \eta) = (L_X\omega) \wedge \eta + \omega \wedge (L_X\eta)$$

et

$$L_X \circ d = d \circ L_X.$$

*Démonstration :* vérification directe. □

**Proposition 5.74.** Soient  $M$  une variété,  $\omega \in \Omega^k(M)$  et  $X_1, \dots, X_k \in \mathcal{X}(M)$ . La dérivée de Lie vérifie l'identité

$$\begin{aligned} L_X(\omega(X_1, \dots, X_k)) &= (L_X\omega)(X_1, \dots, X_k) \\ &\quad + \sum_i \omega(X_1, \dots, L_X X_i, \dots, X_k). \end{aligned}$$

*Démonstration :* vérification directe en utilisant la règle de Leibniz et la définition

$$L_X(\omega(X_1, \dots, X_k))_p = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \omega(X_1, \dots, X_k) \circ \varphi_X^t(p),$$

où  $\varphi_X^t$  est le flot de  $X$ . □

### 5.6.3. Produit intérieur.

**Définition 5.75.** Soit  $M$  une variété,  $X \in \mathcal{X}(M)$  un champ de vecteurs et  $\omega \in \Omega^k(M)$  une  $k$ -forme différentielle. Le produit intérieur de  $\omega$  par  $X$ , noté  $\iota_X \omega$ , est la  $k - 1$ -forme différentielle

$$(\iota_X \omega)(X_1, \dots, X_{k-1}) := \omega(X, X_1, \dots, X_{k-1}).$$

**Proposition 5.76.** Le produit intérieur

$$\iota_X : \Omega^*(M) \rightarrow \Omega^{*-1}(M)$$

est une dérivation de degré  $-1$  de  $(\Omega^*(M), \wedge)$ , i.e.

$$\iota_X(\omega \wedge \eta) = (\iota_X \omega) \wedge \eta + (-1)^{|\omega|} \omega \wedge (\iota_X \eta).$$

*Démonstration :* vérification directe. □

**Proposition 5.77** (Formule de Cartan). Pour tout champ de vecteurs  $X$  sur une variété l'on a la relation

$$L_X = [d, \iota_X],$$

i.e.  $L_X = d \circ \iota_X + \iota_X \circ d$ .

*Démonstration.* Les deux membres de cette identité sont des dérivations de degré 0 qui commutent avec  $d$  : pour le membre de droite l'on a  $[d, \iota_X]d = d\iota_X d = d[d, \iota_X]$ . Il suffit de montrer qu'ils coïncident sur  $\Omega^0(M)$ . Or, pour toute fonction  $f \in \Omega^0(M)$  l'on a

$$L_X f = X(f)$$

et

$$[d, \iota_X]f = \iota_X df = df(X).$$

□

### 5.6.4. Formule globale pour la différentielle extérieure.

*Démonstration de la proposition 5.69.* La preuve se fait par récurrence sur  $k$  en utilisant la formule de Cartan et la formule globale 5.74 pour la dérivée de Lie. Nous nous limitons ici à rendre explicites les cas  $k = 0$  et  $k = 1$  et laissons au lecteur le soin de compléter les autres détails de la preuve.

Pour  $k = 0$  la formule se réduit à l'identité bien connue

$$df(X_0) = X_0(f)$$

pour toute fonction  $f \in \Omega^0(M)$ .

Pour  $k = 1$  nous avons par la proposition 5.74 et la formule de Cartan

$$\begin{aligned} L_{X_0}(\omega(X_1)) &= (L_{X_0}\omega)(X_1) + \omega(L_{X_0}X_1) \\ &= (\iota_{X_0}d\omega)(X_1) + (d\iota_{X_0}\omega)(X_1) + \omega([X_0, X_1]) \\ &= d\omega(X_0, X_1) + d(\omega(X_0)) \cdot X_1 + \omega([X_0, X_1]) \\ &= d\omega(X_0, X_1) + X_1(\omega(X_0)) + \omega([X_0, X_1]). \end{aligned}$$

Puisque  $L_{X_0}(\omega(X_1)) = X_0(\omega(X_1))$  nous obtenons

$$d\omega(X_0, X_1) = X_0(\omega(X_1)) - X_1(\omega(X_0)) - \omega([X_0, X_1]),$$

ce qui est la formule recherchée.  $\square$

Nous concluons ce paragraphe avec un exercice utile concernant la dérivée de Lie.

**Exercice 63.** Soit  $\omega_t$ ,  $t \in \mathbb{R}$  une famille lisse de formes différentielles de degré  $k$  sur une variété  $M$ . Soit  $X$  un champ de vecteurs (supposé complet pour simplifier). Montrer l'identité

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0}(\varphi_X^t)^*\omega_t = (\varphi_X^{t_0})^*(L_X\omega_{t_0} + \dot{\omega}_{t_0}),$$

où

$$\dot{\omega}_{t_0} = \frac{d}{dt}\Big|_{t=t_0}\omega_t.$$

**Remarque.** Le “calcul de Lie”, qui désigne globalement l'ensemble des identités que nous avons démontrées dans cette section, est fort utile dans la pratique. Il joue en particulier un rôle important pour établir les premières propriétés de la cohomologie de De Rham.

REMARQUE FINALE : CE QUE J'AURAIS ENCORE SOUHAITÉ INCLURE DANS CES NOTES DE COURS. Le contenu de ces notes reflète fidèlement ce que nous avons traité en cours pendant la période s'étalant de septembre à décembre 2014 (48h de cours). Les questions suivantes auraient naturellement trouvé leur place, si encore nous avions eu plus de temps à disposition :

- quelques notions de théorie de Morse (tels par exemple les sections I.1, I.2, et I.3 du livre de Milnor, *Morse theory*). J'ai brièvement évoqué la théorie de Morse dans une digression à la fin du paragraphe 5.5.1.

- un chapitre concernant les courbes dans  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$ , les surfaces dans  $\mathbb{R}^3$ , et les différentes notions de courbure qui vont avec. Ce sont des sujets importants pour préparer votre future lecture d'un cours de géométrie riemannienne. Je vous encourage vivement à consulter par exemple le livre de M. do Carmo, *Differential geometry of curves and surfaces*, Prentice-Hall, 1976.

- quelque calculs supplémentaires de cohomologie de De Rham. Vous pourrez en trouver un certain nombre dans les notes de cours de F. Paulin.

- une discussion de la cohomologie de De Rham des groupes de Lie. Vous pouvez en trouver une présentation par exemple au paragraphe V.12 de l'ouvrage de G. Bredon, *Topology and Geometry*.

FIN DU COURS.

ANNEXE A. COURBES DANS  $\mathbb{R}^2$ 

**Définition A.1.** On appelle courbe (lisse) une variété lisse de dimension 1.

L'on dira parfois aussi *courbe géométrique lisse* au lieu de *courbe lisse* pour mieux accentuer la différence avec la notion de courbe paramétrée définie plus bas.

Exemples.

- Cercle  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = R^2\}$ ,  $R > 0$ .
- Ellipse  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$ ,  $a, b > 0$ .
- Parabole  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$ .
- Hyperbole  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = R^2\}$ ,  $R > 0$ .

**Remarque.** Les exemples précédents sont des exemples de *courbes algébriques réelles*, i.e. des sous-variétés de  $\mathbb{R}^2$  (ou  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ ) décrites comme lieu des zéros d'un polynôme à coefficients réels  $P(X, Y) \in \mathbb{R}[X, Y]$  (respectivement comme lieu des zéros d'un système polynomial submersif de  $n - 1$  polynômes à coefficients réels  $P_1, \dots, P_{n-1} \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ ).

Exemples.

- Pour tout  $a \in \mathbb{R}$  le lieu d'intersection du cylindre droit de rayon 1 avec le plan  $z = a$  est une courbe dans  $\mathbb{R}^3$  (cercle de rayon 1)

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, \quad z = a\}.$$

- Pour tout  $a \in \mathbb{R}$  le lieu d'intersection de l'hyperbolide à une nappe  $x^2 + y^2 = z^2 + 1$  avec le plan  $z = a$  est une courbe dans  $\mathbb{R}^3$  (cercle de rayon  $\sqrt{1 + a^2}$ )

$$C_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0, \quad z = a\}.$$

- Pour tout  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , l'intersection du paraboloid hyperbolique  $x^2 - y^2 = z$  avec le plan  $z = a$  est une courbe dans  $\mathbb{R}^3$  (hyperbole)

$$H_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y^2 - z = 0, \quad z = a\}.$$

(Que se passe-t-il pour  $a = 0$ ?)

**Définition A.2.** Soit  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle et  $M$  une variété. Une application lisse  $c : I \rightarrow M$  est appelée courbe paramétrée dans  $M$ .

Le cas qui nous intéressera surtout ici est celui où  $M = \mathbb{R}^n$ . Dans cette situation  $c$  est identifiée à un vecteur  $(c^1, \dots, c^n)$  dont les composantes sont des fonctions  $c^i : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ; la lissité de  $c$  équivaut par définition à la lissité de ses *coordonnées*  $c^i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Étant donnée une courbe  $C$  dans  $\mathbb{R}^n$ , elle admet toujours une paramétrisation locale – c'est l'une des définitions équivalentes de la notion de sous-variété. Une telle paramétrisation locale est par définition

une courbe paramétrée  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  qui est un plongement sur un ouvert de  $C$ . Ceci signifie que  $\text{im}(c) \subset C$  est un ouvert, que la différentielle de  $c$  est injective en tout point, et que  $c$  est un homéomorphisme sur son image.

À toute courbe paramétrée  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  l'on associe en tout point  $t \in I$  son *vecteur vitesse*

$$\dot{c}(t) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{s=t} c(s) = \left( \frac{dc^1}{dt}(t), \dots, \frac{dc^n}{dt}(t) \right).$$

Le vecteur vitesse doit être interprété comme direction infinitésimale de mouvement le long de la courbe  $c$ .

**Remarque.** Tout vecteur  $v \in \mathbb{R}^n$  est vecteur vitesse en  $t_0$  d'une courbe paramétrée définie au voisinage de  $t_0 \in \mathbb{R}$  et passant à l'instant  $t_0$  par un point  $p_0 \in \mathbb{R}^n$  fixé. En effet, il suffit de considérer la courbe paramétrée  $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $c(t) = (t - t_0)v + p_0$ . Cette observation est à la source de la définition de l'espace tangent à une variété différentielle comme ensemble de classes d'équivalences de courbes lisses pour une relation d'équivalence appropriée. Avec cette définition, si  $c : I \rightarrow M$  est une courbe paramétrée dans une variété  $M$ , son vecteur vitesse en un point  $t \in I$  est le vecteur dans  $T_{c(t)}M$  donné par la classe d'équivalence de  $c$ .

Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  nous avons

$$dc(t)\lambda = \left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} c(t + \lambda\epsilon) = \lambda\dot{c}(t).$$

Ainsi une courbe paramétrée  $c$  est une immersion en  $t$  si et seulement si  $\dot{c}(t) \neq 0$ .

**Définition A.3.** Une courbe paramétrée  $c : I \rightarrow M$  est dite régulière si  $\dot{c}(t) \neq 0$  pour tout  $t \in I$ .

Autrement dit, une courbe régulière est la même chose qu'une immersion  $I \rightarrow M$ . Par conséquent, une courbe régulière est toujours localement injective.

**Remarque - exercice.** L'image d'une courbe régulière  $c$  n'est pas nécessairement une courbe géométrique lisse. Il y a deux phénomènes qui peuvent empêcher cela : la non-injectivité de  $c$  et le fait de ne pas être un homéomorphisme sur son image.

Donner des exemples de courbes régulières  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  qui satisfont les propriétés suivantes :

(a)  $c$  n'est pas injective et son image n'est pas une sous-variété de  $\mathbb{R}^2$ .

(a')  $c$  n'est pas injective et son image est une sous-variété de  $\mathbb{R}^2$ .

(b)  $c$  est injective et son image n'est pas une sous-variété de  $\mathbb{R}^2$ .

(b')  $c$  est injective et son image est une sous-variété de  $\mathbb{R}^2$ .

(c)  $c$  n'est pas un homéomorphisme sur son image et son image n'est pas une sous-variété de  $\mathbb{R}^2$ .

(c')  $c$  n'est pas un homéomorphisme sur son image et son image est une sous-variété de  $\mathbb{R}^2$ .

Montrer que si  $c$  est un plongement (immersion et homéomorphisme sur son image) alors  $\text{im}(c)$  est une sous-variété de  $\mathbb{R}^2$ .

Toute immersion est localement un plongement. Par conséquent, les images d'intervalles ouverts suffisamment petits à la source par une courbe régulière sont des sous-variétés au but.

**Remarque.** L'on peut démontrer que toute sous-variété connexe de dimension 1 dans  $\mathbb{R}^n$  est difféomorphe à la droite réelle  $\mathbb{R}$  (le cas non-compact) ou au cercle  $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  (le cas compact). Par conséquent, toute sous-variété connexe  $C$  de dimension 1 dans  $\mathbb{R}^n$  est image d'une courbe régulière (non-injective si  $C$  est compacte).

**Remarque - exercice.** L'image d'une courbe paramétrée dans  $\mathbb{R}^n$  dont la dérivée s'annule en un point a toutes les chances de ne pas être une sous-variété. Démontrer que le graphe  $\Gamma$  de la fonction  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto |x|$  n'est pas une sous-variété de  $\mathbb{R}^2$ . Construire une courbe lisse  $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  telle que  $\text{im}(c) = \Gamma$ . Construire une telle courbe qui est injective et homéomorphisme sur son image! (Indication : l'on pourra commencer par construire une fonction lisse décroissante  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $f = 1$  sur  $] - \infty, -1]$ ,  $f > 0$  sur  $] - \infty, 0[$ ,  $f = 0$  sur  $[0, \infty[$ .)

**Définition A.4.** Soit  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  une courbe paramétrée de classe  $C^1$ . La longueur de  $c$  est par définition

$$L(c) = \int_I \|\dot{c}(t)\| dt \in [0, \infty].$$

L'intégrale est entendue ici au sens de Lebesgue, ou encore au sens d'une intégrale de Riemann impropre (l'intervalle  $I$  est ouvert). L'on voit en particulier qu'une courbe paramétrée est de longueur nulle si et seulement si elle est constante.

La justification de cette expression est fournie par le résultat suivant, qui exprime  $L(c)$  comme limite des approximations de  $c$  par des lignes polygonales dans  $\mathbb{R}^n$ .

**Exercice.** On appelle *ligne polygonale s'appuyant sur la courbe paramétrée*  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  une suite  $\mathbf{t} = (t_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ , avec  $t_k \in I$ ,  $t_k \leq t_{k+1}$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \sup I$ ,  $\lim_{k \rightarrow -\infty} t_k = \inf I$ . La longueur d'une ligne polygonale  $\mathbf{t}$  est par définition

$$L(\mathbf{t}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|c(t_k) - c(t_{k-1})\|.$$

Démontrer l'égalité

$$L(c) = \limsup \{L(\mathbf{t}) : \mathbf{t} \text{ ligne polygonale s'appuyant sur } c\}.$$

Dans l'exercice précédent il est nécessaire de travailler avec des lignes polygonales ayant une infinité de sommets à cause du fait que nous avons supposé l'intervalle  $I$  comme étant ouvert. Si l'on travaillait en restriction à un intervalle compact  $[a, b] \subset I$ , il suffirait de considérer des lignes polygonales finies (quoique l'on devrait laisser tendre le nombre de sommets vers l'infini pour atteindre la limite supérieure des longueurs  $L(\mathbf{t})$ ).

**Définition A.5.** Une courbe  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  est paramétrée par la longueur de l'arc si

$$\forall t \in I, \quad \|\dot{c}(t)\| = 1.$$

La justification de cette définition est claire : pour une courbe paramétrée par la longueur de l'arc, la longueur au but se lit à la source :

$$\forall [a, b] \subset I, \quad L(c|_{[a,b]}) = b - a.$$

**Proposition A.6.** Soit  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  une courbe régulière. Il existe un intervalle  $J \subset \mathbb{R}$  et un difféomorphisme croissant

$$h : J \rightarrow I$$

tels que  $c \circ h$  soit paramétrée par la longueur de l'arc. De plus, les intervalles  $J$  et les difféomorphismes  $h$  ayant cette propriété sont uniquement déterminés à translation : pour toute autre paire  $(\tilde{J}, \tilde{h})$  telle que  $\tilde{h} : \tilde{J} \rightarrow I$  soit un difféomorphisme croissant et  $c \circ \tilde{h}$  soit paramétrée par la longueur de l'arc, il existe un unique  $\alpha_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $\tilde{J} = \alpha_0 + J$  et  $\tilde{h}(\tau) = h(\tau - \alpha_0)$  pour tout  $\tau \in \tilde{J}$ .

*Démonstration.* L'on cherche  $h : J \rightarrow I$  difféomorphisme croissant tel que  $\|c \circ \dot{h}\| = 1$ . En vue de  $c \circ \dot{h}(\tau) = \dot{c}(h(\tau))h'(\tau)$ , ceci équivaut à

$$h'(\tau) = \frac{1}{\|\dot{c}(h(\tau))\|}.$$

Fixons  $\tau_0 \in \mathbb{R}$  et  $t_0 \in I$ . L'équation différentielle ci-dessus admet au voisinage de  $\tau_0$  une unique solution telle que  $h(\tau_0) = t_0$  et l'on définit  $J$  comme étant son intervalle maximal de définition. Le couple  $(J, h)$  vérifie bien les conditions souhaitées. L'unicité découle de l'unicité des solutions d'équations différentielles ordinaires avec condition de Cauchy.

Alternativement, l'on peut chercher la fonction  $k = h^{-1}$ . L'équation  $c \circ \dot{k}^{-1}(\tau) = \dot{c}(k^{-1}(\tau))\frac{1}{k'(k^{-1}(\tau))}$  montre que la condition d'être paramétré par la longueur de l'arc pour  $c \circ k^{-1}$  équivaut à ce que la fonction  $k$  vérifie l'équation différentielle

$$k'(t) = \|\dot{c}(t)\|.$$

Soient  $t_0 \in I$  et  $\tau_0 \in \mathbb{R}$ . Cette équation différentielle a une unique solution telle que  $k(t_0) = \tau_0$ , à savoir

$$k(t) = \int_{t_0}^t \|\dot{c}(s)\| ds + \tau_0.$$

Posons  $J = ]a, b[$  avec  $a = \int_{t_0}^{\inf I} \|\dot{c}(s)\| ds + \tau_0$  et  $b = \int_{t_0}^{\sup I} \|\dot{c}(s)\| ds + \tau_0$ . Puisque  $k' > 0$  l'on déduit que  $k : I \rightarrow J$  est un difféomorphisme croissant, et il en est de même pour  $h = k^{-1} : J \rightarrow I$ .

Pour toute autre solution  $\tilde{k}$  de l'équation  $k' = \|\dot{c}\|$  il existe un unique  $\alpha_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $\tilde{k}(t) = k(t) + \alpha_0$ . En notant  $\tau = \tilde{k}(t) \in \tilde{J}$  pour  $t$  arbitraire l'on obtient  $\tilde{h}(\tau) = \tilde{k}^{-1}(\tau) = k^{-1}(\tau - \alpha_0) = h(\tau - \alpha_0)$ . Clairement  $\tilde{J} = \alpha_0 + J$ .  $\square$

La paramétrisation d'une courbe régulière par la longueur de l'arc nous permet de décrire de manière plus fine certaines propriétés locales de la courbe. Nous nous restreignons maintenant aux courbes régulières dans  $\mathbb{R}^2$ .

**Définition A.7.** Soit  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe paramétrée par la longueur de l'arc. L'on appelle courbure de  $c$  au point  $t$  la norme du vecteur d'accélération  $\ddot{c}(t) = \frac{d}{dt}\dot{c}(t)$ , notée

$$\kappa(t) = \|\ddot{c}(t)\|.$$

Plus généralement, si  $c$  est une courbe paramétrée régulière quelconque, l'on définit la courbure de  $c$  au point  $t$  comme la courbure d'une paramétrisation par la longueur de l'arc  $c \circ h$  au point  $\tau$  tel que  $h(\tau) = t$ . Puisque deux paramétrisations par la longueur de l'arc coïncident à translation près, la définition précédente fait sens. Par ailleurs, si l'on renverse le sens de parcours de la courbe en considérant  $\bar{c}(t) = c(-t)$  l'on voit que la courbure reste inchangée puisque  $\ddot{\bar{c}}(t) = \ddot{c}(-t)$ . Ainsi, pour toute courbe géométrique lisse  $C \subset \mathbb{R}^2$  l'on peut définir sa courbure en un point  $p \in C$  en considérant une paramétrisation locale (par la longueur de l'arc) au voisinage de  $p$  et en appliquant la définition précédente.

**Exercice 64.** Soit  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe régulière quelconque. Montrer que la courbure de  $c$  en un point  $t \in I$  est égale à

$$(A.1) \quad \kappa(t) = \frac{1}{\|\dot{c}(t)\|^2} \left\| \ddot{c}(t) - \left\langle \ddot{c}(t), \frac{\dot{c}(t)}{\|\dot{c}(t)\|} \right\rangle \frac{\dot{c}(t)}{\|\dot{c}(t)\|} \right\|.$$

**Exemple.** Soit  $R > 0$  et  $C = \{p \in \mathbb{R}^2 : \|p - p_0\| = R\}$  le cercle de rayon  $R$  et centre  $p_0 \in \mathbb{R}^2$ . La courbure de  $C$  en tout point  $p$  vaut  $\frac{1}{R}$ . En effet, soit  $c(t) = p_0 + (R \cos \frac{t}{R}, R \sin \frac{t}{R})$  une paramétrisation locale de  $C$  par la longueur de l'arc au voisinage d'un point  $p \in C$ . L'on calcule

$$\dot{c}(t) = \left(-\sin \frac{t}{R}, \cos \frac{t}{R}\right), \quad \ddot{c}(t) = \left(-\frac{1}{R} \cos \frac{t}{R}, -\frac{1}{R} \sin \frac{t}{R}\right),$$

de sorte que  $\kappa(t) = \|\ddot{c}(t)\| = \frac{1}{R}$ .

L'on donne maintenant une interprétation géométrique de la courbure comme rayon du *cercle osculateur*, le cercle qui réalise la *meilleure tangence* avec la courbe en un point donné.

**Définition A.8.** Soient  $C, C' \subset \mathbb{R}^2$  deux courbes géométriques et  $\ell \geq 1$  un entier. L'on dit que  $C$  et  $C'$  ont un contact d'ordre au moins  $\ell$  en un point d'intersection  $p$  s'il existe des paramétrisations locales  $c, c'$  au voisinage de  $p = c(t_0) = c'(t'_0)$  ayant le même jet d'ordre  $\ell$ , c'est-à-dire telles que

$$c^{(k)}(t_0) = c'^{(k)}(t'_0), \quad 0 \leq k \leq \ell.$$

Dans la situation précédente, l'on dit aussi que les deux courbes paramétrées  $c$  et  $c'$  ont un contact d'ordre au moins  $\ell$ . Cette définition fait aussi sens pour des courbes paramétrées non-régulières.

**Proposition A.9.** La courbure est un invariant d'ordre 2 : si deux courbes lisses ont un contact d'ordre  $\geq 2$  en un point  $p$ , leurs courbures respectives en  $p$  sont égales.

*Démonstration.* Ceci découle de la définition de l'ordre de contact et de la formule (A.1).  $\square$

Dans l'énoncé qui suit l'on se donne une courbe régulière  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , un point  $t_0 \in I$  et l'on note  $C_0 \subset \mathbb{R}^2$  l'image par  $c$  d'un voisinage ouvert  $I_0$  de  $t_0$ , supposé être suffisamment petit pour que  $C_0$  soit une sous-variété de  $\mathbb{R}^2$ . L'on note  $p_0 = c(t_0)$  et  $\kappa_0 \geq 0$  la courbure de  $c$  en  $t_0$ . Par convention  $\frac{1}{0} = \infty$  et un cercle de rayon infini est une droite.

**Proposition A.10.** Il existe un unique cercle dans  $\mathbb{R}^2$  ayant un contact d'ordre  $\geq 2$  avec  $C_0$  en  $p_0$ . On l'appelle cercle osculateur à  $C_0$  en  $p_0$ . Son rayon est égal à  $\frac{1}{\kappa_0}$  et son centre est situé sur la droite normale à  $c$  au point  $p_0$ , à distance  $\frac{1}{\kappa_0}$  dans la direction de la composante normale de  $\ddot{c}(t_0)$ .

*Démonstration.* Nous allons traiter le cas  $\kappa_0 > 0$ . Le cas  $\kappa_0 = 0$  est laissé en exercice au lecteur.

Considérons une reparamétrisation de  $c$  par la longueur de l'arc, notée  $\tilde{c} = c \circ h$ , avec  $t_0 = h(\tau_0)$ . L'on vérifie alors l'égalité

$$\ddot{\tilde{c}}(\tau) = \frac{1}{\|\dot{\tilde{c}}(h(\tau))\|^2} \left( \ddot{c}(h(\tau)) - \langle \ddot{c}(h(\tau)), \frac{\dot{\tilde{c}}(h(\tau))}{\|\dot{\tilde{c}}(h(\tau))\|} \rangle \frac{\dot{\tilde{c}}(h(\tau))}{\|\dot{\tilde{c}}(h(\tau))\|} \right).$$

Le membre à l'intérieur de la parenthèse à droite désigne la composante normale de  $\ddot{c}$ , alors que  $\ddot{\tilde{c}}$  est sa propre composante normale. Puisque ces deux vecteurs diffèrent par un multiple positif, on en déduit qu'ils pointent dans la même direction.

*Existence.* Soit  $\tilde{c}$  une reparamétrisation de  $c$  par la longueur de l'arc, avec  $\tilde{c}(\tau_0) = p_0$ . Le centre du cercle donné par l'énoncé est

$$O = p_0 + \frac{1}{\kappa_0} \frac{\ddot{\tilde{c}}(\tau_0)}{\|\ddot{\tilde{c}}(\tau_0)\|} = p_0 + \frac{1}{\kappa_0^2} \ddot{\tilde{c}}(\tau_0).$$

Son rayon étant  $\frac{1}{\kappa_0}$ , une paramétrisation par la longueur de l'arc est donnée par

$$\alpha(\theta) = O + \frac{1}{\kappa_0} (\cos \theta \kappa_0, \sin \theta \kappa_0).$$

Soit  $\theta_0$  tel que  $\alpha(\theta_0) = p_0$ , c'est-à-dire

$$(A.2) \quad \ddot{\tilde{c}}(\tau_0) = -\kappa_0 (\cos \theta_0 \kappa_0, \sin \theta_0 \kappa_0).$$

(La valeur de  $\theta_0$  est uniquement déterminée modulo  $2\pi/\kappa_0$ .)

La courbe  $\alpha$  est paramétrée par la longueur de l'arc, son vecteur vitesse en  $\theta = \theta_0$  est unitaire et orthogonal à la droite  $(Op_0)$ . Il en est de même pour le vecteur vitesse de  $\tilde{c}$  en  $t_0$ , et on en déduit que nécessairement

$$\dot{\alpha}(\theta_0) = \pm \dot{\tilde{c}}(t_0).$$

Quitte à remplacer la paramétrisation  $\alpha$  de notre cercle par la paramétrisation opposée  $\theta \mapsto \alpha(-\theta)$ , l'on peut donc supposer que

$$\dot{\alpha}(\theta_0) = \dot{\tilde{c}}(t_0),$$

c'est-à-dire que les courbes  $\alpha$  et  $\tilde{c}$  ont un contact d'ordre  $\geq 1$  en  $p_0$ .

La condition de contact d'ordre  $\geq 2$  pour  $\tilde{c}$  et  $\alpha$  est automatiquement satisfaite puisque

$$\ddot{\alpha}(\theta_0) = \kappa_0 (-\cos \theta_0 \kappa_0, -\sin \theta_0 \kappa_0) = \ddot{\tilde{c}}(t_0),$$

la dernière égalité découlant de (A.2).

*Unicité.* Soit  $\mathcal{C}$  un cercle ayant un contact d'ordre  $\geq 2$  avec  $C_0$  en  $p_0$ . En particulier  $\mathcal{C}$  et  $C_0$  ont la même droite tangente en  $p_0$ . Puisque la tangente en un point à un cercle est orthogonale à la droite qui relie le centre du cercle au point, on en déduit que le centre de  $\mathcal{C}$  doit nécessairement être situé sur la droite normale à  $C_0$  au point  $p_0$ . Il existe une famille à un paramètre de tels cercles. La Proposition A.9 assure que la courbure de  $\mathcal{C}$  en  $p_0$  doit nécessairement être égale à  $\kappa_0$ , de sorte que le rayon de  $\mathcal{C}$  doit nécessairement être égal à  $1/\kappa_0$ . Il y a exactement deux cercles qui satisfont cette condition. Le fait que seulement un de ces deux cercles peut avoir un contact d'ordre  $\geq 2$  avec  $C_0$  est vérifié par un calcul direct laissé au soin du lecteur, ou bien en utilisant la notion de courbure avec signe discutée plus bas.  $\square$

#### DIGRESSION : COURBURE AVEC SIGNE.

La question que nous voulons aborder maintenant est celle de raffiner la courbure d'une courbe régulière dans  $\mathbb{R}^2$  en lui associant un signe.

En géométrie les signes proviennent en général du fait de travailler avec des espaces vectoriels réels orientés.

**Définition A.11.** Soient  $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$  et  $\mathcal{B}' = (v'_1, v'_2)$  deux bases de  $\mathbb{R}^2$ . On dit que  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  définissent la même orientation si la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$  est de déterminant positif. Dans le cas contraire, l'on dit que  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  définissent des orientations opposées. Une orientation de  $\mathbb{R}^2$  est une classe d'équivalence de bases pour la relation "définir la même orientation". L'orientation canonique de  $\mathbb{R}^2$  est la classe d'équivalence de la base canonique  $((1, 0), (0, 1))$ . Une base qui définit l'orientation canonique est aussi dite positivement orientée.

Soit  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  une courbe régulière. Pour tout  $t \in I$  la droite normale en  $t$  à  $c$ , ou normale en  $t$  à  $c$ , est définie comme étant la droite affine  $c(t) + \dot{c}(t)^\perp$ . Autrement dit, c'est la droite affine passant par  $c(t)$  dirigée par la droite vectorielle constituée de tous les vecteurs perpendiculaires à  $\dot{c}(t)$ . La normale en  $t$  contient deux générateurs distingués, à savoir les deux générateurs unitaires de  $\dot{c}(t)^\perp$ .

*Question : y a-t-il un moyen de choisir un parmi ces deux générateurs ?*

*Réponse : oui, en utilisant la notion d'orientation.*

En effet, l'on note  $\nu(t)$  l'unique vecteur de norme 1 orthogonal à  $\dot{c}(t)$  tel que la base  $(\dot{c}(t), \nu(t))$  définisse l'orientation canonique de  $\mathbb{R}^2$ , c'est-à-dire tel que la matrice de passage de  $(\dot{c}(t), \nu(t))$  vers la base canonique  $(e_1, e_2)$  de  $\mathbb{R}^2$  soit de déterminant positif. L'on appelle  $\nu(t)$  vecteur normal unitaire à la courbe  $c$  au point  $t$ , ou encore normale unitaire au point  $t$ .

**Exercice 65.** Soit  $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Montrer que pour tout vecteur non-nul  $v \in \mathbb{R}^2$  l'on a  $Jv \perp v$  et la base  $(v, Jv)$  définit la même orientation que la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ . En déduire une formule pour le vecteur normal unitaire à une courbe régulière et en particulier le fait que la fonction  $\nu : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  est lisse.

Il est maintenant aisé de définir une courbure avec signe. Soit  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  une paramétrisation par la longueur de l'arc, de sorte que  $\ddot{c}(t) \perp \dot{c}(t)$  et donc  $\ddot{c}(t)$  est colinéaire à  $\nu(t)$ .

**Définition A.12.** La courbure signée de  $c$  au point  $t$  est l'unique réel  $\tilde{\kappa}(t)$  tel que

$$\ddot{c}(t) = \tilde{\kappa}(t)\nu(t).$$

La fonction  $\tilde{\kappa} : I \rightarrow \mathbb{R}$  est lisse, et l'on a bien  $\kappa(t) = |\tilde{\kappa}(t)|$ .

Une discussion similaire à celle développée pour la courbure montre le résultat suivant :

**Proposition A.13.** *Deux courbes régulières qui ont un contact d'ordre  $\geq 1$  en un point ont la même courbure signée en ce point si et seulement si elles ont un contact d'ordre  $\geq 2$  en ce point.*  $\square$

La démonstration de cette proposition est laissée en exercice au lecteur.

ANNEXE B. SURFACES DANS  $\mathbb{R}^3$ 

**Définition B.1.** *L'on appelle surface une variété lisse de dimension 2.*

Exemples (faire des dessins!).

– Le plan  $\mathbb{R}^2$ , ou encore tout plan affine dans  $\mathbb{R}^3$ .

– La sphère ronde de rayon  $R > 0$  dans  $\mathbb{R}^3$ ,

$$\mathbb{S}^2(R) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}.$$

– L'ellipsoïde  $\mathcal{E} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$ , avec  $a, b, c > 0$ .

– L'hyperboloïde à une nappe  $\mathcal{H}_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 + z^2\}$ .

– L'hyperboloïde à deux nappes  $\mathcal{H}_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = -1 + z^2\}$ .

– Le parabolôïde hyperbolique  $\mathcal{PH} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 - y^2\}$ .

Dans cette section nous nous intéressons aux *surfaces dans*  $\mathbb{R}^3$ , c'est-à-dire aux sous-variétés de dimension 2 dans  $\mathbb{R}^3$ . Plus précisément, nous nous intéressons aux propriétés de ces sous-variétés qui sont *déterminées par le plongement*.

Voici un exemple. Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction lisse. Le *graphe de*  $f$  est la surface

$$\Gamma_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y)\}.$$

Ceci est bien une sous-variété de  $\mathbb{R}^3$  qui possède une paramétrisation globale

$$\psi_f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \Gamma_f, \quad \psi_f(x, y) = (x, y, f(x, y)).$$

En particulier,  $\Gamma_f$  est difféomorphe au plan  $\mathbb{R}^2$  pour tout choix de fonction  $f$ . Néanmoins, la *forme* de  $\Gamma_f$  est très différente selon le choix de fonction. Par exemple, pour  $f = ct$ , le graphe est un plan affine dans  $\mathbb{R}^3$ , pour  $f(x, y) = x^2 - y^2$  le graphe a la forme d'une "selle de cheval", pour  $f(x, y) = y^2$  le graphe a la forme d'une piste de skateboard ou encore celle d'une feuille de papier courbée vers le haut, et pour  $f(x, y) = x^2 + y^2$  le graphe a la forme d'un "puits". Nous souhaitons formaliser ces différences de forme.

Le phénomène mathématique auquel nous nous confrontons ici est le suivant : lorsqu'une variété de dimension 2 est plongée dans  $\mathbb{R}^3$  (comme par exemple  $\mathbb{R}^2$  via l'application  $\psi_f$  ci-dessus), elle hérite d'une structure supplémentaire : chaque espace tangent s'identifie naturellement via le plongement à un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  et hérite d'un produit scalaire induit par le produit scalaire euclidien de  $\mathbb{R}^3$ . De plus, puisque l'espace tangent varie de manière lisse avec le point, ces produits scalaires peuvent être pensés comme variant de manière lisse aussi. (La

donnée dans chaque espace tangent d'une variété d'un produit scalaire qui varie de manière lisse par rapport au point est encore appelé *métrique riemannienne*.)

Dans le cas des courbes, nous avons dégagé une notion de courbure en utilisant la notion de paramétrisation par la longueur de l'arc et en comparant le vecteur d'accélération de la courbe avec le vecteur normal unitaire. En d'autres termes, nous avons étudié la variation locale de la direction de l'espace tangent à la courbe.

Dans le cas des surfaces nous nous proposons à nouveau de comprendre le comportement local de la surface en étudiant la manière dont varie son espace tangent. Pour une surface il n'y a pas de notion analogue à celle de paramétrisation d'une courbe par la longueur de l'arc. Mais la notion de vecteur normal unitaire fait encore sens et va nous fournir un outil commode pour définir une notion de courbure.

Dans la suite on note  $\Sigma^2 \subset \mathbb{R}^3$  une surface dans  $\mathbb{R}^3$  et l'on identifie chaque espace tangent  $T_p\Sigma$  à un plan vectoriel dans  $\mathbb{R}^3$ . L'on note  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  la sphère ronde de rayon 1 centrée en 0. L'espace  $\mathbb{R}^3$  est muni du produit euclidien standard.

**Définition B.2.** *Un champ normal unitaire local sur  $\Sigma$  est une application lisse  $N : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie sur un ouvert  $U \subset \Sigma$  telle que*

$$\forall p \in U, \quad N(p) \perp T_p\Sigma \quad \text{et} \quad \|N(p)\| = 1.$$

Regardée à valeurs dans  $\mathbb{S}^2$ , l'application  $N : U \rightarrow \mathbb{S}^2$  est appelée aussi *application de Gauss (locale)*.

Il existe toujours un champ normal unitaire local au voisinage de tout point  $p \in \Sigma$ . En effet, considérons une paramétrisation locale  $\psi : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \Sigma$  au voisinage de  $p$  et notons  $x = (u, v)$  les coordonnées d'un point dans  $\mathbb{R}^2$ . Les dérivées partielles  $\partial\psi/\partial u, \partial\psi/\partial v : V \rightarrow \mathbb{R}^3$  sont des applications lisses et ont la propriété que  $\partial\psi/\partial u(x), \partial\psi/\partial v(x) \in T_p\Sigma$ ,  $p = \psi(x)$  forment une base de  $T_p\Sigma$ . En utilisant le produit vectoriel  $\wedge : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'on obtient un champ normal unitaire

$$N(p) = \frac{\partial\psi/\partial u(x) \wedge \partial\psi/\partial v(x)}{\|\partial\psi/\partial u(x) \wedge \partial\psi/\partial v(x)\|}, \quad x = \psi^{-1}(p).$$

#### DIGRESSION SUR LE PRODUIT VECTORIEL.

*Produit vectoriel dans  $\mathbb{R}^3$ .* Soient  $v = (v_1, v_2, v_3)$ ,  $w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$ . Leur produit vectoriel  $v \wedge w \in \mathbb{R}^3$  est défini comme étant le vecteur

$$v \wedge w = \left( \begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_3 & v_1 \\ w_3 & w_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \right).$$

L'on retiendra cette formule à l'aide de la règle formelle suivante : le produit vectoriel  $v \wedge w$  est obtenu en développant selon la première

ligne le déterminant

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix},$$

où  $(e_1, e_2, e_3)$  désigne la base orthonormée canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

Le produit vectoriel

$$\wedge : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

est une application bilinéaire ayant les propriétés suivantes :

(i) elle est alternée :  $v \wedge w = -w \wedge v, \forall v, w$ .

(ii)  $v \wedge w = 0$  si et seulement si les vecteurs  $v$  et  $w$  sont linéairement dépendants.

(iii)  $v \wedge w$  est orthogonal à  $v$  et à  $w$ . Ceci est vu en utilisant l'identité

$$\langle v \wedge w, X \rangle = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix},$$

valable pour tout vecteur  $X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ . Nous obtenons en particulier :

(iv)

$$\|v \wedge w\|^2 = \begin{vmatrix} v \wedge w \\ v \\ w \end{vmatrix},$$

avec la convention que les coordonnées des vecteurs  $v \wedge w, v$  et  $w$  constituent les lignes de la matrice dont on calcule le déterminant.

(v) La norme de  $v \wedge w$  est égale à l'aire du parallélogramme construit sur  $v$  et  $w$ . Pour voir cela, rappelons que le volume du parallélépipède construit sur trois vecteurs  $v_1, v_2$  et  $v_3$  est égal à la valeur absolue du

déterminant  $\begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{vmatrix}$ . L'on utilise ensuite le point (iv) et le fait que  $v \wedge w$  est orthogonal à  $v$  et  $w$ .

*Produit vectoriel dans  $\mathbb{R}^n$ .* Etant donnés des vecteurs  $v_1, \dots, v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$  nous définissons par analogie avec le cas  $n = 3$  leur produit vectoriel par

$$v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_{n-1} = \begin{vmatrix} e \\ v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{vmatrix},$$

où  $e = (e_1, \dots, e_n)$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  et la ligne  $v_i$  est constituée des coordonnées du vecteur  $v_i$  dans cette base, la signification de la formule étant que l'on obtient les coordonnées de  $v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1}$  en développant le déterminant selon la première ligne. Le produit vectoriel est une application multilinéaire alternée  $(\mathbb{R}^n)^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , avec la signification que l'interversion de deux arguments équivaut à la multiplication par  $-1$ . Le produit vectoriel de  $n - 1$  vecteurs est nul si et seulement si les vecteurs sont linéairement dépendants ; il est orthogonal à l'espace vectoriel engendré par ces vecteurs ; sa norme est égale au volume  $n - 1$ -dimensionnel du parallélépipède construit sur ces vecteurs.

Le produit vectoriel est considéré habituellement pour  $n \geq 3$ . Mais l'on peut extrapoler au cas  $n = 2$ , qui est aussi intéressant. Soit  $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Son "produit vectoriel" est le vecteur

$$\begin{vmatrix} e_1 & e_2 \\ x & y \end{vmatrix} = (y, -x).$$

Soit

$$J : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'on voit que le "produit vectoriel" d'un vecteur  $v$  est le vecteur  $-Jv$ . L'application linéaire  $J$  vérifie  $J^2 = -\text{Id}$  et n'est rien d'autre que la multiplication par  $i$  via l'identification  $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}$ ,  $(x, y) \mapsto x + iy$ . On l'appelle aussi *structure complexe canonique sur  $\mathbb{R}^2$* .

*Orientation.* Rappelons la définition A.11. Étant donné un vecteur non-nul  $v \in \mathbb{R}^2$ , le vecteur  $-Jv$  est l'unique vecteur orthogonal à  $v$ , de même norme que  $v$ , tel que  $(-Jv, v)$  soit une base positivement orientée de  $\mathbb{R}^2$ . Alternativement,  $Jv$  est l'unique vecteur orthogonal à  $v$ , de même norme que  $v$ , tel que  $(v, Jv)$  soit une base positivement orientée de  $\mathbb{R}^2$ .

Ce type de considération a un analogue en dimension supérieure.

**Définition B.3.** Soit  $V$  un espace vectoriel réel de dimension finie  $n \geq 0$ . Deux bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  de  $V$  définissent la même orientation si la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$  est de déterminant positif. Dans le cas contraire, on dit que  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  définissent des orientations opposées. Une orientation de  $V$  est une classe d'équivalence de bases par rapport à la relation d'équivalence donnée par le fait de définir la même orientation. Étant donnée une orientation de  $V$ , une base de  $V$  qui définit cette orientation est dite positivement orientée.

Il existe exactement deux orientations sur un espace vectoriel  $V$ . Lorsque la dimension de  $V$  est 0, une orientation sur  $V$  est par convention un signe  $\pm 1$ . Lorsque la dimension de  $V$  est 1, les deux orientations

correspondent aux deux composantes connexes de  $V \setminus \{0\}$ . En toute dimension  $n \geq 1$ , le groupe  $GL(n, \mathbb{R})$  agit librement et transitivement sur l'ensemble des bases de  $V$ . Les deux orientations de  $V$  sont respectivement les images d'une base quelconque par chacune des deux composantes connexes de  $GL(n, \mathbb{R})$ .

Sur  $\mathbb{R}^n$  il existe une orientation canonique, à savoir l'orientation déterminée par la base canonique. Une base qui définit l'orientation canonique est dite *positivement orientée*.

Étant donnés des vecteurs linéairement indépendants  $v_1, \dots, v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$ , leur produit vectoriel  $v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1}$  est l'unique vecteur orthogonal à  $\text{Vect}(v_1, \dots, v_{n-1})$ , de norme égale au volume  $(n-1)$ -dimensionnel du parallépipède construit sur ces vecteurs, tel que

$$(v_1 \wedge \dots \wedge v_{n-1}, v_1, \dots, v_{n-1})$$

soit une base positivement orientée. À titre d'exemple, l'on a

$$e_1 \wedge e_2 = e_3 \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^3,$$

et

$$e_1 \wedge \dots \wedge e_{n-1} = (-1)^{n-1} e_n \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^n$$

pour  $n \geq 2$ . Lorsque  $n = 1$  l'on a  $J e_1 = e_2$  et le "produit vectoriel" de  $e_1$  est  $-e_2$ , puisque  $(-e_2, e_1)$  est une base positivement orientée.

FIN DE LA DIGRESSION.

Revenons à l'étude locale des surfaces. L'on se donne donc  $\Sigma^2 \subset \mathbb{R}^3$ , un point  $p \in \Sigma$  et un champ normal unitaire local  $N : U \rightarrow \mathbb{S}^2$  défini sur un ouvert  $U \subset \Sigma$  contenant  $p$ . Nous regardons la différentielle

$$dN(p) : T_p \Sigma \rightarrow T_{N(p)} \mathbb{S}^2$$

comme un endomorphisme linéaire

$$dN(p) \in \text{End}(T_p \Sigma)$$

en vertu de l'identification canonique

$$T_{N(p)} \mathbb{S}^2 \cong N(p)^\perp = T_p \Sigma.$$

(De manière classique, lorsqu'on regarde la différentielle  $dN(p)$  de cette manière on l'appelle aussi *application de Weingarten*.) La proposition-clé pour définir la courbure de la surface  $\Sigma$  au point  $p$  est la suivante.

**Proposition B.4.** *L'application*

$$dN(p) : T_p \Sigma \rightarrow T_p \Sigma$$

*est symétrique par rapport au produit scalaire induit sur  $T_p \Sigma \subset \mathbb{R}^3$  par le produit scalaire euclidien de  $\mathbb{R}^3$ , à savoir*

$$\langle dN(p)v, w \rangle = \langle v, dN(p)w \rangle$$

*pour tous  $v, w \in T_p \Sigma$ .*

*Démonstration.* Choisissons une paramétrisation locale  $\psi : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow U$ ,  $\psi = \psi(u, v)$  au voisinage de  $p = \psi(0, 0)$ . Puisque  $T_p\Sigma$  est de dimension 2 engendré par  $\partial\psi/\partial u(0, 0)$  et  $\partial\psi/\partial v(0, 0)$ , il suffit de montrer l'identité

$$\left\langle dN(p) \frac{\partial\psi}{\partial u}(0, 0), \frac{\partial\psi}{\partial v}(0, 0) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial\psi}{\partial u}(0, 0), dN(p) \frac{\partial\psi}{\partial v}(0, 0) \right\rangle,$$

ou encore

$$\left\langle \frac{\partial(N \circ \psi)}{\partial u}(0, 0), \frac{\partial\psi}{\partial v}(0, 0) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial\psi}{\partial u}(0, 0), \frac{\partial(N \circ \psi)}{\partial v}(0, 0) \right\rangle.$$

Mais  $\langle N \circ \psi, \partial\psi/\partial v \rangle = 0$  sur  $V$  par définition de  $N$ . En prenant la dérivée partielle par rapport à  $u$  en  $(0, 0)$  l'on obtient

$$\left\langle \frac{\partial(N \circ \psi)}{\partial u}(0, 0), \frac{\partial\psi}{\partial v}(0, 0) \right\rangle = -\left\langle N(p), \frac{\partial^2\psi}{\partial u \partial v}(0, 0) \right\rangle.$$

De même  $\langle \partial\psi/\partial u, N \circ \psi \rangle = 0$  sur  $V$  et en prenant la dérivée partielle par rapport à  $v$  en  $(0, 0)$  l'on obtient

$$\left\langle \frac{\partial\psi}{\partial u}(0, 0), dN(p) \frac{\partial\psi}{\partial v}(0, 0) \right\rangle = -\left\langle \frac{\partial^2\psi}{\partial v \partial u}(0, 0), N(p) \right\rangle.$$

L'identité souhaitée découle de l'égalité  $\partial^2\psi/\partial u \partial v = \partial^2\psi/\partial v \partial u$ .  $\square$

Rappelons-nous maintenant que tout endomorphisme symétrique est diagonalisable dans une base orthonormée, avec valeurs propres réelles.

**Définition B.5.** Les valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2$  de  $dN(p)$  s'appellent courbures principales de  $\Sigma$  en  $p$  par rapport à la normale  $N(p)$ .

Une droite  $d \subset T_p\Sigma$  engendrée par un vecteur propre de  $dN(p)$  s'appelle direction de courbure en  $p$ .

Le déterminant  $\det dN(p) = \lambda_1\lambda_2$  s'appelle courbure de Gauss de  $\Sigma$  en  $p$ . On la note  $K(p)$ .

La demi-trace  $\frac{1}{2}\text{tr} dN(p) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$  s'appelle courbure moyenne de  $\Sigma$  en  $p$  par rapport à la normale  $N(p)$ . On la note  $H(p)$ .

Pourquoi a-t-on besoin de préciser "par rapport à la normale  $N(p)$ " dans le cas des courbures principales et dans le cas de la courbure moyenne? Puisque nous pouvons choisir un vecteur unitaire normal à  $\Sigma$  au point  $p$  de deux manières différentes, et ces deux choix diffèrent par un signe. Chaque choix de  $N(p)$  détermine de manière unique le choix de  $N(q)$  pour  $q$  au voisinage de  $p$  de manière à ce que  $N$  soit un champ continu (exercice!), auquel cas il est même lisse. Ces deux choix de champ normal unitaire local au voisinage de  $p$  diffèrent par un signe. Par conséquent, les courbures principales correspondantes et la courbure moyenne vont différer aussi par un signe, et c'est là la seule ambiguïté dans leur définition. Par contraste, la courbure  $K(p)$  ne dépend pas de ce choix, puisque le produit  $\lambda_1\lambda_2$  ne change pas si

l'on remplace  $\lambda_i$  par  $-\lambda_i$  pour  $i = 1, 2$ . (Le *theorema egregium*, ou "théorème remarquable", de Gauss affirme par ailleurs que la courbure  $K(p)$  ne dépend que des propriétés métriques de la surface  $\Sigma$ , héritées à partir de  $\mathbb{R}^3$  via le plongement.)

Le signe de la courbure de Gauss nous donne une première information sur la forme de  $\Sigma$  au voisinage de  $p$ . Si  $K(p) > 0$ , alors  $\Sigma$  est localement située du même côté de son plan tangent géométrique. Si  $K(p) < 0$ , alors  $\Sigma$  intersecte localement son plan tangent géométrique  $p + T_p\Sigma$  selon deux courbes qui se croisent au point  $p$ , et telles que les droites tangentes à ces deux courbes au point d'intersection  $p$  coïncident avec les directions isotropes de la seconde forme fondamentale définie plus bas, appelées aussi *directions asymptotiques*.

Exemples.

1. Soit  $\Sigma = \mathbb{S}^2(R)$ , la sphère de rayon  $R > 0$  centrée en 0. Alors  $N : \mathbb{S}^2(R) \rightarrow \mathbb{S}^2$  est donnée par  $N(p) = p/R$  et  $dN(p)v = v/R$ , de sorte que  $dN(p) = \frac{1}{R}\text{Id}$  et  $K(p) = 1/R^2$ . (De manière générale, l'unité de mesure de la courbure est l'inverse du carré d'une longueur.)

2. Soit  $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 - y^2\}$ . L'on calcule  $K(p) < 0$  en tout point et, en effet, l'on voit que  $\Sigma$  a la forme d'une "selle de cheval" localement en tout point.

À titre d'exemple, détaillons le calcul de la courbure au point  $0 = (0, 0, 0)$ . Choisissons la paramétrisation  $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \Sigma$ ,  $\psi(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)$ , avec

$$\frac{\partial\psi}{\partial u} = (1, 0, 2u), \quad \frac{\partial\psi}{\partial v} = (0, 1, -2v).$$

L'on obtient alors

$$N \circ \psi(u, v) = \left( -\frac{2u}{\sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}}, \frac{2v}{\sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}} \right).$$

L'on calcule

$$dN(0) \frac{\partial\psi}{\partial u}(0, 0) = \frac{\partial(N \circ \psi)}{\partial u}(0, 0) = (-2, 0, 0) = -2 \frac{\partial\psi}{\partial u}(0, 0),$$

$$dN(0) \frac{\partial\psi}{\partial v}(0, 0) = \frac{\partial(N \circ \psi)}{\partial v}(0, 0) = (0, 2, 0) = 2 \frac{\partial\psi}{\partial v}(0, 0).$$

Les valeurs propres de  $dN(0)$  sont donc  $\pm 2$  et l'on a  $K(0) = -4$ .

**Définition B.6.** *La forme quadratique*

$$II_p : T_p\Sigma \rightarrow \mathbb{R}, \quad v \mapsto \langle dN(p)v, v \rangle$$

*s'appelle* deuxième forme fondamentale de la surface.

Soient  $e_1, e_2$  des vecteurs propres pour les valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2$ , formant une base orthonormée. L'on a  $II_p(e_i) = \lambda_i e_i$  pour  $i = 1, 2$ .

Tout vecteur  $v$  de norme 1 s'exprime de manière unique comme  $v = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2$ , et l'on obtient

$$II_p(v) = \lambda_1 \cos^2 \theta + \lambda_2 \sin^2 \theta.$$

L'on voit en particulier que  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont les valeurs extrémales que prend la fonction  $II_p$  sur le cercle unité  $\{v \in T_p \Sigma : |v| = 1\} \subset T_p \Sigma$ .

*Sections normales.* Dans la discussion qui suit nous relierons la deuxième forme fondamentale et les courbures principales à la courbure de certaines courbes tracées sur  $\Sigma$ .

Soit  $v \in T_p \Sigma$  avec  $|v| = 1$ . Considérons le plan affine  $\mathcal{N}_v = p + \text{Vect}(N(p), v)$ , orthogonal à  $p + T_p \Sigma$ , intersectant  $p + T_p \Sigma$  selon la droite  $p + \mathbb{R}v$ , et intersectant  $\Sigma$  localement au voisinage de  $p$  selon une courbe que l'on note  $C_v \subset \mathcal{N}_v$ . La courbe  $C_v$  est naturellement orientée par  $v$ . On appelle  $C_v$  la *section normale en  $p$  dans la direction  $v$* .

**Proposition B.7.** *Si l'on oriente  $\mathcal{N}_p$  par la base  $(N(p), v)$ , ou encore  $(v, -N(p))$ , alors la courbure signée de  $C_v$  au point  $p$  est égale à  $II_p(v)$ .*

*Démonstration.* Soit  $c : I \rightarrow \mathcal{N}_p$  paramétrée par la longueur de l'arc, avec  $c(0) = p$  et  $\dot{c}(0) = v$ . Notons  $N(t) = N(c(t))$  pour  $t \in I$ . En dérivant par rapport à  $t$  en 0 l'identité  $\langle N(t), \dot{c}(t) \rangle = 0$ , l'on obtient

$$\langle \dot{N}(0), \dot{c}(0) \rangle + \langle N(p), \ddot{c}(0) \rangle = 0,$$

ou encore

$$II_p(v) = \langle -N(p), \ddot{c}(0) \rangle.$$

Or le membre de droite de cette égalité représente précisément la courbure signée de  $C_v$  au point  $p$ .  $\square$

L'on voit que les courbures principales peuvent être interprétées comme les valeurs extrémales que prend la courbure en  $p$  sur l'ensemble des sections normales à  $\Sigma$  en  $p$ .

Le lecteur est encouragé à approfondir ces thèmes en lisant le livre de M.P. do Carmo, *Differential geometry of curves and surfaces*, ou encore le livre de M. Berger et B. Gostiaux, *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces*.