Université Pierre et Marie Curie
M2 Mathématiques Fondamentales
2016-2017

Cours de topologie algébrique

Feuille 1 : cohomologie de De Rham

Étant donnée une variété M, l'on note $H^k(M)$ le k-ème groupe de cohomologie de De Rham et $H^k_c(M)$ le k-ème groupe de cohomologie de De Rham à support compact.

Exercice 1 (suite exacte de Mayer-Vietoris)**.** Soient M une variété et $U, V \subset M$ deux ouverts. Considérons le diagramme dans lequel les flèches désignent les inclusions

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dr, "j_U"] & \\ U \cap V \arrow[ur, "i_U"] \arrow[dr, "i_V"'] & & U \cup V \\ & V \arrow[ur, "j_V"'] & \end{tikzcd}$$

Montrer que l'on a des suites exactes courtes de complexes

$$0 \longrightarrow \Omega^*(U \cup V) \xrightarrow{j_U^* \oplus j_V^*} \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) \xrightarrow{i_U^* - i_V^*} \Omega^*(U \cap V) \longrightarrow 0.$$

et

$$0 \longrightarrow \Omega^*_c(U \cap V) \xrightarrow{(i_{U*}, i_{V*})} \Omega^*_c(U) \oplus \Omega^*_c(V) \xrightarrow{j_{U*} - j_{V*}} \Omega^*_c(U \cup V) \longrightarrow 0.$$

En déduire les suites exactes longues de Mayer-Vietoris en cohomologie

$$\dots H^k(U \cup V) \xrightarrow{j_U^* \oplus j_V^*} H^k(U) \oplus H^k(V) \xrightarrow{i_U^* - i_V^*} H^k(U \cap V) \longrightarrow H^{k+1}(U \cup V) \dots$$

et

$$\dots H^k_c(U \cap V) \xrightarrow{(i_{U*}, i_{V*})} H^k_c(U) \oplus H^k_c(V) \xrightarrow{j_{U*} - j_{V*}} H^k_c(U \cup V) \longrightarrow H^{k+1}_c(U \cap V) \dots$$

Exercice 2. (action des difféomorphismes isotopes à l'identité). Soit M une variété et $\mathrm{Diff}_0(M)$ la composante connexe de l'identité dans $\mathrm{Diff}(M)$. Montrer que tout élément de $\mathrm{Diff}_0(M)$ agit trivialement sur la cohomologie de De Rham $H^*(M)$ et sur la cohomologie de De Rham à support compact $H^*_c(M)$.

Exercice 3. (cohomologie de De Rham en degré maximal). Soit M une variété connexe sans bord de dimension n. Supposons que M est orientable et orientée. Nous montrons dans cet exercice que l'on a un isomorphisme

$$\int_M : H^n_c(M) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}, \qquad [\omega] \mapsto \int_M [\omega].$$

(i) Montrer que le morphisme ci-dessus est bien défini et surjectif.

(ii) Montrer que le morphisme ci-dessus est injectif dans le cas $M = \mathbb{R}^n$. De façon équivalente, l'on montrera le fait suivant : si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction lisse à support compact telle que $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = 0$, alors il existe des fonctions lisses à support compact $u_1, \ldots, u_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telles que $f = \sum_i \partial u_i/\partial x_i$. L'on pourra procéder par récurrence sur n.

(iii) Montrer que le morphisme ci-dessus est injectif dans le cas général en considérant (1) un recouvrement ouvert fini du support d'une n-forme à support compact et d'intégrale nulle, (2) le fait que $\mathrm{Diff}_0(M)$ agit transitivement sur M, et (3) l'exercice précédent.

Exercice 4. L'on rappelle que la cohomologie de De Rham d'une boule de l'espace euclidien est supportée en degré 0 et qu'elle est de rang 1 (justification ?)

Utiliser la suite de Mayer-Vietoris pour calculer la cohomologie de De Rham des variétés suivantes :

$$S^n, \mathbb{C}P^n, T^2, K, \mathbb{R}P^2.$$

Ici K désigne la bouteille de Klein et T^2 le tore de dimension 2.

Exercice 5. Montrer que

$$H_c^*(\mathbb{R}^n) \simeq \begin{cases} \mathbb{R}, & * = n, \\ 0, & * \neq n. \end{cases}$$

(L'on pourra par exemple utiliser l'exercice 3 et le calcul des groupes de cohomologie de De Rham de la sphère S^n.)