Université Pierre et Marie Curie
M2 Mathématiques Fondamentales
2016-2017

Cours de topologie algébrique

Feuille 2 : Fibrés vectoriels

Exercice 1 (Fibrés en droites sur le cercle)**.**
(a) Montrer que le fibré normal à l'équateur $S^1 \subset S^2$ est trivial.
(b) Montrer que le fibré normal à la droite à l'infini $\mathbb{R}P^1 \subset \mathbb{R}P^2$ n'est pas trivial.
(c) Montrer qu'il n'y a que deux fibrés en droites réelles à isomorphisme près sur le cercle.

Exercice 2. Considérons l'espace projectif complexe $\mathbb{C}P^n$ et la variété

$$\mathcal{O}(-1) = \{(d, v) \in \mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}^{n+1} \,:\, v \in d\} \subset \mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}^{n+1}.$$

(a) Montrer que $\mathcal{O}(-1)$ est un fibré vectoriel de rang 2 sur $\mathbb{C}P^n$.
(b) Montrer que le fibré tangent $T\mathbb{C}P^n$ de $\mathbb{C}P^n$ est isomorphe au fibré

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{O}(-1), \mathcal{O}(-1)^{\perp})$$

oú $\mathcal{O}(-1)^{\perp}$ est le complément orthogonal de $\mathcal{O}(-1)$ dans $\mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}^{n+1}$.
(c) Montrer que

$$T\mathbb{C}P^n \oplus \mathbb{C} \times \mathbb{C}P^n \cong \oplus_{i=1}^{n+1} \mathcal{O}(1).$$

Exercice 3. Considérons la variété de Grassmann

$$G_n(\mathbb{R}^{n+k}) = \{n-\text{plan dans } \mathbb{R}^{n+k} \text{ passant par l'origine}\}$$

et la variété

$$\gamma^n(\mathbb{R}^{n+k}) = \{(n-\text{plan dans } \mathbb{R}^{n+k}, \text{vecteur dans ce plan})\}.$$

(a) Montrer que $\gamma^n(\mathbb{R}^{n+k})$ est un fibré vectoriel sur $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$.
(b) Montrer que le fibré tangent $TG_n(\mathbb{R}^{n+k})$ de $G_n(\mathbb{R}^{n+k})$ est isomorphe à

$$\mathrm{Hom}(\gamma^n(\mathbb{R}^{n+k}), \gamma^n(\mathbb{R}^{n+k})^{\perp})$$

oú $\gamma^n(\mathbb{R}^{n+k})^{\perp}$ est le complément orthogonal de $\gamma^n(\mathbb{R}^{n+k})$ dans $G_n(\mathbb{R}^{n+k}) \times \mathbb{R}^{n+k}$.
(c) Montrer que

$$T\mathrm{G}_1(\mathbb{R}^{1+k}) \oplus \mathbb{R} \times G_1(\mathbb{R}^{1+k}) \cong \oplus_{i=1}^{k+1} \gamma^1(\mathbb{R}^{1+k}).$$