Feuille 3 : Groupes d'homotopie

Exercice 1. Montrer que

$$\pi_k(\mathbb{C}P^n) = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 1, \\ \mathbb{Z} & \text{si } k = 2, \\ \pi_k(S^{2n+1}) & \text{si } k > 2. \end{cases}$$

Exercice 2. Montrer que

$$\pi_k(\mathbb{R}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = 1, n = 1 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } k = 1, n > 1, \\ \pi_k(S^n) & \text{si } k > 1, n > 1. \end{cases}$$

Exercice 3. Montrer que $\pi_1(\mathrm{U}(n)) = \mathbb{Z}, \pi_2(\mathrm{U}(n)) = 0, \pi_3(\mathrm{U}(n)) = \mathbb{Z}$ pour $n > 1$ et que

$$\pi_k(\mathrm{U}(n-1) = \pi_k(\mathrm{U}(n)) \quad \text{pour } n >> k.$$

Alors on définit $\pi_k(\mathrm{U})$ comme $\pi_k(\mathrm{U}(n))$ pour $n >> k$.

Exercice 4. Montrer que $\pi_1(\mathrm{SO}(n)) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ pour $n > 2$ et que

$$\pi_k(\mathrm{SO}(n-1) = \pi_k(\mathrm{SO}(n)) \quad \text{pour } n >> k.$$

Alors on définit $\pi_k(\mathrm{SO})$ comme $\pi_k(\mathrm{SO}(n))$ pour $n >> k$.

Exercice 5. Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes. Ils définissent une application $f = P/Q : \mathbb{C}P^1 \longrightarrow \mathbb{C}P^1$. Montrer que le degré topologique de f est égal à $\max\{\deg P, \deg Q\}$.

Exercice 6. (Théorème de la boule chevelue)
Montrer que sur une sphère réelle dont la dimension n est paire, tout champ de vecteurs continu X s'annule en un point au moins. D'un autre côté, en dimension impaire, il existe des champs de vecteurs continus qui ne s'annulent pas.

Exercice 7. (Théorème du point fixe de Brouwer)
Toute application continue d'une boule fermée d'un espace euclidien dans elle-même admet un point fixe.

Exercice 8. Nous nous proposons de montrer que SO(3) est difféomorphe à $\mathbb{R}P^3$.

Identifier $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ avec $\{q \in \mathbb{H} \, : \, |q| = 1\}$, où $\mathbb{H}$ désigne l'espace des quaternions. Notons $\mathcal{I}(\mathbb{H})$ le sous-espace des quaternions imaginaires.

(1) Montrer que l'application

$$q \mapsto f(q) : \mathcal{I}(\mathbb{H}) \longrightarrow \mathcal{I}(\mathbb{H}) \, , \quad f(q)(v) = qvq^{-1}$$

est bien définie.

(2) Trouver la matrice de $f(q)$ en fonction des coordonnées de q et observer que l'application $q \mapsto f(q) \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ est lisse.

(3) Montrer que $f(q^{-1}) = f(q)^t$ et que f est un morphisme de groupes. Conclure que $f(q) \in \mathrm{O}(3)$.

(4) Montrer que l'image de f est connexe et alors $f : S^3 \longrightarrow \mathrm{SO}(3)$. Montrer que $f : S^3 \longrightarrow \mathrm{SO}(3)$ est surjective.

(5) Trouver $\ker(f)$ et montrer que $S^3/\ker(f) \cong \mathrm{Im}\,(f)$ est un difféomorphisme.