Feuille 4 : Classes caractéristiques

Exercice 1. Montrer que, si $\mathbb{R}P^n$ est parallélisable, c'est-à-dire $T\mathbb{R}P^n$ est trivial, alors nécessairement n est de la forme

$$n = 2^k - 1, \qquad k \geqslant 0.$$

Exercice 2. Supposons qu'il existe une application bilinéaire

$$p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

sans diviseurs de zéro. Alors $\mathbb{R}P^{n-1}$ est parallélisable et par conséquent n est nécessairement de la forme

$$n = 2^k, \qquad k \geqslant 0.$$

Exercice 3.
(i) Montrer que la collection des séries infinies

$$w = 1 + w_1 + w_2 + \dots \qquad \in H^{\Pi}(B, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

avec le premier coefficient 1 forme un groupe commutatif sous multiplication. Conclure que soit E, F deux fibré sur la même base, l'equation

$$w(E \oplus F) = w(E)w(F)$$

peut être résolue de manière unique.

(ii) Montrer que s'il existe une immersion de $\mathbb{R}P^9$ dans $\mathbb{R}^{9+k}$ alors k est au moins 6.

(iii) Montrer que s'il existe une immersion de $\mathbb{R}P^{2^r}$ dans $\mathbb{R}^{2^r+k}$ alors k est au moins $2^r - 1$.

Exercice 4. Montrer qu'un fibré réel $E \longrightarrow B$ est orientable si et seulement si $w_1(E) = 0$.

Exercice 5. Soit $E \longrightarrow B$ un fibré vectoriel réel. Montrer que

$$w_1(E) = w_1(\det_{\mathbb{R}}(E)).$$

De même, soit $E \longrightarrow B$ un fibré vectoriel complexe. Montrer que

$$c_1(E) = c_1(\det_{\mathbb{C}}(E)).$$

Exercice 6. Calculer l'homologie et la cohomologie de $\mathbb{R}P^n$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.